DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zdenka Babić

DIGITALNA OBRADA SIGNALA
I izdanje

Knjiga je izdana putem samostalnog izdavaštva.
Autorica preuzima odgovornost za kompletan proces izdavanja,
od kreiranja sadržaja do štampe.

Štampa: Marko's Design & Print Studio
Tiraž: 100 primjeraka

Elektronsko izdanje knjige je dostupno online.
Za informacije o dostupnosti štampanog izdanja,
obratite se na: zdenkavbabic@gmail.com.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

621.391:004(075.8)

БАБИЋ, Зденка, 1960-
Digitalna obrada signala / Zdenka Babić. - 1. izd. - Laktaši : Z. Babić, 2025 (Banja Luka : Marko's Design & Print Studio). - XX, 705 стр. : илустр. ; 30 cm

Тираж 100. - Библиографија: стр. 701-705. - Регистар.

ISBN 978-99976-053-6-8

COBISS.RS-ID 142477057

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zdenka Babić

2025.

Mojoj majci, Veri, za beskrajnu ljubav i podršku, te suprugu Miši i našoj djeci, Martini i Teodoru.

PREDGOVOR

Ova knjiga, stvarana kroz dugi niz godina, rezultat je četrdesetogodišnjeg iskustva autorice u nastavi i istraživanju iz oblasti digitalne obrade signala. Namijenjena je studentima elektrotehničkih fakulteta, ali i svima koji se interesuju za ovu oblast, pod uslovom da vladaju osnovnim matematičkim pojmovima kao što su linearna algebra, diferencijalni račun i integrali. Iako su znanja iz obrade signala u kontinualnom domenu poželjna za lakše razumijevanje materije, ona je izložena tako da i čitaoci koji s njom nisu familijarni mogu da ovladaju digitalnom obradom signala.

Knjiga je organizovana u četiri cjeline. Pojam obrada signala obuhvata dva aspekta: obradu signala u užem smislu i analizu signala. Stoga ove dvije oblasti čine prve dvije cjeline knjige. U praksi se često susrećemo sa digitalnom obradom kontinualnih signala, pa je treća cjelina knjige posvećena upravo tome. Zbog svog značaja u praktičnim primjenama digitalni filtri su takođe obrađeni kao zasebna cjelina.

Prvi dio knjige je posvećen obradi signala u užem smislu. Počinje osnovnim pojmovima i definicijama u prvom poglavlju, a zatim se u drugom i trećem poglavlju detaljnije govori o diskretnim signalima i sistemima, respektivno. Obrada diskretnih signala u vremenskom domenu, koristeći linearne, vremenski invarijantne sisteme, opisana je u četvrtom poglavlju. Uz konvoluciju, kao osnovni metod obrade signala, u istom poglavlju se razmatra i određivanje odziva linearnih, vremenski invarijantnih sistema opisanih jednačinama diferencija. Uvodi se pojam funkcije prenosa i frekvencijske karakteristike sistema. Na kraju ovog poglavlja obrađena je i korelacija signala. Obrada signala se pojednostavljuje prelaskom u transformacioni domen, pa je peto poglavlje posvećeno z-transformaciji. Na kraju knjige, nakon što su razmotreni i drugi aspekti obrade signala, u šesnaestom poglavlju opisani su metodi realizacije i načini implementacije digitalne obrade signala.

Dok je u prvih pet poglavlja naglasak na obradi signala u užem smislu, drugi dio knjige je posvećen analizi signala. Analiza signala se često radi u frekvencijskom domenu, pa su tako u šestom i sedmom poglavlju date teorijske osnove Furijeove transformacije diskretnih signala i Diskretne Furijeove transformacije, respektivno. Prikazani su algoritmi za efikasno računanje Diskretne Furijeove transformacije. Opisane su i Kosinusna transformacija i Čirp-z transformacija. Nakon uvođenja ovih transformacija, u osmom poglavlju se razmatra frekvencijska analiza signala, dok je deveto poglavlje posvećeno slučajnim procesima. Dodatno je, u dvanaestom poglavlju, obrađena vremensko-frekvencijska analiza nestacionarnih signala.

Treću cjelinu knjige čine dva poglavlja, deseto i jedanaesto, koja se odnose na digitalnu obradu kontinualnih signala. U desetom poglavlju je opisana diskretizacija i rekonstrukcija analognih signala. Sistemi sa više učestanosti odmjeravanja, u kojima je neophodno raditi decimaciju i/ili interpolaciju signala, obrađeni su u jedanaestom poglavlju.

Digitalnim filtrima su posvećena tri poglavlja. Uvod u digitalne filtre je dat u trinaestom poglavlju. U četrnaestom poglvalju su detaljno obrađene klasične metode projektovanja digitalnih filtara. Teorijske osnove i praktične primjene optimalnih i adaptivnih filtara date su u petnaestom poglavlju.

Želim da izrazim duboku zahvalnost profesoru Danilu Mandiću i profesoru Vladimiru Risojeviću, čije su neprocjenjive sugestije značajno doprinijele unapređenju izložene materije. Takođe, zahvaljujem se nastavnicima i saradnicima Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci, kao i studentima niza generacija elektrotehničkih fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci i Univerziteta u Istočnom Sarajevu, čije su sugestije pomogle da ova knjiga poprimi svoj konačni oblik. Zajedno smo kroz diskusije oblikovali gradivo, identifikovali suštinske i tipografske greške, i na tome im izražavam veliku zahvalnost. Bez svih njih, kao i bez nesebične podrške i razumijevanja moje porodice, ova knjiga vjerovatno ne bi nikada ugledala svjetlost dana. Nadam se da će biti korisna studentima, istraživačima i svim onima koji žele da istraže i savladaju digitalnu obradu signala.

Banja Luka, 2025.

Zdenka Babić

SADRŽAJ

Glava 1

UVOD

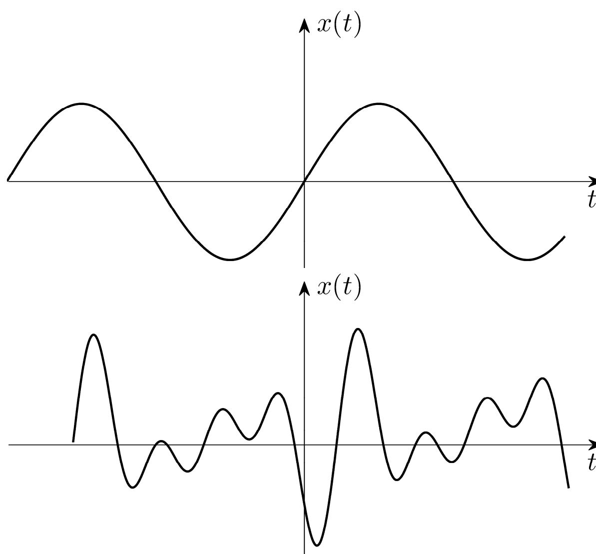
Kada analiziramo prirodne ili vještački izazvane fizičke pojave, ili osobine nekog fenomena, nastojimo ih matematički opisati i u tu svrhu koristimo matematičke funkcije. Na primjer, zvuk koji nastaje uslijed varijacija akustičkog pritiska opisujemo matematičkom funkcijom koja izražava zavisnost akustičkog pritiska ili subjektivnog doživljaja glasnoće zvuka u zavisnosti od vremena. Slično je i sa ostalim fizičkim pojavama koje mogu da se opišu funkcijama neke nezavisne promjenljive, koja ne mora da bude vrijeme. Kao primjere možemo navesti promjenu temperature u toku vremena, ili promjenu napona na vodu u funkciji rastojanja od referentne tačke u prostoru. Radi jednostavnosti ćemo, najčešće, u daljnjem izlaganju smatrati da nezavisna promjenljiva ima prirodu vremena. Matematičke funkcije koje opisuju prirodnu ili vještački izazvanu fizičku pojavu, ili osobine nekog fenomena, često nazivamo signalima. Međutim, signal je širi pojam od pojma funkcije. Iako opšteprihvaćena definicija signala ne postoji, može se reći da je *signal fizička manifestacija informacija o ponašanju ili osobinama nekog fenomena koja se reprezentuje u različitim fizičkim, simboličkim ili apstraktnim oblicima.*

Matematičke funkcije kojima opisujemo signale mogu imati jednu ili više nezavisnih promjenljivih, prema čemu razlikujemo jednodimenzionalne, dvodimenzionalne, trodimenzionalne i, u opštem slučaju, višedimenzionalne signale. Primjeri višedimenzionalnih signala su slika i video, gdje posmatramo prostornu, odnosno prostorno-vremensku raspodjelu svjetline, respektivno.

Kod fizičkih pojava koje se odvijaju na jedinstven način vrijednosti signala kojima ih opisujemo su uvijek iste u istom trenutku. Tada govorimo o determinističkim signalima. Ako ishodi događaja kojim se opisuje neka fizička pojava mogu da, sa nekom vjerovatnoćom, budu različiti, signale koji opisuju takve pojave nazivamo slučajnim ili stohastičkim signalima.

U fizičkom svijetu koji nas okružuje, nezavisne promjenljive, kao što su vrijeme i prostor, doživljavamo kao kontinualne veličine, kod kojih razlika susjednih vrijednosti kojima ih opisujemo može biti beskonačno mala. Za većinu fizičkih pojava takođe smatramo da su kontinualne prirode, tj. da neprekidno postoje u nekom vremenskom intervalu, u nekom prostoru, ili kao funkcije neke druge kontinualne promjenljive, čiji opseg vrijednosti može biti i beskonačan. Signale koji opisuju kontinualne pojave, te stoga imaju definisane vrijednosti za svaku vrijednost kontinualne nezavisne promjenljive, osim, eventualno, u konačnom broju tačaka, nazivamo *kontinualni signali*.

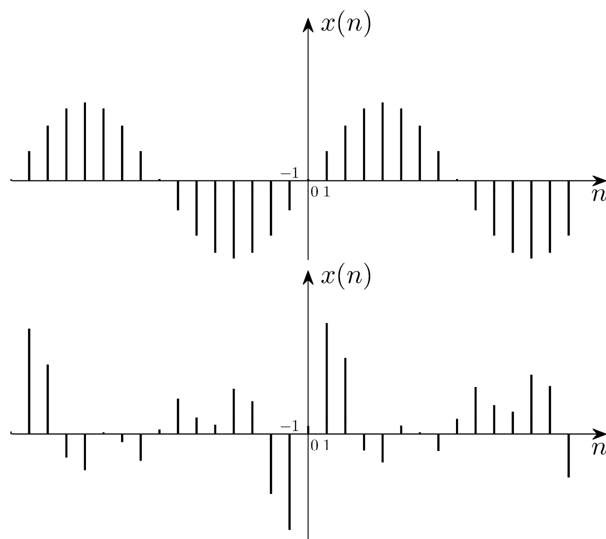
Da bismo imali dovoljno informacija o nekom fenomenu, često nije neophodno poznavanje signala za svaku vrijednost kontinualne nezavisne promjenljive, već je dovoljno poznavati vrijednosti signala samo u njenim pojedinačnim i međusobno udaljenim (diskretnim) tačkama. Nezavisna promjenljiva tada poprima diskretnu prirodu. Posmatrajmo, kao primjer, dnevno mjerenje vodostaja rijeke, ili mjerenje temperature nekog hemijskog procesa, koje se obavlja svakih nekoliko mikrosekundi. Kao rezultat mjerenja ovih kontinualnih pojava nastaju signali čije vrijednosti poznajemo samo u diskretnim vremenskim trenucima. Za signale čije vrijednosti su poznate samo za diskretne vrijednosti nezavisne promjenljive, odnosno, čija nezavisna promjenljiva ima diskretnu prirodu, kažemo da su *diskretni*. Te vrijednosti kontinualne nezavisne promjenljive ne moraju da budu ekvidistantne, ali se u praktičnim primjenama, zbog jednostavnosti, uobičajeno bira podjednaka udaljenost između susjednih vrijednosti. U daljnjem izlaganju ćemo smatrati da je diskretni signal definisan za



Slika 1.1 Primjeri analognih signala.

ekvidistantne vrijednosti kontinualne nezavisne promjenljive. Budući da su njihove vrijednosti poznate samo u diskretnim vremenskim trenucima, diskretne signale možemo zapisati kao sekvencu brojeva sa indeksom *n*, koji predstavlja diskretnu nezavisnu promjenljivu (diskretno vrijeme) i označiti sa $x(n)$. Ako se posebno ne naglasi, podrazumijeva se da je signal definisan za svako $n \in \mathbb{Z}$.

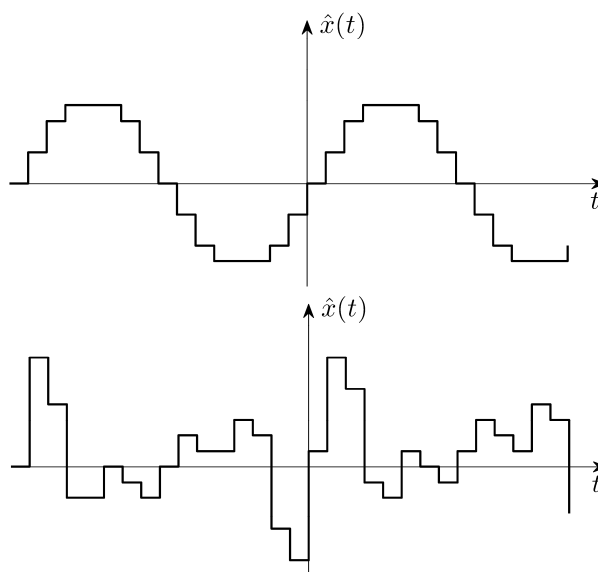
Osim podjele signala na osnovu kontinualne ili diskretne prirode nezavisne promjenljive, potrebno je razmotriti i podjelu koja je posljedica kontinualne ili diskretne prirode intenziteta fizičke pojave, odnosno amplitude signala koji tu pojavu opisuje. Prvu grupu čine signali kontinualni po amplitudi, tj. signali kod kojih razlika amplitudnih nivoa može da bude beskonačno mala. Za signale iz druge grupe, kod kojih su amplitudni nivoi međusobno udaljeni (diskretni), kažemo da su *kvantovani*. Ako je signal kontinualan i u vremenu i po amplitudi, kažemo da se radi o *analognom* signalu. Za signal diskretan u vremenu i sa kvantovanom amplitudom, čijim amplitudnim nivoima su pridružene brojčane vrijednosti iz konačnog skupa brojeva, kažemo da je *digitalan*. U daljnjem izlaganju ćemo razmatrati diskretne signale, neovisno od toga da li su im amplitude kvantovane ili ne. Tamo gdje to bude neophodno, biće naglašeno da se radi o digitalnim signalima. Na Slici 1.1 prikazani su primjeri analognih signala,



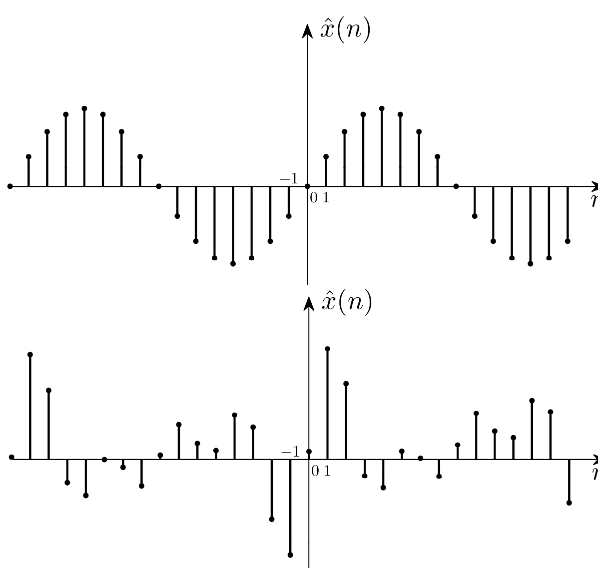
Slika 1.2 Primjeri diskretnih signala.

na Slici 1.2 primjeri diskretnih signala sa kontinualnom amplitudom, na Slici 1.3 primjeri kvantovanih signala i na Slici 1.4 primjeri digitalnih signala. Kako bi se naglasila činjenica da se vrijednosti digitalnih signala neophodno zaokružuju na najbližu vrijednost iz raspoloživog skupa brojeva i napravila razlika u odnosu na diskretne signale, u grafičkom prikazu digitalnih signala mogu se dodati tačke ili kružići na krajevima linija, kao na Slici 1.4.

Diskretni signali mogu opisivati diskretne fizičke pojave, kao na primjer broj automobila koji kroz ulicu prođu u toku svakog sata, ali mogu nastati i tako što se u diskretnim tačkama vremena odaberu vrijednosti signala koji je po svojoj prirodi kontinualan. Takav je slučaj kod signala koji su nastali mjerenjima, na primjer mjerenjem temperature u poznatim trenucima vremena. Postupak pridruživanja brojčanih vrijednosti kontinualnim fizičkim veličinama u diskretnim vremenskim trenucima nazivamo *analogno/digitalna konverzija*, ili kratko *digitalizacija*. Analogno/digitalna konverzija se sastoji od tri koraka. Prvo se vrši *odmjeravanje* signala, tako što se uzimaju uzorci signala u odabranim vremenskim trenucima. Tako nastaju diskretni signali. Zatim se vrši *kvantovanje* signala po amplitudi. Kvantovanje je proces kojim se ulazni signal kontinualne



Slika 1.3 Primjeri signala kontinualnih u vremenu sa kvantovanom amplitudom.



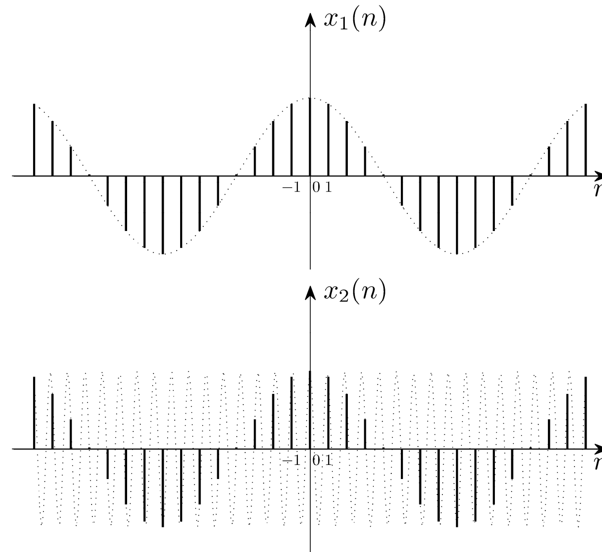
Slika 1.4 Primjeri digitalnih signala.

amplitude preslikava u izlazni signal čija amplituda može da poprimi samo konačno mnogo različitih nivoa. Dobijenim kvantizacionim nivoima se, u procesu *kodovanja*, pridružuju brojčane vrijednosti iz konačnog skupa brojeva, te kao rezultat dobijamo digitalne signale. Redoslijed koraka može biti i obrnut, tako da se prvo uradi kvantovanje signala po amplitudi, a zatim odmjeravanje u vremenu. U Glavi 10 ćemo detaljno govoriti o digitalizaciji signala, a u nastavku ćemo opisati samo osnove tog procesa.

Posmatrajmo vrijednosti kontinualnog signala $x(t)$ u diskretnim trenucima vremena $n\Delta t,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, gdje je Δt *korak odmjeravanja*, odnosno vremenska udaljenost između susjednih trenutaka u kojima posmatramo vrijednosti kontinualnog signala. Birajući vrijednosti kontinualnog signala u diskretnim vremenskim trenucima dobijamo sekvencu brojeva $x(n\Delta t),\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, a nakon zamjene diskretnih vrijednosti nezavisne promjenljive $n\Delta t$ indeksom n, diskretni signal zapisujemo sa $x(n)$. Intuitivno je jasno da odmjerke signala treba češće uzimati ako se signal brzo mijenja, kako bismo imali dovoljno informacija o fizičkoj pojavi koju signal opisuje i kako bismo osigurali da neka brza promjena ne prođe neopaženo. Osnovni cilj prilikom odmjeravanja signala je da se sačuva što više informacija sadržanih u signalu, kako bi se na osnovu odmjeraka signala mogao što tačnije, odnosno sa što manjom greškom, rekonstruisati kontinualni signal. Ako se odmjeravanje signala ne radi sa dovoljno velikom *frekvencijom odmjeravanja*, koja je recipročna koraku odmjeravanja, nije moguća rekonstrukcija originalnog kontinualnog signala. Tada se dešava da se odmjeravanjem različitih kontinualnih signala dobijaju iste vrijednosti diskretnih signala.

Kao primjer posmatrajmo odmjeravanje dva kontinualna prostoperiodična signala sa korakom odmjeravanja Δt. Neka su učestanosti kontinualnih signala Ω_0 i $\Omega_0+\dfrac{2\pi}{\Delta t}$. Odmjeravanjem ova dva kontinualna signala različitih učestanosti nastaju identični diskretni signali:

$$\cos(\Omega_0 t)\Big|_{t=n\Delta t}=\cos(\Omega_0 n\Delta t), \tag{1.1}$$



Slika 1.5 Primjer odmjeravanja dva različita kontinualna signala koje rezultuje istim diskretnim signalom. Kontinualni signali su prikazani tačkastim linijama.

$$\cos\left[\left(\Omega_0+\frac{2\pi}{\Delta t}\right)t\right]\Bigg|_{t=n\Delta t}=\cos\left[\left(\Omega_0+\frac{2\pi}{\Delta t}\right)n\Delta t\right]=\cos\left(\Omega_0 n\Delta t\right). \tag{1.2}$$

Iz ovako dobijenih odmjeraka signala nije moguće zaključiti o kom kontinualnom signalu se radi, kao što se može vidjeti sa Slike 1.5. Odmjeravanju signala ćemo posvetiti posebnu pažnju kasnije, kada ćemo pokazati da frekvencija odmjeravanja signala mora biti bar dva puta veća od gornje granične frekvencije sadržane u signalu, kako bi bila moguća idealna rekonstrukcija kontinualnog signala iz njegovih odmjeraka.

Prilikom obrade signala digitalnim hardverom ili softverski, brojčane vrijednosti se zapisuju sa konačnom dužinom riječi. Stoga nije moguće raditi sa kontinualnim vrijednostima amplitude, već se amplituda signala mora kvantovati, tj. svesti na neki od predefinisanih amplitudnih nivoa iz konačnog skupa. Pretpostavimo da je dinamički opseg analognog signala $D=\left[x_{\min},x_{\max}\right)$,

tj. da je amplituda signala $x(t)$ kontinualna i da može da poprimi bilo koji nivo iz dinamičkog opsega, $x_{\min} \le x(t) < x_{\max}$. Ako želimo da signal $x(t)$ kvantujemo sa L različitih nivoa $\hat{x}_k$, $k = 0,1,...,L-1$, podijelimo dinamički opseg signala $x(t)$ na nepreklapajuće segmente $[x_k, x_{k+1})$, $k = 0,1,\ldots,L-1$, pri čemu je $x_0 = x_{\min}$, $x_L = x_{\max}$ i $x_k < x_{k+1}$. Ako su ti segmenti jednakih veličina govorimo o *linearnom kvantovanju*, a ako nisu o *nelinearnom kvantovanju*. Kvantovanjem se ulazni signal $x(t)$, kontinualan po amplitudi, preslikava u signal $\hat{x}(t)$ čije amplitude pripadaju konačnom skupu amplitudnih nivoa $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{L-1}\}$. Preslikavanje ulaznog signala $x(t)$ u izlazni signal $\hat{x}(t)$ se vrši na osnovu *kvantizacione funkcije* na sljedeći način:

$$x(t) \in [x_k, x_{k+1}) \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}_k,\ k = 0,1,\ldots L-1. \tag{1.3}$$

Zatim se vrši kodovanje signala, tj. pridruživanje brojčanih vrijednosti, zapisanih sa konačnim brojem bita, kvantizacionim nivoima. Najjednostavniji način kodovanja je *impulsna kodna modulacija* (eng. *Pulse-Code Modulation - PCM*), gdje se $L = 2^B$ amplitudnih nivoa linearno koduje sa kodnim riječima dužine B bita. Složenijim metodima kodovanja i *kompresijom signala* moguće je umanjiti broj bita potreban za predstavljanje signala.

Očigledno je da tokom kvantovanja dolazi do promjene signala. *Greška kvantizacije*, koja je jednaka razlici originalnog signala i kvantovanog signala:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \tag{1.4}$$

zavisi od dinamičkog opsega signala i broja nivoa kvantizacije, kao i od izbora kvantizacione funkcije i kvantizacionih nivoa. Greška kvantizacije se često posmatra kao poseban signal i zbog svoje stohastičke prirode naziva se šum kvantizacije. Broj bita kojim se koduje kvantovani signal je veoma važan. Pri memorisanju, procesiranju i prenosu signala poželjno je baratati sa što manjim brojem bita. Međutim, kvantovanjem signala gubimo dio informacija koje nosi originalni signal. Stoga je neophodno naći kompromis između ova dva oprečna zahtjeva, tako da se odabere najmanji mogući broj bita za zapis amplitude, a da

se pri tome sačuvaju neophodne informacije sadržane u signalu. U praksi se rijetko koristi manje od $2^8 = 256$ kvantizacionih nivoa.

Kvantovanjem diskretnog signala, a zatim kodovanjem kvantovanih nivoa dobijamo digitalni signal $\hat{x}(n)$. Ovako dobijen digitalni signal je niz brojeva koji predstavljaju kvantovane vrijednosti amplituda diskretnog signala. Radi jednostavnije notacije, u daljnjem izlaganju ćemo, ako drugačije ne naglasimo, koristiti istu oznaku $x(n)$ za sve diskretne signale, jednako kao i isti stil grafičkog prikazivanja bez dodatnih tačkica ili kružića na krajevima linija, kao na Slici 1.2, neovisno o tome da li su njihove amplitude kvantovane ili ne.

Vidjeli smo da diskretne signale opisujemo diskretnim matematičkim funkcijama ili sekvencama brojeva, kako bismo ih mogli jednostavnije analizirati i, eventualno, na njih uticati. Pojam *digitalna obrada signala*, u širem smislu označava postupak kojim se sekvenca brojeva, koja predstavlja ulazni signal, po nekom pravilu konvertuje u izlazni signal ili parametre koji ga opisuju. Iako je digitalna obrada signala specifičniji pojam u odnosu na širi pojam obrade signala, koji obuhvata signale svih vrsta, termin "digitalna" se često podrazumijeva i izostavlja kada je iz konteksta jasno o kojoj vrsti obrade signala se govori. Obrada signala obuhvata *obradu signala u užem smislu* i *analizu signala*. Kada je rezultat obrade signala signal koji se dobija prolaskom ulaznog signala kroz sistem, govorimo o obradi signala u užem smislu. Tada kažemo da obradom signala transformišemo pobudni signal u signal odziva. Termin "u užem smislu" takođe se često izostavlja prilikom izlaganja kada je iz konteksta jasno da se radi o obradi signala u užem smislu. S druge strane, analizom signala otkrivamo prirodu fizičkih pojava koje signali opisuju. To je proces u kojem se ispituje i interpretira signal kako bi se iz njega izvukle informacije.

Rezultat obrade signala ne mora biti signal, već može da bude brojčani podatak, zaključak i slično. Zato kažemo da *sistemi za obradu signala* odgovaraju na jednu ili više pobuda generišući signale ili drugačije oblike odziva. Pravu definiciju pojma sistem je veoma teško dati zbog njegove sveobuhvatnosti, ali možemo reći da je sistem objekat čije karakteristike određuju njegovo ponašanje i interakciju sa okolinom, i koji može da se opiše jednoznačnom relacijom ulaz-izlaz. *Analiza sistema* je oblast nauke koja nastoji analitičkim i numeričkim metodama okarakterisati sisteme kako bismo razumjeli njihovo ponašanje,

odnosno kako bismo mogli odrediti kako će oni reagovati na različite pobude, dok se s*inteza sistema* bavi izgradnjom sistema sa željenim karakteristikama. Sistemi po svojoj prirodi mogu biti veoma raznoliki: biološki, ekosistemi, elektronski, računarski, ekonomski, itd... U gotovo svakom sistemu nailazimo na primjere obrade signala. Iako u fizičkoj prirodi signala i sistema u različitim oblastima postoje značajne razlike, osnovne teorijske postavke analize i obrade signala i teorija sistema su slične. Ova knjiga se fokusira na digitalnu obradu signala sagledanu sa inženjerskog stanovišta.

Glava 2

DISKRETNI SIGNALI

U Uvodu smo napravili razliku između kontinualnih i diskretnih signala i rekli da je diskretni signal definisan samo za diskretne vrijednosti nezavisne promjenljive *n*, koju, radi jasnoće izlaganja, često nazivamo diskretnim vremenom. Diskretni signal označavamo sa $x(n)$ i analitički, u opštem obliku, predstavljamo kao funkciju diskretne promjenljive $n \in \mathbb{Z}$. Kao primjere diskretnih signala možemo navesti: diskretni eksponencijalni signal $x(n) = e^{-n}$, sinusni signal $x(n) = \sin \omega_0 n$, signal definisan po oblastima oblika $x(n) = 1,\ |n| \leq N_0 \ \wedge \ x(n) = 0,\ |n| > N_0,\ N_0 \in \mathbb{N}$, itd... Ako se drugačije ne naglasi, podrazumijeva se da je diskretni signal definisan za svako $n \in \mathbb{Z}$. Diskretni signal možemo zadati i eksplicitno, u vidu sekvence $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, pri čemu ulogu nezavisne promjenljive preuzima indeks *n*. Implicitno se signal može zadati rekurzivnim relacijama uz poznate početne vrijednosti. U ovoj glavi ćemo, nakon klasifikacije signala prema njihovim svojstvima, dati pregled elementarnih signala i njihovih međusobnih relacija, te navesti operacije koje se najčešće izvode nad signalima.

2.1 Klasifikacija diskretnih signala

Ovisno o tome kakva je priroda fizičkih pojava koje opisuju, diskretni signali imaju i određena svojstva, na osnovu kojih se vrši njihova klasifikacija. Signali mogu biti jednodimenzionalni ili višedimenzionalni; parni ili neparni; kauzalni, antikauzalni ili nekauzalni; te periodični ili neperiodični. Pored toga, podjela se može izvršiti i na signale energije i signale snage; determinističke i slučajne signale; te na realne i kompleksne signale, iako ova posljednja podjela ne oslikava neminovno prirodu signala.

2.1.1 Jednodimenzionalni i višedimenzionalni signali

Signale koji zavise samo od jedne nezavisne promjenljive nazivamo *jednodimenzionalni*, dok one signale koji zavise od više nezavisnih promjenljivih nazivamo *višedimenzionalni signali*. Na primjer, dvodimenzionalni diskretni eksponencijalni signal analitički zapisujemo u obliku $x(n,m)=e^{-(n+m)},\ n,m\in\mathbb{Z}$. Dvodimenzionalne signale možemo zapisati i u vidu matrica, a ako je dimenzionalnost signala veća od dva, koristimo višedimenzionalne forme podataka. Višedimenzionalne signale koji se mogu zapisati u obliku proizvoda više jednodimenzionalnih signala nazivamo *separabilnim signalima*.

2.1.2 Parni i neparni signali

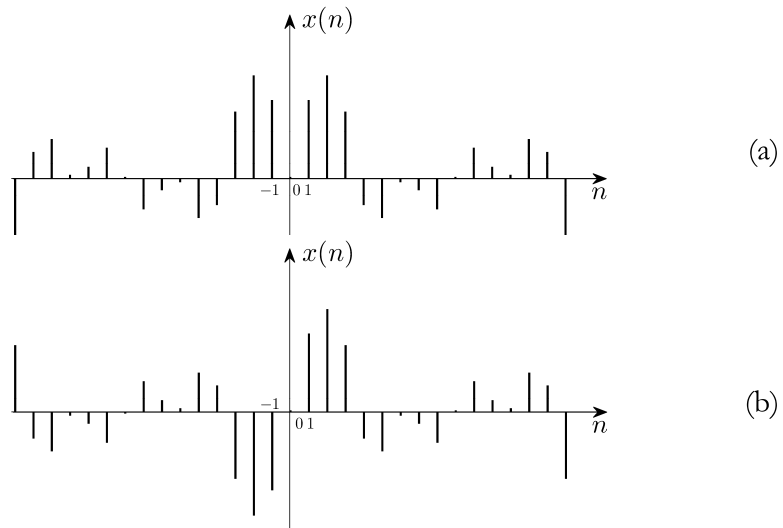
Za signal kažemo da je *paran* ako je osno simetričan u odnosu na ordinatu:

$$x(-n)=x(n). \tag{2.1}$$

Neparni signali su centralno simetrični u odnosu na koordinatni početak:

$$x(-n)=-x(n). \tag{2.2}$$

Primjeri parnih i neparnih signala dati su na Slici 2.1.



Slika 2.1 Parnost signala: (a) parni i (b) neparni signal.

Važno je uočiti da je signal proizvoljnog oblika moguće razložiti na sumu dva signala od kojih je jedan paran, a drugi neparan. Ako parni dio signala označimo sa $\mathscr{P}\{x(n)\}$, a neparni dio signala sa $\mathscr{N}\{x(n)\}$, signal proizvoljnog oblika možemo predstaviti kao zbir njegovog parnog i neparnog dijela:

$$x(n)=\mathscr{P}\{x(n)\}+\mathscr{N}\{x(n)\}. \tag{2.3}$$

Na osnovu osobina parnih i neparnih signala vrijedi da je:

$$x(-n)=\mathscr{P}\{x(-n)\}+\mathscr{N}\{x(-n)\}=\mathscr{P}\{x(n)\}-\mathscr{N}\{x(n)\}, \tag{2.4}$$

te se parni i neparni dio signala određuju sabiranjem, odnosno oduzimanjem (2.3) i (2.4):

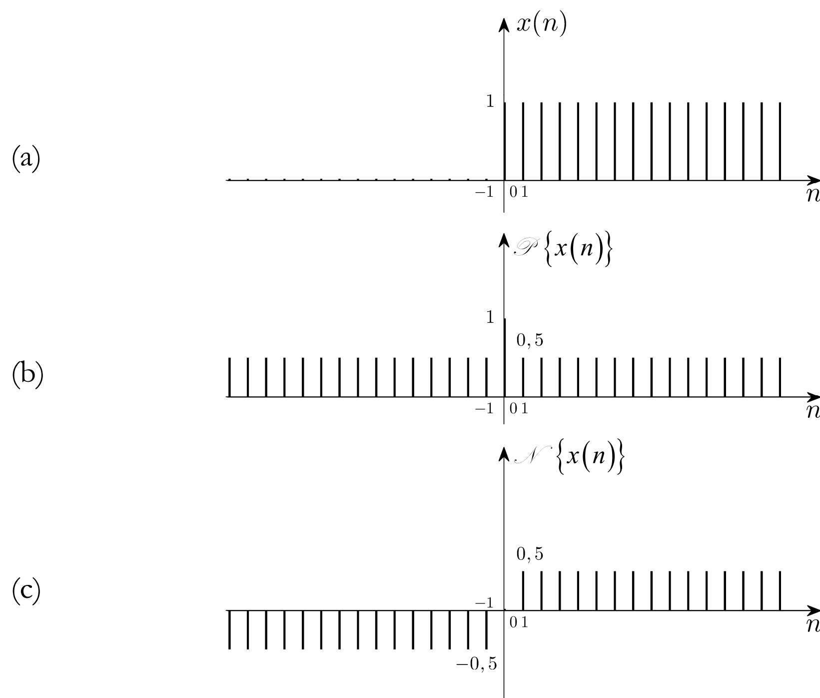
$$\mathscr{P}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\left[x(n)+x(-n)\right], \tag{2.5}$$

$$\mathscr{N}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\left[x(n)-x(-n)\right]. \tag{2.6}$$

(a)

(b)

(c)



Slika 2.2 Razlaganje signala na njegov parni i neparni dio: (a) originalni signal; (b) parni dio signala i (c) neparni dio signala.

Na Slici 2.2 je na primjeru signala:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

ilustrovan postupak razlaganja signala na njegov parni i neparni dio. Prema (2.5) i (2.6), parni i neparni dijelovi signala su:

$$\mathscr{P}\{x(n)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n < 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{N}\{x(n)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -\frac{1}{2}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

2.1.3 Kauzalni i nekauzalni signali

Diskretni signal je *kauzalan* ako je $x(n) = 0,\ \forall n < 0$. Ako $x(n) \neq 0$ za neko $n < 0$ signal je *nekauzalan*, a ako je $x(n) = 0,\ \forall n > 0$ signal je *antikauzalan*. Pri tome smo sa $n = 0$ označili početni trenutak posmatranja neke pojave sa kojom je dati signal u nekoj relaciji. Primjeri nekauzalnog, kauzalnog i antikauzalnog signala su prikazani na Slici 2.3.

2.1.4 Periodični i neperiodični signali

Kažemo da je diskretni signal *periodičan* ako postoji pozitivna cjelobrojna vrijednost *N* takva da vrijedi da je:

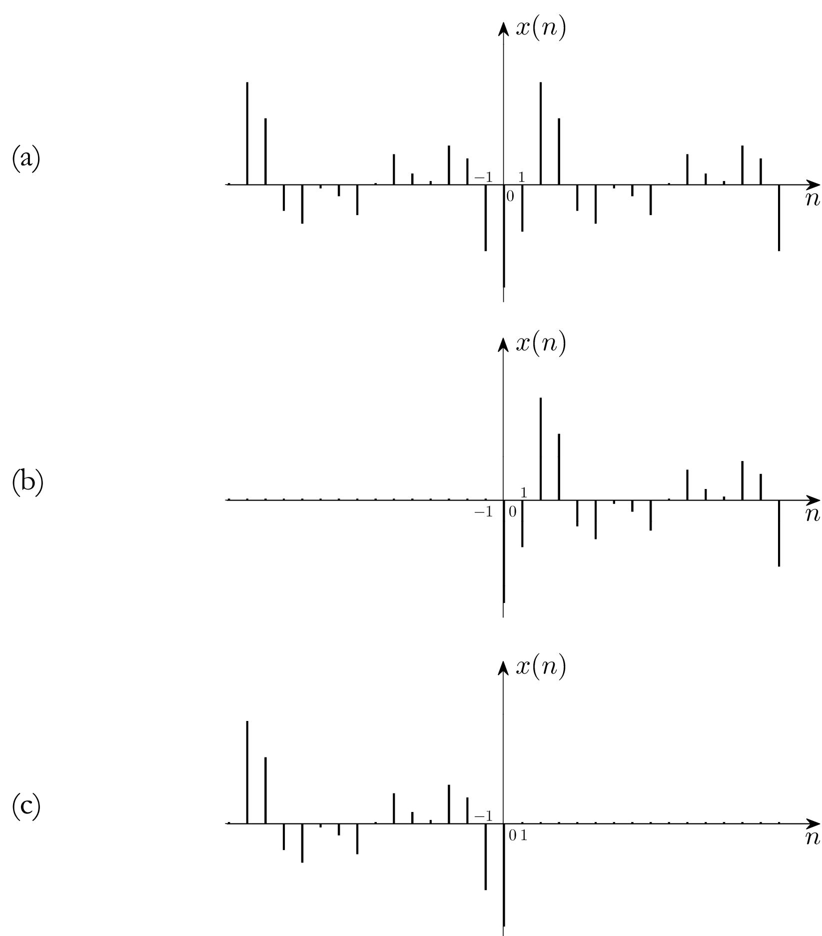
$$x(n) = x(n+N),\ \forall n. \tag{2.10}$$

Ako je diskretni signal periodičan sa periodom *N*, periodičan je i sa periodom $mN,\ m \in \mathbb{Z}$. Najmanja pozitivna vrijednost za *N* za koju je uslov periodičnosti ispunjen naziva se *fundamentalni period.* Primjer periodičnog i neperiodičnog signala dat je na Slici 2.4. Uobičajeno koristimo znak tilda (~) da bismo naglasili periodičnost signala, kao na Slici 2.4(a). Primijetimo da je fundamentalni period signala u obliku diskretne konstante jednak jedinici.

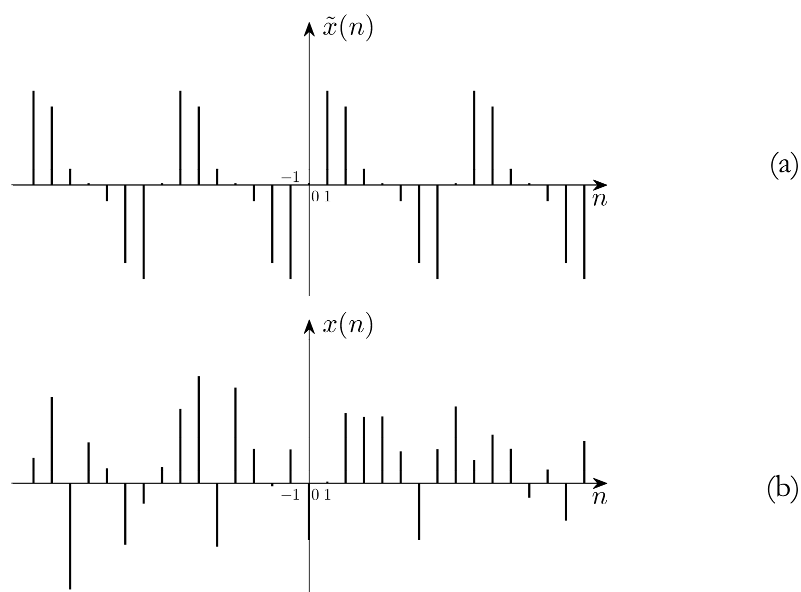
(a)

(b)

(c)



Slika 2.3 Kauzalnost signala: (a) nekauzalan signal; (b) kauzalan signal i (c) antikauzalan signal.



Slika 2.4 Periodičnost signala: (a) periodičan signal i (b) neperiodičan signal.

2.1.5 Signali energije i signali snage

Energija diskretnog signala na intervalu $[-N, N]$ je definisana sa:

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 , \tag{2.11}$$

dok je *ukupna energija* diskretnog signala data sa:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 . \tag{2.12}$$

Diskretne signale čija je ukupna energija konačna nazivamo *energetskim signalima*.

Kod signala sa beskonačno velikom ukupnom energijom posmatramo *srednju snagu* signala, koju definišemo sa:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 . \tag{2.13}$$

Srednja snaga je kod energetskih signala jednaka nuli, jer je $\lim_{N\to\infty} E_N$ konačno:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0 . \qquad (2.14)$$

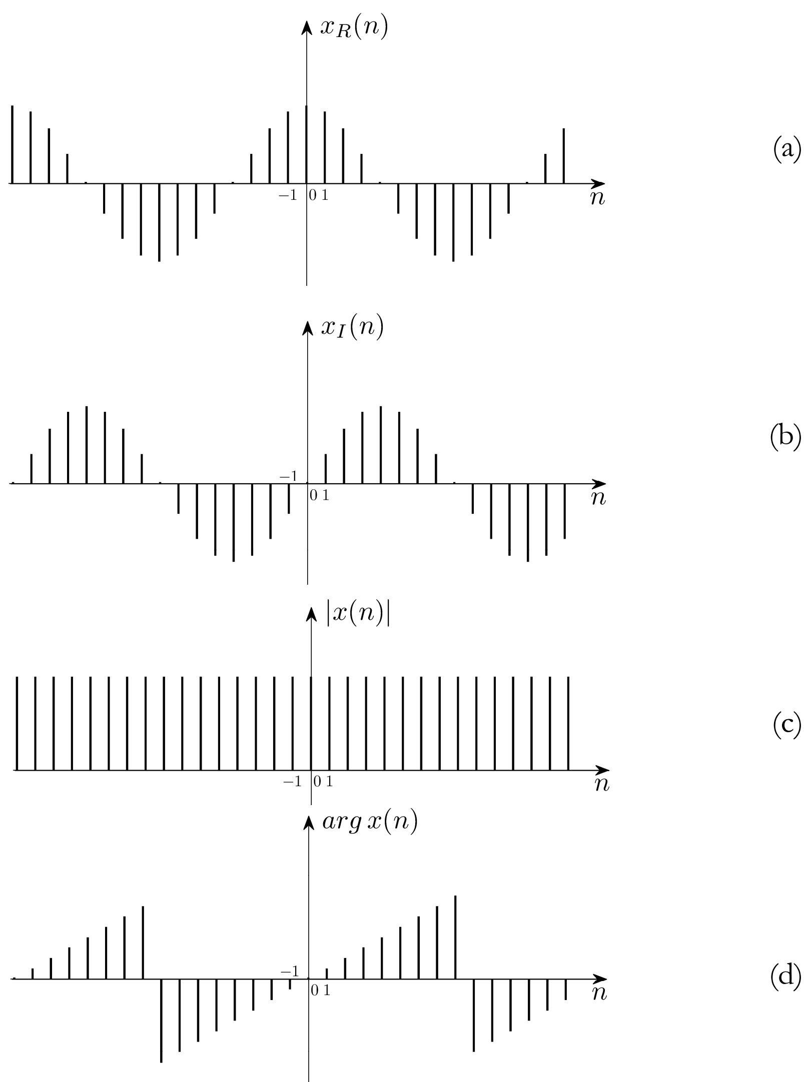
Ako signal ima beskonačno veliku ukupnu energiju $E_x = \lim_{N\to\infty} E_N \to \infty$, njegova srednja snaga može biti konačna ili beskonačna. Signale sa beskonačno velikom energijom i konačnom srednjom snagom, različitom od nule, nazivamo *signalima snage*. Većina diskretnih periodičnih signala su signali snage, jer imaju beskonačnu energiju, ali im je srednja snaga konačna.

2.1.6 Deterministički i slučajni signali

Signale čije su vrijednosti uvijek iste za iste vrijednosti nezavisne promjenljive nazivamo *determinističkim signalima*. Determinističke signale možemo zapisati koristeći matematičke relacije ili sekvence brojeva. Ako vrijednosti signala u svakom vremenskom trenutku predstavljaju slučajnu promjenljivu, radi se o *stohastičkim* ili *slučajnim procesima*, čiju jednu realizaciju nazivamo *slučajnim signalom*.

2.1.7 Realni i kompleksni signali

Ako su elementi sekvence koja predstavlja diskretni signal realni brojevi, govorimo o *realnim diskretnim signalima*, a ako su ti elementi kompleksni brojevi, za signal kažemo da je *kompleksni diskretni signal*. Većinu fizičkih pojava opisujemo realnim signalima, ali neke pojave, kao na primjer strujanje vode, jačinu električnog polja i reflektovanje radarskih signala lakše opisujemo kompleksnim signalima, gdje intenzitet predstavljamo modulom, a smjer argumentom kompleksnog signala. Kompleksni signali mogu nastati i vještačkim kombinovanjem realnih signala, kao što su tzv. analitički signali, koji se koriste u telekomunikacijama, ili kao rezultat matematičkih operacija, u kom slučaju ne moraju da imaju bilo kakvo fizičko značenje. Grafički se kompleksni



Slika 2.5 Predstavljanje kompleksnih signala: (a) realni dio; (b) imaginarni dio; (c) modul i (d) argument diskretnog kompleksnog signala.

signali realne nezavisne promjenljive predstavljaju svojim realnim i imaginarnim dijelom, ili modulom i argumentom, kao na Slici 2.5. Nezavisna promjenljiva kod diskretnih signala takođe može biti realna ili kompleksna, ali ćemo se mi zadržati na razmatranju signala čija je nezavisna promjenljiva realna.

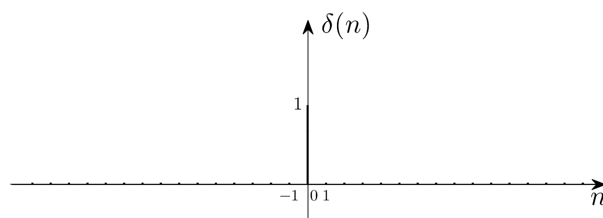
2.2 Elementarni signali

Analiza i obrada složenih signala se pojednostavljuje svođenjem tog problema na analizu i obradu elementarnih signala, među kojima su najvažniji jedinični impuls i jedinična odskočna sekvenca. Osim ova dva signala, pravougaoni i trougaoni impulsi, te kompleksni eksponencijalni i sinusni signali, igraju važnu ulogu u digitalnoj obradi signala.

2.2.1 Jedinični impuls

Jedinični impuls, *Kronekerova delta*, ili jednostavno *delta sekvenca*, je signal definisan sa:

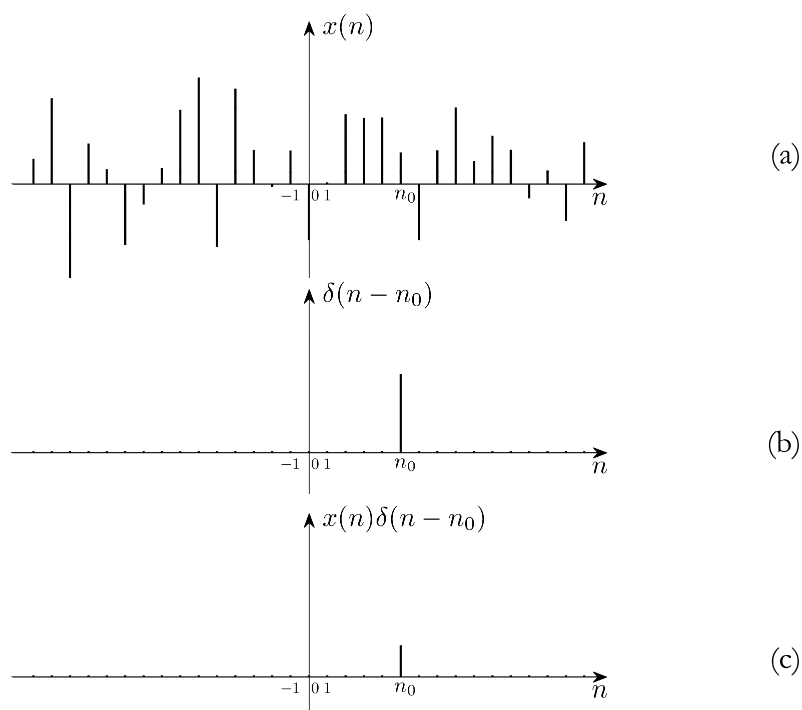
$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases} \tag{2.15}$$



Slika 2.6 Jedinični impuls.

Radi se o najjednostavnijem obliku diskretnog signala preko kojega se, kako ćemo kasnije vidjeti, mogu predstaviti diskretni signali proizvoljnog oblika. Jedinični impuls je prikazan na Slici 2.6.

Vrijednost jedinične impulsne sekvence je jednaka nuli za sve vrijednosti diskretnog vremena, osim za $n=0$. Jedinični impuls, $\delta(n-n_0)$, koji je pomjeren



Slika 2.7 Svojstvo odabiranja jediničnog impulsa: (a) diskretni signal proizvoljnog oblika; (b) pomjeren jedinični impuls i (c) proizvod posmatranog signala i pomjerenog jediničnog impulsa.

u vremenu za n_0 diskretnih vremenskih jedinica u odnosu na sekvencu $\delta(n)$, jednak je nuli svuda osim za $n=n_0$. Stoga se množenjem signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa transliranim jediničnim impulsom, $\delta(n-n_0)$, dobija signal koji je takođe jednak nuli za svako *n*, osim za $n=n_0$. Za $n=n_0$ rezultujuća sekvenca ima vrijednost $x(n_0)$. Stoga kažemo da jedinični impuls ima *svojstvo odabiranja* vrijednosti signala u tačkama djelovanja jediničnog impulsa. Svojstvo odabiranja ilustrovano je na Slici 2.7.

Jedinični impuls je paran diskretni signal:

$$\delta(n)=\delta(-n). \tag{2.16}$$

Zbog svojstva odabiranja, za signal $x(n)$ proizvoljnog oblika vrijedi da je:

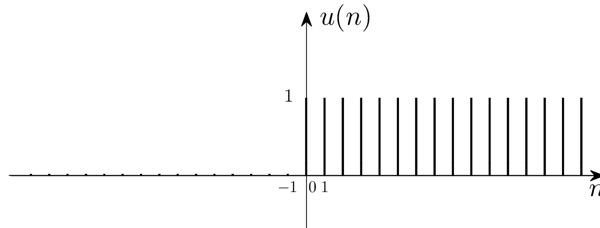
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)=x(n_0). \tag{2.17}$$

2.2.2 Jedinična odskočna sekvenca

Jedinična odskočna sekvenca je definisana sa:

$$u(n)=\begin{cases}0, & n<0,\\ 1, & n\geq 0,\end{cases} \tag{2.18}$$

i grafički prikazana na Slici 2.8. Drugi naziv za jediničnu odskočnu sekvencu je *Hevisajdova sekvenca.*

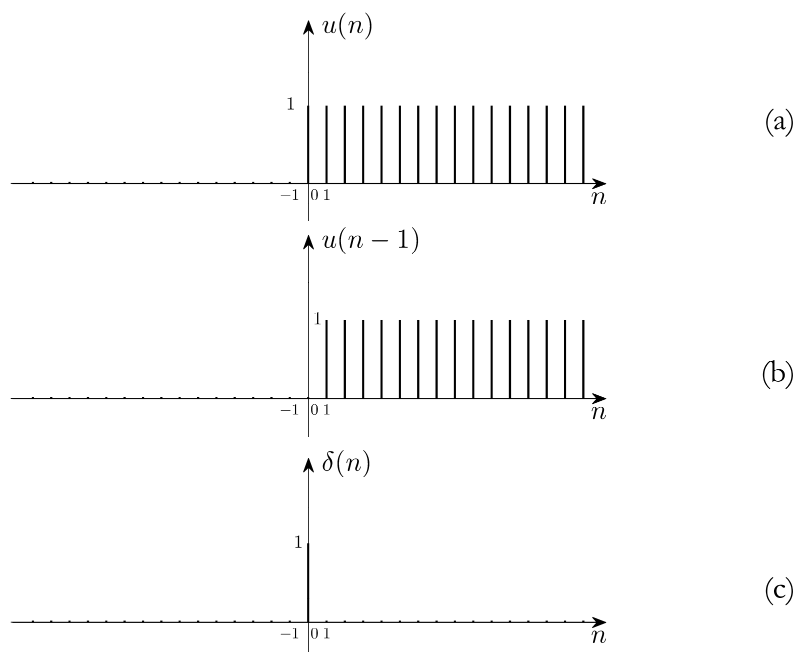


Slika 2.8 Jedinična odskočna sekvenca.

Veza između jedinične odskočne sekvence i jediničnog impulsa igra važnu ulogu u analizi signala i sistema. Jedinični impuls je prva diferencija jedinične odskočne sekvence:

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1), \tag{2.19}$$

što je, zapravo, razlika Hevisajdove i pomjerene Hevisajdove sekvence, kao što je prikazano na Slici 2.9. S druge strane, jediničnu odskočnu sekvencu možemo



Slika 2.9 Jedinični impuls kao prva diferencija Hevisajdove sekvence: (a) Hevisajdova sekvenca; (b) Hevisajdova sekvenca pomjerena za jedan udesno i (c) razlika (a) i (b) jednaka jediničnom impulsu.

dobiti sumiranjem elemenata jediničnog impulsa od $-\infty$ do *n*:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k), \tag{2.20}$$

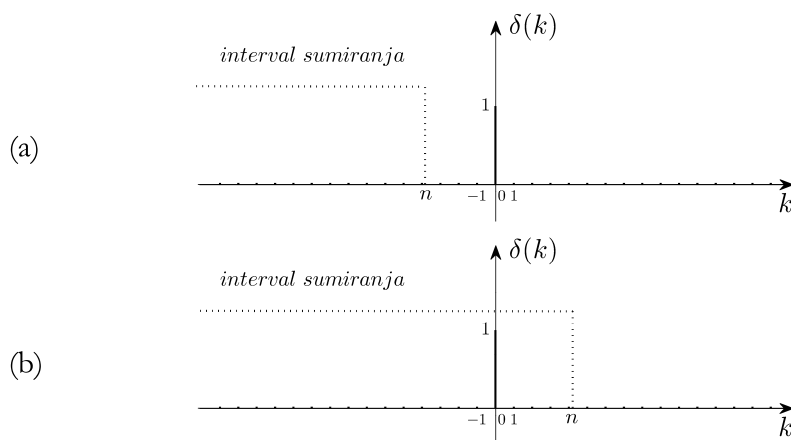
kao što je ilustrovano na Slici 2.10. Ako je gornja granica sume manja od nule, rezultat ovog sumiranja je jednak nuli (Slika 2.10.a), a za svako $n \geq 0$ rezultat sumiranja je jednak jedinici (Slika 2.10.b). Dakle, ovakvim sumiranjem dobijamo sekvencu koja je po definiciji jednaka jediničnoj odskočnoj sekvenci.

Drugi način predstave jedinične odskočne sekvence preko sume elemenata jedinične impulsne sekvence je dat sljedećom relacijom:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k). \tag{2.21}$$

(a)

(b)



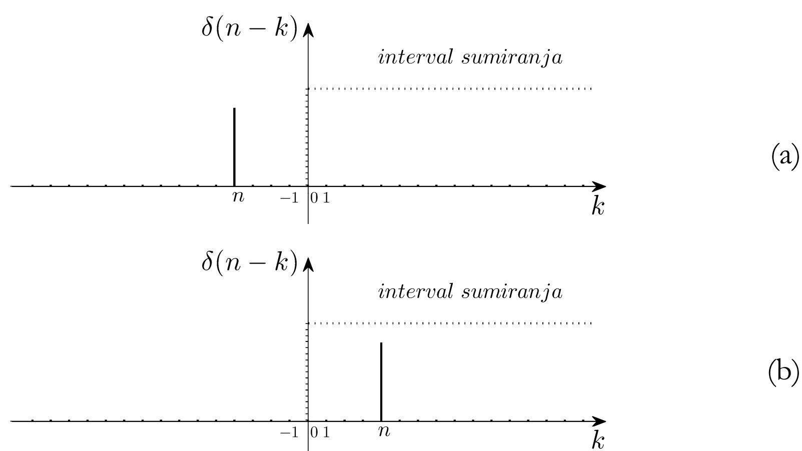
Slika 2.10 Generisanje elemenata Hevisajdove sekvence sumiranjem elemenata jediničnog impulsa: (a) za $n<0$ i (b) za $n \geq 0$.

Ako signal $\delta(-k)$ pomjerimo za *n* vremenskih jedinica i formiramo pomjeren jedinični impuls, $\delta(n-k)$, on će biti jednak nuli za svako *k*, osim za $k=n$. Ako je $n<0$ sumiranjem po *k* od nula do beskonačnosti ne obuhvatamo element u $k=n$ koji je jedini različit od nule, te je i rezultujuća sekvenca jednaka nuli za svako $n<0$. Za bilo koje $n \geq 0$, samo jedan element sume, onaj za $k=n$, je različit od nule i jednak jedinici, te je i rezultat sume jednak jedinici za svako $n \geq 0$. Na taj način generišemo sekvencu koja je po definiciji jednaka jediničnoj odskočnoj sekvenci. Ovaj postupak je ilustrovan na Slici 2.11.

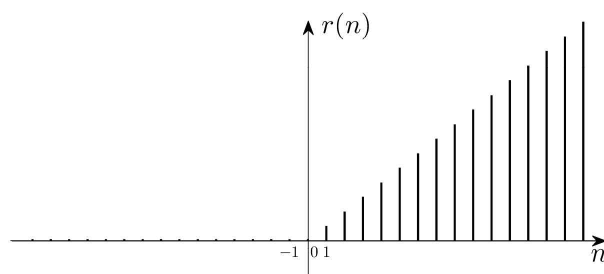
2.2.3 Sekvenca nagiba

Kauzalna s*ekvenca nagiba*, prikazana na Slici 2.12, definisana je na sljedeći način:

$$r(n)=\begin{cases} 0, & n<0, \\ n, & n \geq 0. \end{cases} \tag{2.22}$$



Slika 2.11 Generisanje elemenata Hevisajdove sekvence sumiranjem elemenata pomjerenog jediničnog impulsa: (a) za $n < 0$ i (b) za $n \geq 0$.

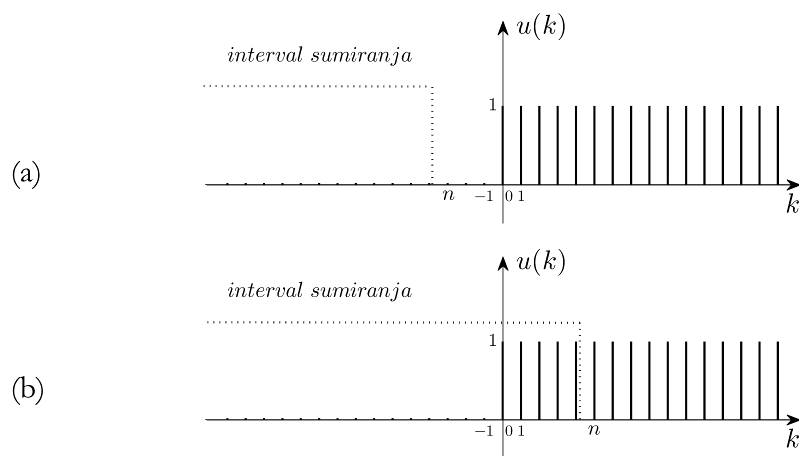


Slika 2.12 Sekvenca nagiba.

Sekvenca nagiba se može dobiti sumiranjem elemenata Hevisajdove sekvence:

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u(k), \tag{2.23}$$

na način ilustrovan na Slici 2.13.



Slika 2.13 Generisanje sekvence nagiba sumiranjem elemenata Hevisajdove sekvence: (a) za $n<0$ i (b) za $n\geq 0$.

2.2.4 Pravougaoni impuls

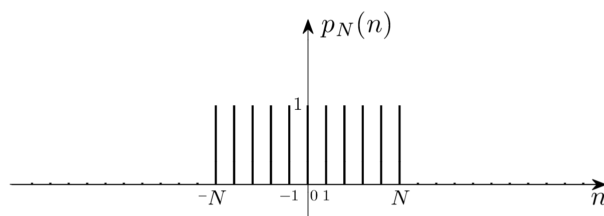
Diskretni *pravougaoni impuls*, prikazan na Slici 2.14, definisan je sa:

$$p_N(n)=\begin{cases}1, & |n|\leq N,\\ 0, & |n|>N.\end{cases} \tag{2.24}$$

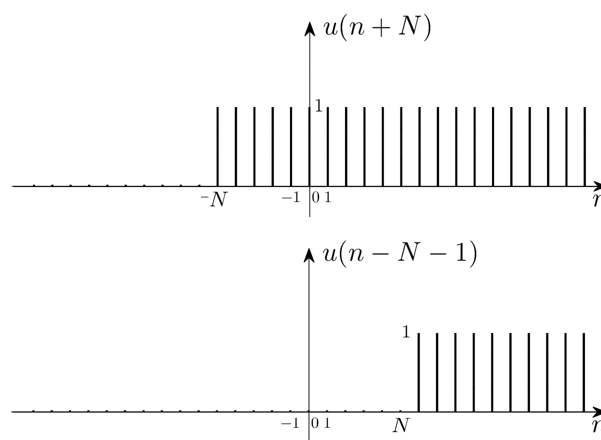
Vrijednosti pravougaonog impulsa se mogu generisati iz jedinične odskočne sekvence na sljedeći način:

$$p_N(n)=u(n+N)-u(n-N-1). \tag{2.25}$$

Na Slici 2.15 prikazane su pomjerene Hevisajdove sekvence čijim oduzimanjem se dobije diskretni pravougaoni impuls.



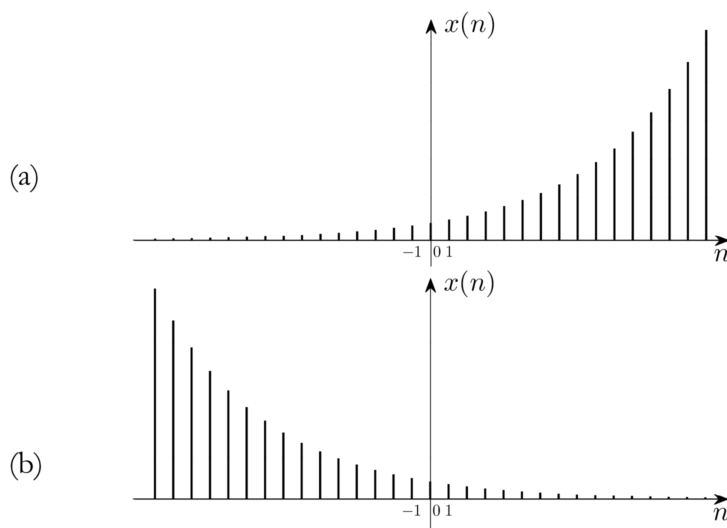
Slika 2.14 Diskretni pravougaoni impuls.



Slika 2.15 Pomjerene Hevisajdove sekvence čijim oduzimanjem se dobije diskretni pravougaoni impuls.

(a)

(b)



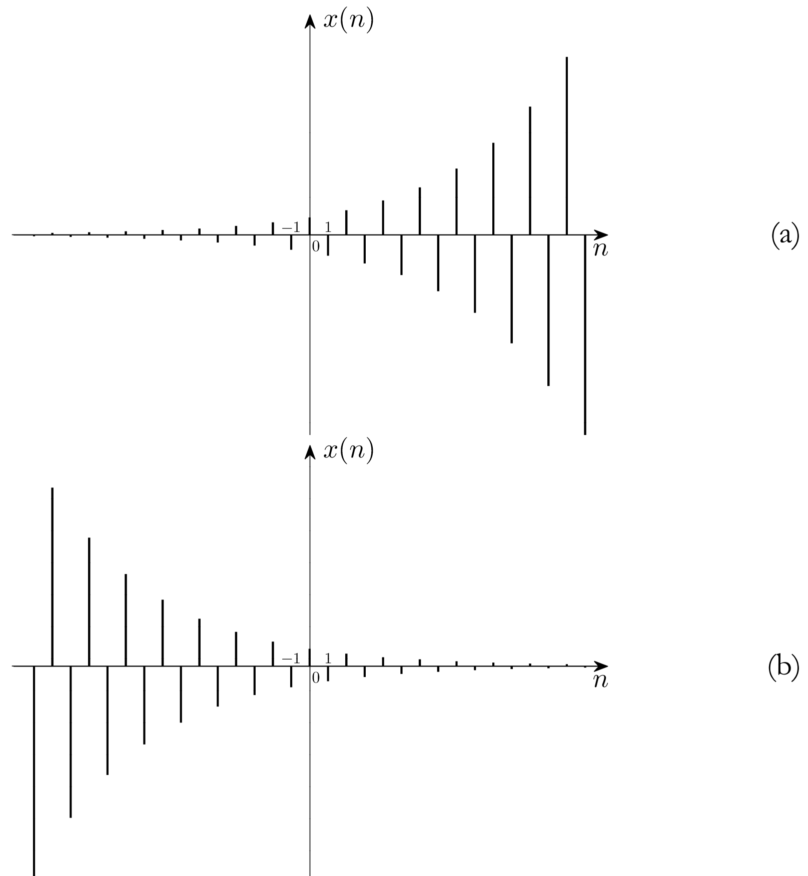
Slika 2.16 Realni eksponencijalni diskretni signali oblika $x(n)=C\alpha^n$, $C>0$: (a) $\alpha>1$ i (b) $0<\alpha<1$.

2.2.5 Kompleksni eksponencijalni signali

Kompleksni eksponencijalni signal se definiše sa:

$$x(n)=C\alpha^n. \tag{2.26}$$

U opštem slučaju C i α su kompleksne konstante. Sa porastom vrijednosti diskretne vremenske promjenljive, *n*, signal eksponencijalno raste ako je $|\alpha|>1$, dok za $|\alpha|<1$ signal eksponencijalno opada. Najjednostavniji oblici *realnih eksponencijalnih diskretnih signala* ($C,\alpha\in\mathbb{R}$) su prikazani na Slici 2.16. Za $\alpha>0$ vrijednosti svih elemenata signala su pozitivne, kao na Slici 2.16, dok za $\alpha<0$ elementi signala naizmjenično poprimaju pozitivne i negativne vrijednosti, kao što je prikazano na Slici 2.17. Za $\alpha=0$ dobija se jedinični impuls. Kada je $\alpha=1$ radi se o konstantnom signalu $x(n)=C$, dok su za $\alpha=-1$ elementi signala sa parnim indeksima $x(2n)=C$, a sa neparnim indeksima $x(2n+1)=-C$.



Slika 2.17 Realni eksponencijalni diskretni signali oblika $x(n) = C\alpha^n$, $C > 0$: (a) $\alpha < -1$ i (b) $-1 < \alpha < 0$.

Ako zapišemo kompleksne brojeve C i α sa: $C = |C|e^{j\theta}$ i $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$, kompleksni eksponencijalni signal $x(n) = C\alpha^n$ poprima sljedeći oblik:

$$x(n) = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta). \tag{2.27}$$

Za $|\alpha| = 1$, (2.27) postaje:

$$x(n) = Ce^{j\omega_0 n} = |C|e^{j(\omega_0 n + \theta)} = |C|\cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|\sin(\omega_0 n + \theta), \tag{2.28}$$

čiji su realni i imaginarni dio dati sa:

$$\operatorname{Re}\{x(n)\} = |C| \operatorname{Re}\left\{e^{j(\omega_0 n+\theta)}\right\} = |C| \cos(\omega_0 n + \theta), \tag{2.29}$$

$$\operatorname{Im}\{x(n)\} = |C| \operatorname{Im}\left\{e^{j(\omega_0 n+\theta)}\right\} = |C| \sin(\omega_0 n + \theta) = |C| \cos\left(\omega_0 n + \theta - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.30}$$

Kompleksne eksponencijalne signale kod kojih je $|\alpha| = 1$ zovemo *kompleksnim sinusnim signalima*. Radi lakšeg označavanja uvešćemo oznaku $|C| = A$. Budući da su sinusna i kosinusna matematička funkcija istog oblika, samo međusobno fazno pomjerene, opšti oblik *realnog diskretnog sinusnog signala* ćemo definisati sa:

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta). \tag{2.31}$$

Primjer realnog diskretnog sinusnog signala prikazan je na Slici 2.18.

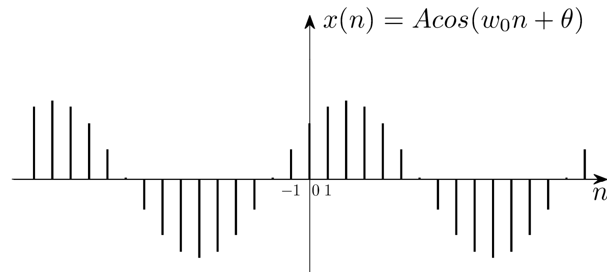
Realni sinusni signal se može izraziti preko kompleksnog sinusnog signala iste učestanosti i istog faznog stava na sljedeći način:

$$A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}\left(e^{j(\omega_0 n+\theta)} + e^{-j(\omega_0 n+\theta)}\right). \tag{2.32}$$

Kod kontinualnih sinusnih signala oblika $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)$ ugaona učestanost $\Omega_0 = 2\pi F_0$ se izražava u radijanima u sekundi $[\text{rad/s}]$, a sama frekvencija F_0 u hercima [Hz]. Kod diskretnih sinusnih signala *digitalna ugaona učestanost* $\omega_0 = 2\pi f_0$ se izražava u radijanima [rad], dok je *digitalna frekvencija* f_0 neimenovan broj. Početna faza θ se izražava u radijanima. Pojmove digitalna ugaona učestanost i digitalna frekvencija najlakše je objasniti posmatrajući diskretni sinusni signal koji nastaje odmjeravanjem kontinualnog sinusnog signala sa korakom odmjeravanja Δt, odnosno frekvencijom odmjeravanja $F_s = 1/\Delta t$:

$$\begin{aligned} \cos(\Omega_0 t + \theta)\big|_{t=n\Delta t} &= \cos(\Omega_0 n\Delta t + \theta) = \cos\left(2\pi \frac{F_0}{F_s} n + \theta\right) \\ &= \cos(2\pi f_0 n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta), \end{aligned} \tag{2.33}$$

gdje smo uveli oznake $f_0 = F_0/F_s$ i $\omega_0 = 2\pi f_0$.



Slika 2.18 Diskretni sinusni signal.

Slično kao što se pri promjeni analogne frekvencije F_0 mijenja brzina oscilacija kontinualnog sinusnog signala, tako se i pri promjeni digitalne frekvencije f_0 mijenja brzina oscilacija diskretnog sinusnog signala. Međutim, postoje značajne razlike u uticaju analogne i digitalne frekvencije na ponašanje sinusnih signala u kontinualnom i diskretnom domenu, respektivno. Pokazaćemo da, za razliku od kontinualnih sinusnih signala oblika $e^{j2\pi F_0 t}$, koji su periodični za bilo koju vrijednost analogne frekvencije, F_0, diskretni sinusni signali nisu periodični za bilo koju vrijednost digitalne frekvencije f_0. Osim toga, pokazaćemo da, za razliku od kontinualnih sinusnih signala, kod kojih većoj vrijednosti frekvencije F_0 odgovaraju brže oscilacije signala, diskretni sinusni signal nema kontinualan porast brzine oscilacija pri porastu digitalne frekvencije f_0.

Da bi diskretni sinusni signal $e^{j\omega_0 n}$ bio periodičan u domenu diskretnog vremena sa nekim periodom $N > 0$, mora da vrijedi:

$$e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n}, \qquad (2.34)$$

ili, ekvivalentno:

$$e^{j\omega_0 N} = 1. \qquad (2.35)$$

Ako je $\omega_0 = 0$, radi se o konstantnom signalu $x(n) = 1$, koji je periodičan za svaku vrijednost *N*. Ako je $\omega_0 \neq 0$, uslov periodičnosti kod diskretnih sinusnih signala se svodi na:

$$\omega_0 N = 2m\pi \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N},\ m \in \mathbb{Z}. \tag{2.36}$$

Iz (2.36) zaključujemo da diskretni sinusni signal $e^{j\omega_0 n}$ nije periodičan za proizvoljnu vrijednost ω_0, već samo ako je $\frac{\omega_0}{2\pi}$ racionalan broj. Na primjer, realni diskretni sinusni signal $\sin(\omega_0 n)$ je periodičan za $\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$, jer je $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12}$ racionalan broj i fundamentalni period ovog signala je $N = 12$. Za $\omega_0 = \frac{8\pi}{23} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4}{23} \Rightarrow N = 23$, pa je navedeni signal periodičan sa fundamentalnim periodom $N = 23$. Ako se digitalna učestanost promijeni na $\omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$, novodobijeni diskretni signal više nije periodičan. Primjeri ovih diskretnih signala su prikazani na Slici 2.19.

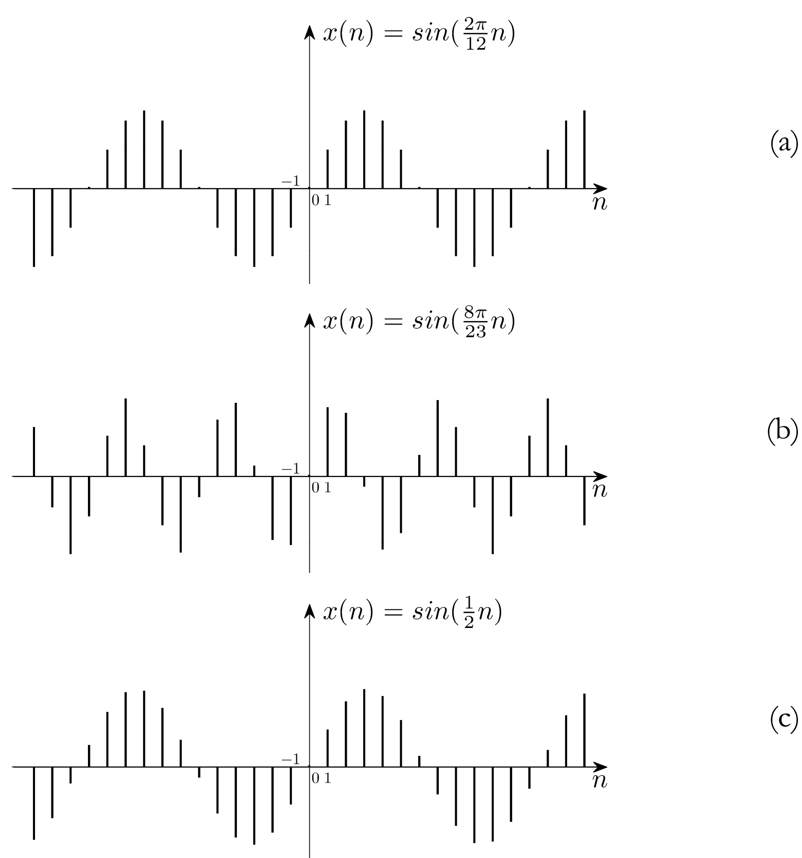
Već smo pomenuli da, za razliku od kontinualnih sinusnih signala kod kojih većoj vrijednosti učestanosti Ω_0 odgovaraju brže oscilacije signala, diskretni sinusni signali nemaju kontinualan porast brzine oscilacija pri porastu digitalne učestanosti ω_0. Sinusni signal $\cos(\omega_0 n)$ je, pored periodičnosti u vremenu, periodičan i u domenu učestanosti ω_0, sa osnovnim periodom 2π:

$$\cos\left((2k\pi + \omega_0)n\right) = \cos(\omega_0 n),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{2.37}$$

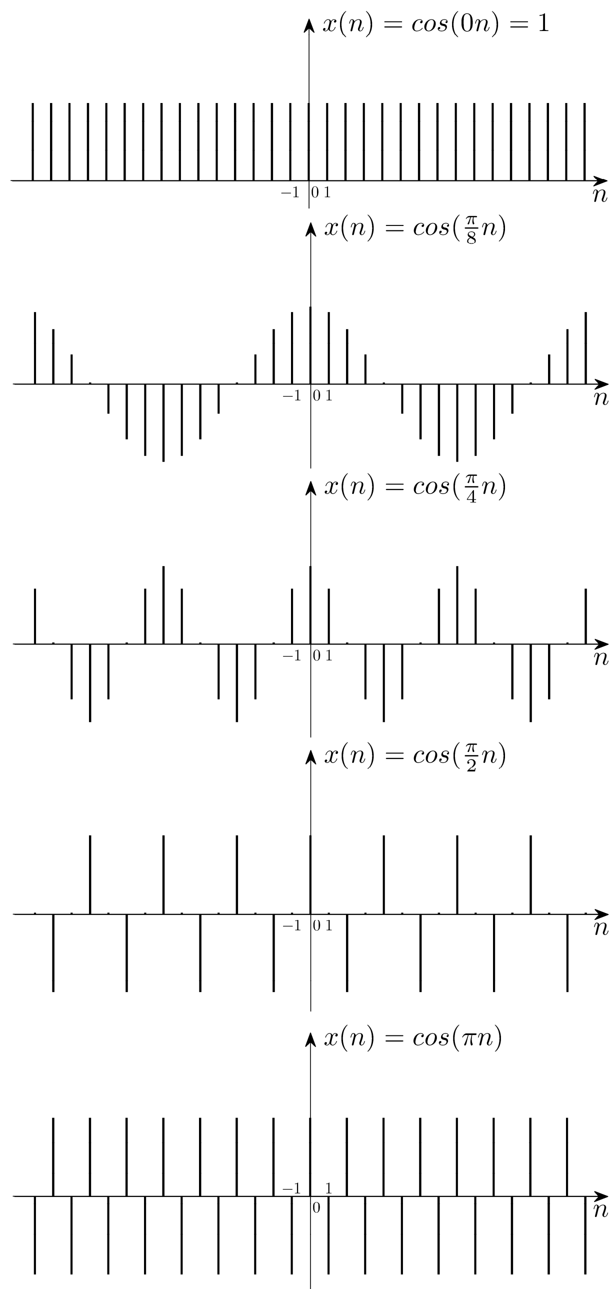
što znači da diskretni sinusni signali čije se učestanosti razlikuju za cjelobrojan umnožak 2π imaju jednaku brzinu oscilacija. Jednakom brzinom kao signal $\cos(\omega_0 n)$ osciluju i svi signali učestanosti $2k\pi - \omega_0,\ k \in \mathbb{Z}$, jer je:

$$\cos\left((2k\pi - \omega_0)n\right) = \cos(\omega_0 n),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.38}$$

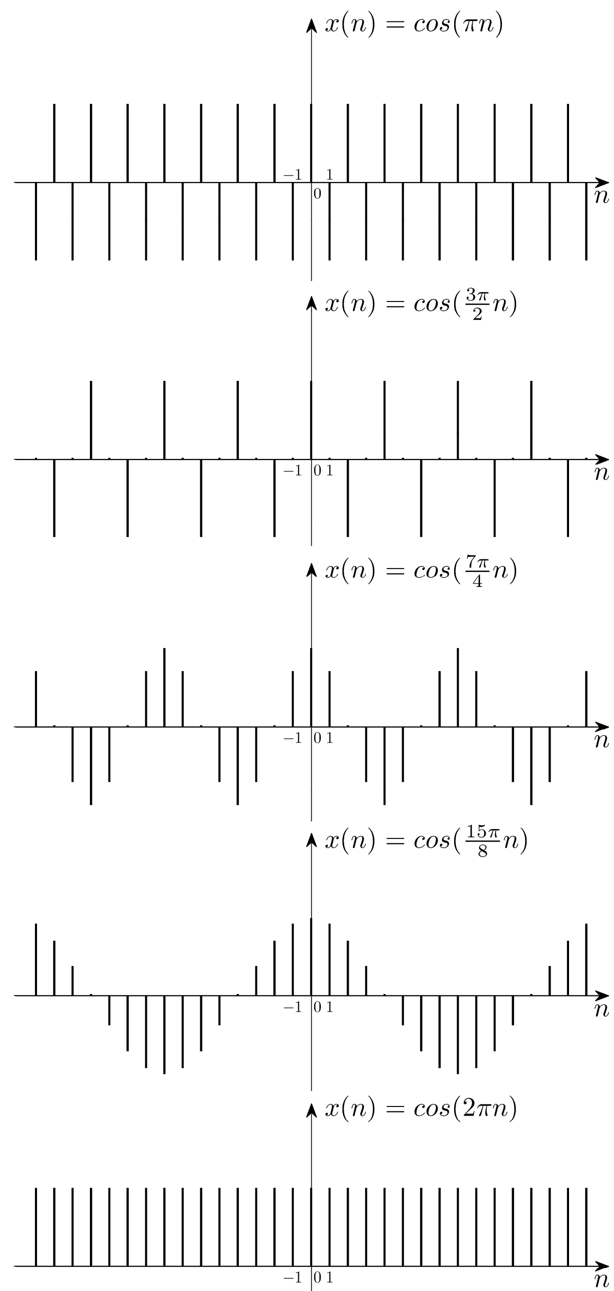
Znajući osobine navedene u (2.37–2.38), zaključujemo da se oscilacije diskretnih sinusnih signala ubrzavaju pri porastu učestanosti ω_0 od 0 do π, a zatim usporavaju pri porastu učestanosti od π do 2π, kao što prikazuju slike 2.20 i 2.21. Daljnjim porastom učestanosti ponavljaju se oblici signala.



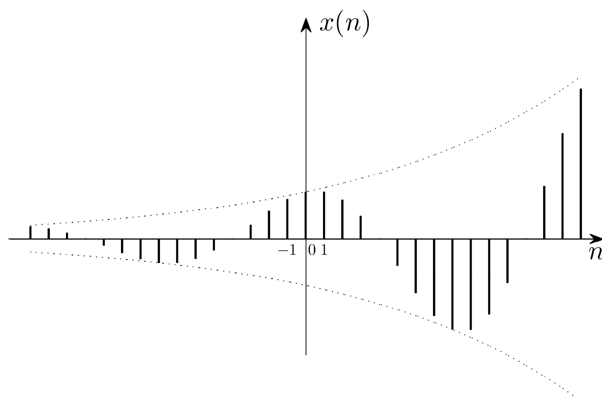
Slika 2.19 Primjeri periodičnih i neperiodičnih diskretnih sinusnih signala: (a) sinusni signal učestanosti $\omega_0 = 2\pi/12$ sa fundamentalnim periodom $N = 12$; (b) sinusni signal učestanosti $\omega_0 = 8\pi/23$ sa fundamentalnim periodom $N = 23$ i (c) neperiodičan sinusni signal učestanosti $\omega_0 = 1/2$.



Slika 2.20 Promjena brzine oscilacija sinusnih signala sa promjenom digitalne učestanosti u intervalu $[0, \pi]$.



Slika 2.21 Promjena brzine oscilacija sinusnih signala sa promjenom digitalne učestanosti u intervalu $[\pi, 2\pi]$.



Slika 2.22 Pseudosinusni signal sa rastućom anvelopom.

Iz opšteg oblika kompleksnog eksponencijalnog signala:

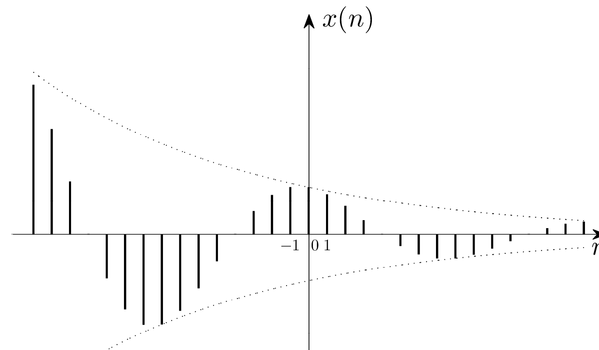
$$x(n)=|C||\alpha|^n\cos(\omega_0 n+\theta)+j|C||\alpha|^n\cos\left(\omega_0 n+\theta-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2.39)$$

za $|\alpha|=1$ se dobiju kompleksni eksponencijalni signali sa realnim i imaginarnim dijelom u obliku sinusnih signala, čija periodičnost ovisi o tome da li je ispunjen uslov (2.36). Za $|\alpha|\neq 1$ realni i imaginarni dijelovi kompleksnog eksponencijalnog signala su *pseudosinusni signali*. Za $|\alpha|>1$ anvelopa ovih signala je rastuća eksponencijalna funkcija, dok je anvelopa signala kod kojih je $|\alpha|<1$ opadajuća eksponencijalna funkcija. Oblici pseudosinusnih signala za $|\alpha|>1$ su prikazani na Slici 2.22, a za $|\alpha|<1$ na Slici 2.23. Tačkaste linije predstavljaju anvelope signala..

Neka je N_0 fundamentalni period diskretnog kompleksnog eksponencijalnog signala. *Fundamentalna digitalna ugaona učestanost* se definiše sa $\omega_0=2\pi/N_0$. Kod harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijalnih signala fundamentalne učestanosti su jednake cjelobrojnom umnošku jedne pozitivne učestanosti ω_0:

$$x_k(n)=C_k e^{jk\omega_0 n}, \quad k=\pm1,\pm2,\dots. \qquad (2.40)$$

Signali kod kojih su fundamentalne učestanosti harmonijski vezane nazivaju



Slika 2.23 Pseudosinusni signal sa opadajućom anvelopom.

se *harmonicima*. Nulti harmonik $x_0(n)=C_0$ je konstanta, dok je za svaku drugu vrijednost *k* harmonik $x_k(n)$ periodičan kompleksni eksponencijalni signal sa fundamentalnim periodom $\frac{2\pi}{|k|\omega_0}$, te je njegova fundamentalna učestanost $|k|\omega_0$. Svi harmonici $x_k(n)$ imaju zajednički period N_0.

Iz uslova periodičnosti diskretnih sinusnih signala (2.36) slijedi da digitalna učestanost signala mora biti jednaka $\omega_k = 2k\pi/N,\, k \in \mathbb{Z}$ da bi signal bio periodičan sa periodom *N*. Kako smo već ranije pokazali da se kompleksni sinusni signali $x(n)=Ae^{j(\omega n+\varphi)}$ učestanosti ω i $\omega+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$ ne mogu razlikovati, slijedi da postoji samo N različitih kompleksnih sinusnih signala, čije su učestanosti $\omega_k = 2k\pi/N$, $k=0,1...N-1$, a koji su periodični sa periodom N. Na Slici 2.24 prikazani su realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala iste amplitude i nultog faznog stava, za učestanosti $\omega_k = 2k\pi/8,\ k=0,1,2,3$. Realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala nultog faznog stava, čije su učestanosti $\omega_k = 2k\pi/N$ i $\omega_{N-k} = 2(N-k)\pi/N$ su jednaki, dok su imaginarni dijelovi tih signala jednaki po apsolutnoj vrijednosti, ali suprotnog znaka, jer vrijedi da je:

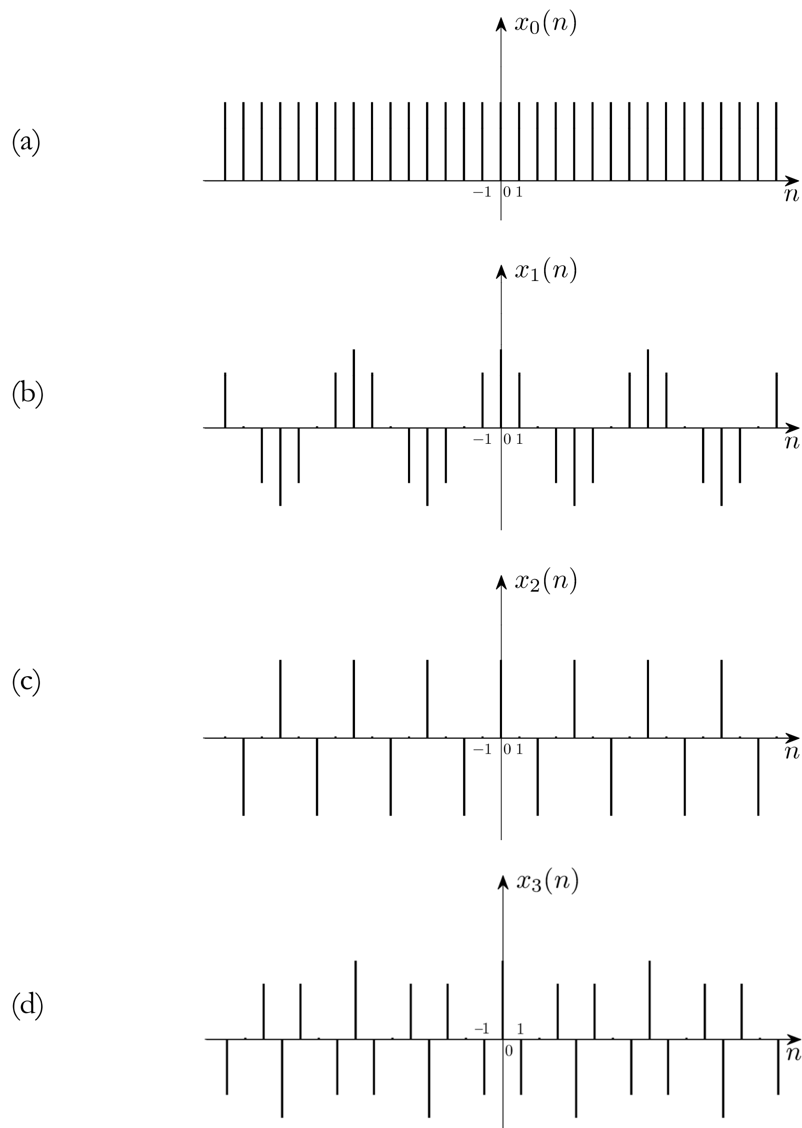
$$e^{j(N-k)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j\left(2\pi n - k\frac{2\pi}{N}n\right)} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{2.41}$$

(a)

(b)

(c)

(d)



Slika 2.24 Realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala $x(n) = e^{jk\frac{2\pi}{8}n}$ periodičnih sa periodom $N = 8$, za: (a) $k = 0$; (b) $k = 1$; (c) $k = 2$ i (d) $k = 3$.

2.3 Operacije nad signalima

Operacije nad signalima možemo podijeliti u dvije grupe. Prvu grupu čine operacije koje se zasnivaju na transformacijama nezavisne promjenljive i tu ubrajamo vremensku inverziju, pomjeranje (translaciju) i skaliranje signala. Diskretni signali mogu se predstaviti sekvencama brojeva, tako da druga grupa operacija nad signalima zapravo predstavlja osnovne matematičke operacije nad sekvencama brojeva: sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje član po član. Posebno ćemo izdvojiti konvoluciju, najvažniju matematičku operaciju u analizi i obradi signala, koja u vremenskom domenu uspostavlja vezu između signala koji pobuđuje neki sistem i njegovog odziva, i koju ćemo detaljno obrađivati u Glavi 4.

2.3.1 Transformacije nezavisne promjenljive

Vremenski invertovan signal $y(n)$ se dobije iz signala $x(n)$ *vremenskom inverzijom*, transformacijom koja mijenja smjer vremenske ose, tako da vrijedi da je:

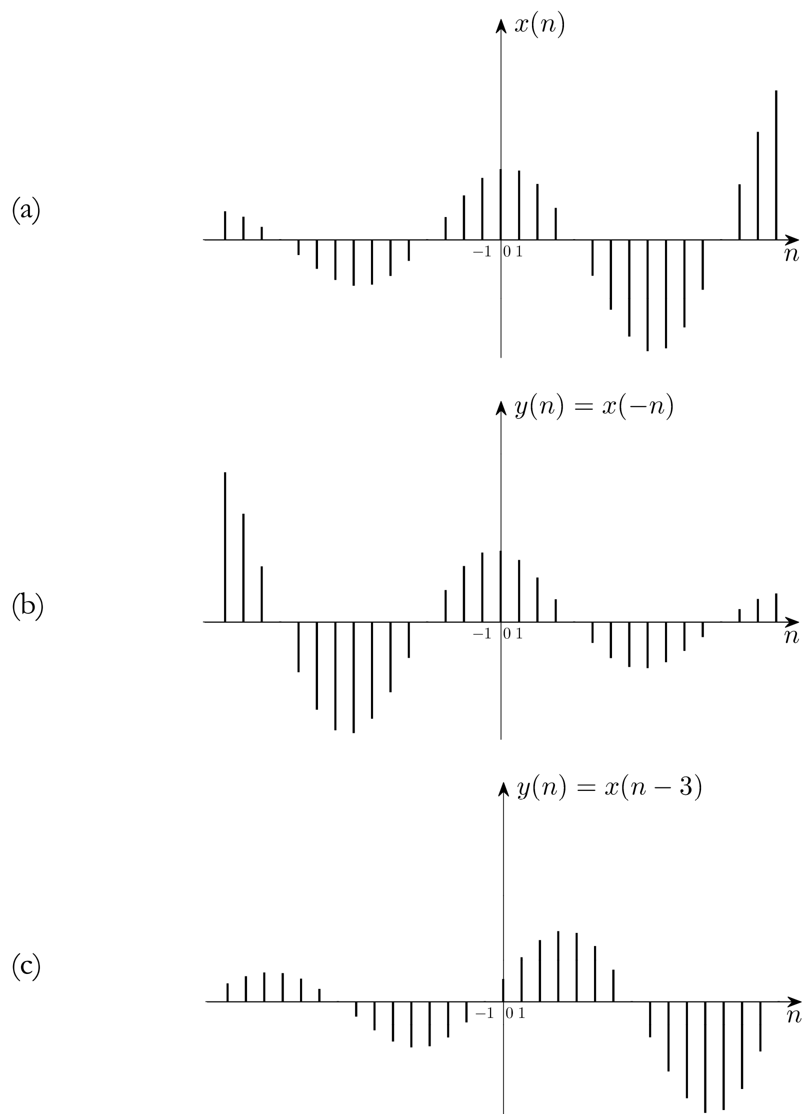
$$y(n)=x(-n),\ \forall n. \tag{2.42}$$

Na Slici 2.25(b) je dat primjer inverzije vremenske ose.

Translacija signala za neki iznos n_0 odgovara pomaku signala po vremenskoj osi za taj iznos:

$$y(n)=x(n-n_0),\ \forall n. \tag{2.43}$$

Tako dobijen *translirani signal* $y(n)$ može da kasni ili da prednjači u odnosu na signal $x(n)$. Ako je $n_0>0$, signal $y(n)$ kasni za signalom $x(n)$ za n_0 vremenskih jedinica. Tada prvo pristižu elementi signala $x(n)$, a zatim elementi signala $y(n)$. Na primjer, za $n_0=3$, element koji se u signalu $x(n)$ pojavio u trenutku $n=0$, u signalu $y(n)$ se pojavljuje sa tri vremenske jedinice



Slika 2.25 Inverzija vremenske ose i translacija signala: (a) originalni signal; (b) vremenski invertovan signal i (c) translirani signal.

zakašnjenja, tako da je, na primjer, $y(3)=x(0)$. Za $n_0<0$ prvo pristižu elementi signala $y(n)$, pa kažemo da signal $y(n)$ prednjači u odnosu na signal $x(n)$. Tako, na primjer za $n_0=-3$, element koji se u signalu $x(n)$ pojavljuje u trenutku $n=3$, u signalu $y(n)$ se pojavljuje tri vremenske jedinice ranije, te je $y(0)=x(3)$. Translacija signala za $n_0>0$ je ilustrovana na Slici 2.25(c).

Linearnu promjenu skale nezavisne promjenljive nazivamo *skaliranje signala*. *Skalirani signal* se analitički zapisuje sa:

$$y(n)=x(an),\ \forall n,\ a\in\mathbb{R}. \tag{2.44}$$

Pri $a>1$ signal se sužava, a za $a<1$ proširuje. Ilustracija skaliranja data je na Slici 2.26. Prilikom skaliranja signala necjelobrojnim faktorom a potrebno je izvršiti interpolaciju originalnog signala kako bi se odredile njegove vrijednosti za necjelobrojne vrijednosti vremenske promjenljive.

2.3.2 Osnovne matematičke operacije nad signalima

Sabiranje i *oduzimanje signala* $x_1(n)$ i $x_2(n)$ se definišu sa:

$$y(n)=x_1(n)\pm x_2(n),\ \forall n, \tag{2.45}$$

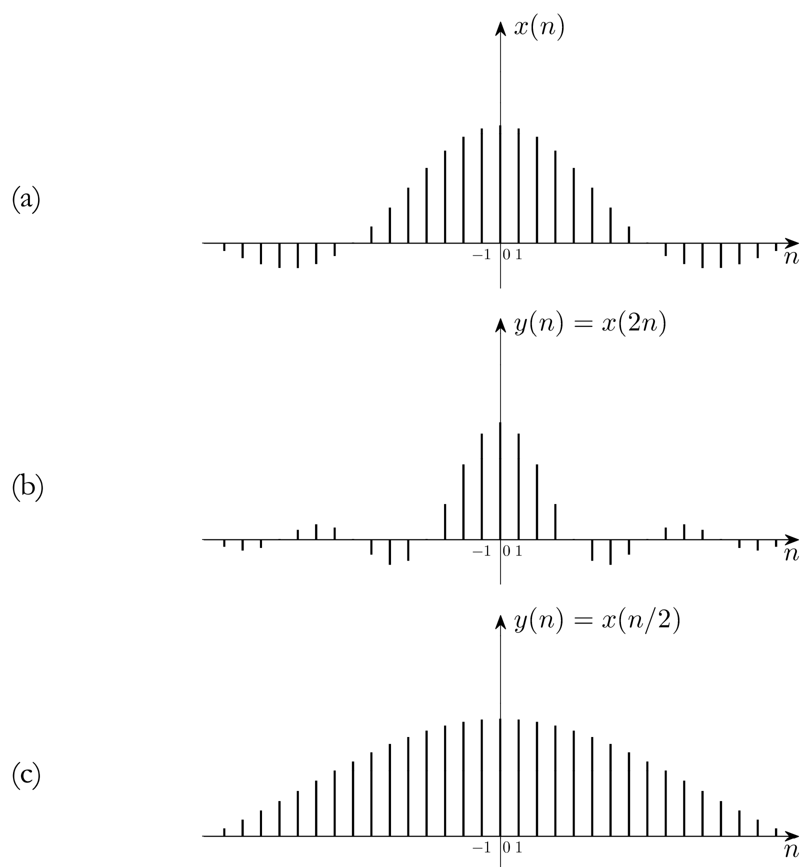
dok je množenje signala član po član dato sa:

$$y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n),\ \forall n, \tag{2.46}$$

slično kao i dijeljenje signala član po član:

$$y(n)=\frac{x_1(n)}{x_2(n)},\ \forall n. \tag{2.47}$$

koje je od manjeg značaja u obradi signala.



Slika 2.26 Skaliranje signala: (a) originalni signal; (b) signal skaliran sa faktorom $a = 2$ i (c) signal skaliran sa faktorom $a = \frac{1}{2}$.

Glava 3

DISKRETNI SISTEMI

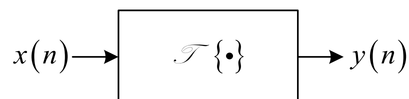
U obradi signala, *sistem* je bilo koji fizički entitet ili algoritam koji na neki način obrađuje signale. Sistem je sastavljen od međusobno povezanih elemenata koji djeluju prema skupu pravila izvršavajući tako zajedničku funkciju. Signal koji se obrađuje nazivamo ulaznim signalom ili pobudom sistema, dok rezultat obrade označavamo kao izlazni signal, ili odziv sistema. *Diskretni sistem* obrađuje diskretne signale i rezultat te obrade je diskretni signal, simbolički zapisan sa:

$$y(n) = \mathcal{T}\{x(n)\}, \tag{3.1}$$

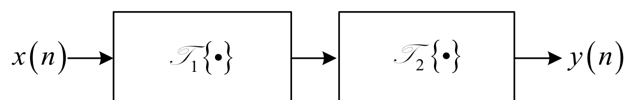
ili sa:

$$x(n) \rightarrow y(n), \tag{3.2}$$

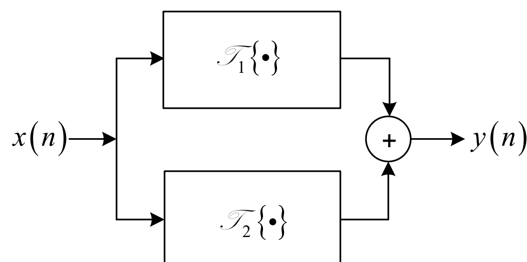
gdje je sa $x(n)$ označen ulazni, a sa $y(n)$ izlazni signal. Nakon uvođenja osnovnih pojmova vezanih za diskretne sisteme, u ovoj glavi ćemo razmotriti njihove najvažnije osobine i, na osnovu toga, izvršiti klasifikaciju diskretnih sistema.



Slika 3.1 Blok šema diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.



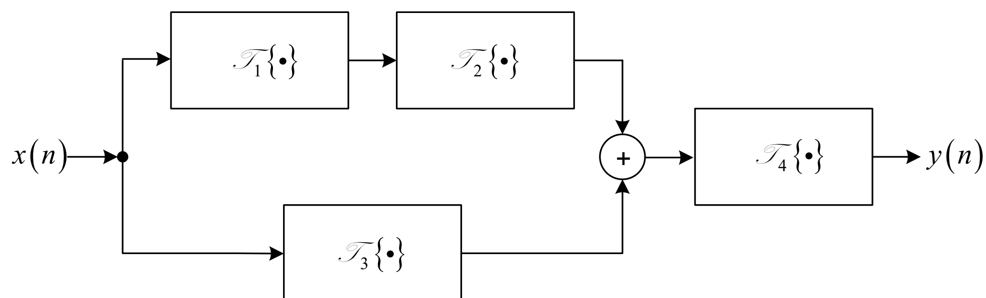
Slika 3.2 Kaskadna veza sistema.



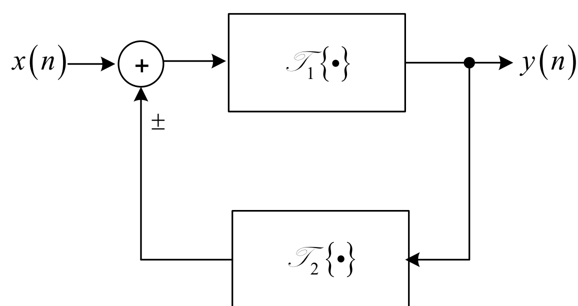
Slika 3.3 Paralelna veza sistema.

Iako sistemi mogu da imaju više ulaznih signala i više izlaza, u okviru ove knjige ćemo uglavnom posmatrati sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom. Blok šema diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazana je na Slici 3.1.

Pri razmatranju složenih sistema poželjno je zadatke pojednostaviti svođenjem složenih sistema na vezu dva ili više jednostavnijih sistema, koja može biti *serijska* (*kaskadna*), *paralelna*, sa *povratnom vezom* ili *kombinovana*. Na Slici 3.2 prikazana je kaskadna veza dva sistema, dok je paralelna veza data na Slici 3.3. Primjer kombinovanog vezivanja sistema dat je na Slici 3.4. Na ovim slikama



Slika 3.4 Primjer kombinovane veze sistema.



Slika 3.5 Sistem sa povratnom vezom.

simbolom ⊕ je označeno sabiranje signala. Posebno važan tip povezivanja sistema predstavljaju sistemi sa povratnom vezom. Kod sistema sa povratnom vezom, dio izlaznog signala se preko povratne grane vraća na ulaz sistema na sljedeći način: izlaz sistema u direktnoj grani, koji je istovremeno i izlaz kompletnog sistema, veže se na ulaz sistema koji se nalazi u povratnoj grani. Nakon prolaska kroz sistem u povratnoj grani, tako modifikovani izlazni signal se preko sabirača vraća na ulaz sistema u direktnoj grani. Sistem sa povratnom vezom je blokovski prikazan na Slici 3.5. Povratna veza može biti pozitivna ili negativna, što se na šemi označava simbolom $\pm$ na liniji povratne veze.

3.1 Osobine diskretnih sistema

Razumijevanje osnovnih osobina diskretnih sistema olakšava analizu sistema i obradu signala. Sistemi mogu biti sa i bez memorije, kauzalni i nekauzalni, stabilni i nestabilni, invertibilni ili ne, itd... Od posebnog su značaja osobine linearnosti i vremenske invarijantnosti, te ćemo klasi sistema sa ovim osobinama, koju nazivamo *linearni, vremenski invarijantni* (eng. *Linear Time Invariant* - LTI) *sistemi*, posvetiti posebnu pažnju.

3.1.1 Sistemi sa i bez memorije

Sistem bez memorije je onaj sistem kod koga izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tom trenutku. Najjednostavniji primjer diskretnog sistema bez memorije je sistem koji prenosi signal bez promjena, opisan relacijom:

$$y(n) = x(n). \tag{3.3}$$

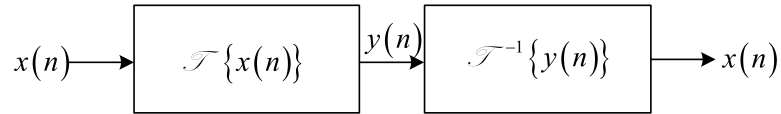
Kod *sistema sa memorijom* izlazni signal ne zavisi samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog i/ili izlaznog signala. Na primjer, izlazni signal sistema sa memorijom:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k), \tag{3.4}$$

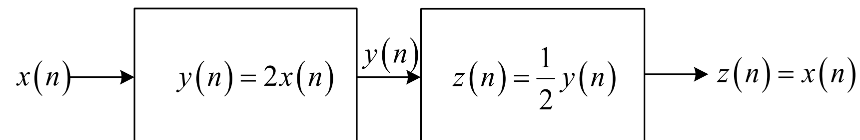
je jednak zbiru svih prethodnih vrijednosti ulaznog signala.

3.1.2 Invertibilnost i inverzni sistemi

Sistem je *invertibilan* ako poznavajući izlazni signal možemo jednoznačno odrediti ulazni signal. Da bi to bilo moguće neophodno je da različiti ulazni signali generišu različite izlazne signale. Ako se neki sistem kaskadno veže originalnom sistemu, kao na Slici 3.6, i ako je signal na njegovom izlazu jednak ulaznom signalu u originalni sistem, nazivamo ga *inverzni sistem*.



Slika 3.6 Koncept invertibilnosti: kaskadna veza originalnog i inverznog sistema.



Slika 3.7 Kaskadna veza originalnog sistema datog sa (3.5) i inverznog sistema datog sa (3.6).

Na primjer, sistem koji dva puta pojačava ulazni signal:

$$y(n)=2x(n), \tag{3.5}$$

je invertibilan i njegov inverzni sistem je dat sa:

$$z(n)=\frac{1}{2}y(n). \tag{3.6}$$

Kaskadna veza datog i njemu inverznog sistema prikazana je na Slici 3.7.

Sistem opisan sa:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k), \tag{3.7}$$

je takođe invertibilan, jer možemo odrediti njegov inverzni sistem:

$$z(n)=y(n)-y(n-1)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)-\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)=x(n). \tag{3.8}$$

Najjednostavniji primjer neinvertibilnog sistema je:

$$y(n)=\mathcal{T}\{x(n)\}=0. \tag{3.9}$$

Takođe, neinvertibilan je i sistem opisan sa:

$$y(n) = x^2(n), \tag{3.10}$$

jer nije moguće jednoznačno odrediti ulazni signal $x(n)$ na osnovu poznatog izlaznog signala $y(n)$.

3.1.3 Kauzalnost

Sistem je *kauzalan* ako izlazni signal u bilo kom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tekućem i prethodnim trenucima, što znači da kod kauzalnih sistema signal odziva ne postoji prije dovođenja pobudnog signala. Na primjer, sistem opisan sa

$$y(n) = x(n) - x(n - n_0), \ n_0 > 0 \tag{3.11}$$

je kauzalan, dok sistem:

$$y(n) = x(n) - x(n + n_0), \ n_0 > 0. \tag{3.12}$$

nije kauzalan. Pobuda u nekom trenutku n_2 kod kauzalnih sistema ne utiče na odziv sistema u nekom trenutku n_1, ukoliko je $n_2 > n_1$. Napomenimo da su svi sistemi bez memorije kauzalni.

Za određivanje odziva nekauzalnih sistema neophodno je poznavanje budućih vrijednosti ulaznog signala, tj. elemenata ulaznog signala sa većim indeksima od onog u kom se određuje odziv. Na primjer, vrijednost izlaznog signala sistema opisanog sa (3.12) za neku vrijednost nezavisne promjenljive n_1 je moguće odrediti tek nakon što je poznata vrijednost ulaznog signala u trenutku $n_1 + n_0$.

Kauzalni sistemi su veoma važni u aplikacijama kada se izlazni signal generiše u toku pristizanja elemenata ulaznog signala. Takvu vrstu obrade signala nazivamo *onlajn* (eng. *on-line*) obradom. Kod diskretnih sistema kauzalnost nije

od presudnog značaja, posebno kada se obrada signala vrši *oflajn* (eng. *off-line*), tj. nakon njegovog praćenja i bilježenja u nekom vremenskom periodu. U takvim sistemima se, za razliku od onlajn obrade, za generisanje izlaznog signala u nekom trenutku mogu koristiti i buduće vrijednosti ulaznog signala, pa su takvi sistemi nekauzalni.

3.1.4 Stabilnost

Za sistem kažemo da je *stabilan* ako ograničen pobudni signal rezultuje signalom odziva koji je takođe ograničen. U suprotnom, sistem je nestabilan. Ovakav oblik stabilnosti u obradi signala nazivamo *BIBO* (eng. *Bounded-Input, Bounded-Output* - BIBO) *stabilnost*.

3.1.5 Vremenska invarijantnost

Ako prilikom pomaka ulaznog signala u domenu diskretnog vremena, izlaz iz nekog sistema biva samo pomjeren za isti iznos nezavisne promjenljive, a vrijednosti njegovih elemenata ostaju nepromijenjene u odnosu na prvobitni odziv, kažemo da je sistem *vremenski invarijantan*. Pri tome pod izlaznim signalom podrazumijevamo odziv pri nultom početnom stanju. To znači da kod vremenski invarijantnih sistema oblik izlaznog signala ne zavisi od trenutka u kome se dovodi pobudni signal. Osobinu vremenske invarijantnosti diskretnih sistema zapisujemo na sljedeći način:

$$x(n) \to y(n) \Rightarrow x(n-n_0) \to y(n-n_0). \tag{3.13}$$

Primjer 3.1:

Provjeriti da li je diskretni sistem opisan sa $y(n) = Ax(n)$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Potražimo odzive na signal $x_1(n)$ i signal $x_2(n) = x_1(n-n_0)$, koji je vremenski pomjerena verzija signala $x_1(n)$. Odziv datog sistema na $x_1(n)$ je:

$$y_1(n) = Ax_1(n), \tag{3.14}$$

dok je odziv na $x_2(n)$ dat sa:

$$y_2(n) = Ax_2(n) = Ax_1(n-n_0). \tag{3.15}$$

Budući da je odziv $y_2(n)$ vremenski pomjeren u odnosu na odziv $y_1(n)$ za isti iznos diskretnih vremenskih jedinica n_0 koliko iznosi pomak između signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$:

$$y_2(n) = y_1(n-n_0), \tag{3.16}$$

uz zadržavanje istog oblika, sistem jeste vremenski invarijantan.

□

Primjer 3.2:

Provjeriti da li je diskretni sistem opisan sa $y(n) = nx(n)$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Za ulazni signal $x_1(n)$ odziv datog sistema ima oblik:

$$y_1(n) = nx_1(n). \tag{3.17}$$

Ako je ulazni signal pomjerena verzija prethodnog ulaznog signala, tj. $x_2(n) = x_1(n-n_0)$, odziv na $x_2(n)$ je dat sa:

$$y_2(n) = nx_2(n) = nx_1(n - n_0). \tag{3.18}$$

Budući da odziv na $x_2(n)$ nije vremenski pomjerena verzija odziva na $x_1(n)$:

$$y_2(n) \neq y_1(n - n_0) = (n - n_0)x_1(n - n_0), \tag{3.19}$$

već je došlo i do promjene oblika signala, sistem opisan sa $y(n) = nx(n)$ nije vremenski invarijantan.

□

3.1.6 Linearnost

Kažemo da je diskretni sistem *linearan* ako ima svojstvo *homogenosti* i svojstvo *aditivnosti*. Sistem ima svojstvo homogenosti ako vrijedi da je:

$$x(n) \to y(n) \Rightarrow ax(n) \to ay(n),\ \forall a \in \mathbb{C}, \tag{3.20}$$

a svojstvo aditivnosti ako vrijedi sljedeće:

$$x_1(n) \to y_1(n) \wedge x_2(n) \to y_2(n) \Rightarrow x_1(n) + x_2(n) \to y_1(n) + y_2(n). \tag{3.21}$$

Kod linearnih sistema odziv na težinsku sumu signala je jednak na isti način formiranoj težinskoj sumi pojedinačnih odziva na svaki od tih signala:

$$\begin{gathered} x_1(n) \to y_1(n) \wedge x_2(n) \to y_2(n) \Rightarrow \\ ax_1(n) + bx_2(n) \to ay_1(n) + by_2(n),\ \forall a, b \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

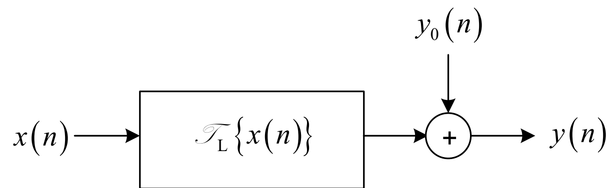
Linearnost sistema je šematski prikazana na Slici 3.8.

Na osnovu linearnosti, lako se dokaže *osobina superpozicije* linearnih diskretnih sistema. Za pobudu datu sa:

$$x(n) = \sum_k a_k x_k(n) \tag{3.23}$$



Slika 3.8 Linearan sistem.



Slika 3.9 Struktura inkrementalno linearnog sistema.

odziv je jednak:

$$y(n)=\sum_k a_k y_k(n), \tag{3.24}$$

pri čemu su $x_k(n)$, $k=1,2,\ldots$ pobudni signali, a $y_k(n)$, $k=1,2,\ldots$ njima odgovarajući signali odziva.

Treba naglasiti još jednu osobinu linearnih diskretnih sistema, koja je direktna posljedica linearnosti. Odziv na signal koji je jednak nuli, takođe je jednak nuli:

$$x(n)=0\cdot x_1(n)=0\rightarrow y(n)=0\cdot y_1(n)=0. \tag{3.25}$$

Ukoliko se odziv nekog sistema linearno mijenja pri linearnoj promjeni pobude, tj. ako je razlika odziva na bilo koja dva ulazna signala linearno zavisna od razlike tih ulaznih signala, nazivamo ga *inkrementalno linearnim sistemom*. Svaki linearan sistem je i inkrementalno linearan. Međutim, sistem ne mora biti linearan da bi bio inkrementalno linearan. Struktura inkrementalno linearnog sistema blokovski je prikazana na Slici 3.9, a u nastavku je dat primjer inkrementalno linearnog sistema.

Primjer 3.3:

Provjeriti da li je sistem opisan sa $y(n)=2x(n)+3n$ linearan i inkrementalno linearan.

Rješenje:

Odzivi datog sistema na dva pobudna signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ su:

$$y_1(n)=2x_1(n)+3n\,, \tag{3.26}$$

$$y_2(n)=2x_2(n)+3n\,, \tag{3.27}$$

dok je odziv datog sistema na linearnu kombinaciju signala $ax_1(n)+bx_2(n)$:

$$y(n)=2\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]+3n=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3n\,. \tag{3.28}$$

Kako je:

$$y(n)\neq ay_1(n)+by_2(n)=2ax_1(n)+2bx_2(n)+6n\,, \tag{3.29}$$

sistem nije linearan. Međutim, razlika odziva je linearno vezana sa razlikom pobudnih signala:

$$y_1(n)-y_2(n)=2x_1(n)+3n-\left[2x_2(n)+3n\right]=2\left[x_1(n)-x_2(n)\right], \tag{3.30}$$

te sistem jeste inkrementalno linearan.

□

3.2 Klasifikacija diskretnih sistema

Diskretne sisteme klasifikujemo na osnovu njihovih osobina. Najčešće se vrši podjela sistema na: statičke i dinamičke, kauzalne i nekauzalne, stabilne i nestabilne, sisteme sa raspodijeljenim i sisteme sa koncentrisanim parametrima, linearne i nelinearne, stacionarne i nestacionarne, te determinističke i stohastičke sisteme. Razmotrićemo posebno svaku od navedenih podjela.

3.2.1 Statički i dinamički sistemi

Na osnovu toga da li sistemi imaju sposobnost da memorišu podatke o signalima ili ne, izvršena je podjela sistema na statičke i dinamičke. *Statički sistemi* su sistemi bez memorije, kod njih izlaz u nekom trenutku zavisi jedino od pobude u tom istom trenutku. Statički sistemi opisuju se algebarskim jednačinama. Primjer statičkog diskretnog sistema je sistem opisan sa:

$$y(n)=2x(n). \tag{3.31}$$

Sistemi sa memorijom su *dinamički sistemi*. Razmatrajući osobine diskretnih sistema, već smo govorili o tome da izlaz ovakvih sistema u nekom trenutku ne zavisi samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog signala. Dinamički sistemi se opisuju jednačinama diferencija. Kao primjer dinamičkog diskretnog sistema možemo navesti sistem opisan jednačinom diferencija:

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-2)-\frac{1}{4}y(n-1). \tag{3.32}$$

Kod dinamičkih sistema kao što je ovaj, izlazni signal zavisi od vrijednosti ulaznog signala u trenutku posmatranja, ali i od vrijednosti ulaznog i izlaznog signala u prethodnim trenucima koje se čuvaju u memoriji do trenutka izračunavanja. U posmatranom primjeru, ako želimo npr. da izračunamo vrijednost izlaznog signala u trenutku $n_0=3$, pored vrijednosti ulaznog signala u tekućem trenutku, $x(3)$, treba nam i vrijednost ulaznog signala $x(1)$, kao i vrijednost izlaznog signala izračunata u prethodnom trenutku, $y(2)$.

3.2.2 Kauzalni i nekauzalni sistemi

Kada je riječ o dinamičkim sistema, oni mogu biti *kauzani* i *nekauzalni*. Samo sistemi koji ne rade u realnom vremenu mogu da budu nekauzalni, tj. da generišu izlazne signale u bilo kom trenutku diskretnog vremena $n=n_k$, ne samo na

osnovu trenutnih i prethodnih, već i na osnovu budućih vrijednosti pobudnog signala, za $n > n_k$.

3.2.3 Stabilni i nestabilni sistemi

Ako je odziv na ograničen pobudni signal takođe ograničen, kažemo da je diskretni sistem *stabilan*, dok je u suprotnom *nestabilan*. Sistem opisan sa:

$$y(n) = 2x(n), \tag{3.33}$$

je primjer stabilnog sistema. Izlaz ovog sistema ostaje ograničen za sve pobude koje su ograničene, dok je sistem opisan sa:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k), \tag{3.34}$$

nestabilan. Na primjer, ako na ulaz ovog sistema dovedemo jediničnu odskočnu sekvencu $x(n) = u(n)$, njegov izlaz će neograničeno rasti sa porastom vremenske promjenljive *n*.

3.2.4 Sistemi sa raspodijeljenim i sistemi sa koncentrisanim parametrima

Kod većine sistema pretpostavljamo da njihove karakteristične veličine (parametri) nisu prostorno raspodijeljene i nazivamo ih *sistemi sa koncentrisanim parametrima*. U takvim sistemima pretpostavljamo da se svi procesi odvijaju istovremeno i na isti način u svim tačkama prostora. Međutim, postoje brojni sistemi za koje ova pretpostavka ne vrijedi. Jednostavan primjer su cjevovodi, gdje se tok tečnosti mijenja i u vremenu i u prostoru, te električni vodovi, kod kojih se napon i struja mijenjaju ovisno o vremenu i udaljenosti od generatora. Vrijednosti parametara takvih sistema se prostorno razlikuju, te ih zovemo *sistemi sa raspodijeljenim parametrima* i opisujemo parcijalnim jednačinama diferencija.

3.2.5 Linearni i nelinearni sistemi

Ako sistem sa koncentrisanim parametrima zadovoljava princip linearnosti dat sa (3.22) kažemo da je *linearan*, u suprotnom je *nelinearan*. Linearni sistemi se opisuju linearnim jednačinama diferencija. Za opis nelinearnih sistema neophodno je koristiti nelinearne jednačine diferencija.

3.2.6 Stacionarni i nestacionarni sistemi

Vremenski invarijantne dinamičke sisteme jednim imenom nazivamo *stacionarni sistemi*. Jednačine diferencija koje opisuju stacionarne sisteme imaju konstantne koeficijente. Sistemi čije se ponašanje u toku vremena mijenja nazivamo vremenski promjenljivim ili *nestacionarnim sistemima*. Jednačine diferencija koje opisuju nestacionarne sisteme imaju vremenski promjenljive koeficijente.

3.2.7 Deterministički i stohastički sistemi

Deterministički sistemi obrađuju determinističke signale. Odzivi ovih sistema, kao i njihovi parametri su takođe deterministički. Za razliku od determinističkih sistema, *stohastički sistemi* obrađuju stohastičke pobudne signale u stohastičke signale odziva. Parametri stohastičkih sistema mogu, ali ne moraju biti slučajne promjenljive.

Glava 4

OBRADA DISKRETNIH SIGNALA U VREMENSKOM DOMENU

Dinamički linearni diskretni sistemi opisani su jednačinama diferencija. Određivanje odziva na pobudu proizvoljnog oblika njihovim direktnim rješavanjem u domenu diskretnog vremena u opštem slučaju nije jednostavan zadatak. U okviru ove knjige zadržaćemo se na analizi i obradi determinističkih signala linearnim, vremenski invarijantnim sistemima. Takvi sistemi su opisani jednačinama diferencija sa konstantnim koeficijentima i odziv na proizvoljnu pobudu se može odrediti njihovim rješavanjem. Osim toga, vidjećemo da je LTI sistem u potpunosti moguće okarakterisati i preko njegovog odziva na jedinični impuls, koji nazivamo impulsnim odzivom. Ukoliko je poznat impulsni odziv, odziv na pobudu proizvoljnog oblika se može dobiti pomoću konvolucije. Do definicije konvolucije doći ćemo predstavljajući pobudni diskretni signal preko sume njegovih pojedinačnih elemenata. Dalje ćemo, analizirajući osobine LTI sistema, vidjeti da se, osim impulsnim odzivom, LTI sistem može okarakterisati i drugim funkcijama sistema, od kojih je pri obradi signala u vremenskom domenu najznačajniji jedinični odskočni odziv, definisan kao odziv na jediničnu odskočnu sekvencu.

4.1 Impulsni odziv LTI sistema

Impulsni odziv se definiše kao odziv na pobudu u obliku jediničnog impulsa pri nultom početnom stanju. Pod nultim početnim stanjem se podrazumijeva da su vrijednosti svih pobudnih signala i signala odziva (uključujući i njihove pomjerene verzije), koji se koriste pri opisu sistema, jednake nuli u trenutku dovođenja pobude, tj. za $n=0$. Ako operator kojim linearni, vremenski invarijantan sistem transformiše pobudni signal u signal odziva označimo sa $\mathcal{T}_{LTI}$, onda je impulsni odziv LTI sistema:

$$h(n)=\mathcal{T}_{LTI}\left\{\delta(n)\right\}. \tag{4.1}$$

U praktičnim primjenama je ponekad, kad nedostaje informacija o sistemu, ili kada je analitičko određivanje suviše komplikovano, potrebno snimiti impulsni odziv sistema. Prvo je potrebno dovesti sistem u nulto početno stanje (npr. postaviti vrijednosti svih memorijskih lokacija na nulu, ili ostaviti sistem dovoljno dugo nepobuđen kako bi se završili svi procesi i svi signali koji učestvuju u opisu sistema poprimili nulte vrijednosti). Zatim se sistem pobudi jediničnim impulsom. Dobijeni odziv je impulsni odziv sistema.

4.2 Konvolucija

Osobina da se bilo koji diskretni signal može predstaviti kao zbir signala od kojih svaki sadrži samo po jedan njegov element na odgovarajućoj poziciji, dok su im ostale vrijednosti jednake nuli, zajedno sa svojstvom linearnosti i vremenske invarijantnosti, omogućava potpunu karakterizaciju LTI diskretnog sistema preko njegovog odziva na jedinični impuls. Poznavajući impulsni odziv sistema, matematičkom operacijom koja je označena kao konvolucija, moguće je odrediti odziv LTI sistema na pobudni signal proizvoljnog oblika. Da bismo došli do analitičkog izraza za konvoluciju, prvo ćemo pokazati kako proizvoljan pobudni signal možemo predstaviti kao težinsku sumu vremenskih pomjerenih jediničnih impulsa. Zatim ćemo, koristeći osobinu linearnosti i vremenske invarijantnosti LTI sistema, odrediti odziv na tako zapisan pobudni signal.

4.2.1 Predstavljanje signala težinskom sumom pomjerenih jediničnih impulsa

Posmatrajmo proizvoljan diskretni signal $x(n),\ -\infty < n < \infty$, kao na Slici 4.1.a. Signal $x(n)$ se može razložiti na signale $x_k(n),\ -\infty < k < \infty$, za koje vrijedi da je $x_k(k) = x(k),$ pri čemu su im ostale vrijednosti jednake nuli. Neki od signala $x_k(n)$ prikazani su na slikama 4.1(b-f). Svaki od signala $x_k(n)$ se može dobiti množenjem signala $x(n)$ sa $\delta(n-k)$, pa koristeći svojstvo odabiranja jediničnog impulsa, signale $x_k(n)$ možemo analitički zapisati sa:

$$x_k(n) = x(k)\delta(n-k),\ -\infty < k < \infty. \tag{4.2}$$

Sumiranjem svih signala $x_k(n)$, zapisanih u obliku (4.2), bilo koji diskretni signal može se predstaviti u obliku:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k). \tag{4.3}$$

Jednakost (4.3) nam govori da je diskretni signal proizvoljnog oblika moguće izraziti preko težinske sume jediničnih impulsa koji su pomjereni u vremenu i pomnoženi vrijednostima signala u trenucima u kojima djeluju. Iako na prvi pogled ovakva interpretacija signala proizvoljnog oblika nema svrhu, ona je veoma korisna prilikom izvođenja izraza za konvoluciju, kao metoda za određivanje odziva na proizvoljnu pobudu.

4.2.2 Konvoluciona suma

Konvoluciona suma omogućava pronalaženje odziva LTI sistema na proizvoljnu pobudu ako je poznat odziv sistema na jedinični impuls. Neka je poznat impulsni odziv $h(n)$ LTI sistema:

$$h(n) = \mathcal{T}_{LTI}\{\delta(n)\}. \tag{4.4}$$

Zbog vremenske invarijantnosti LTI sistema vrijedi da je:

$$h(n-k) = \mathcal{T}_{LTI}\{\delta(n-k)\}. \tag{4.5}$$

Znajući da pomoću (4.3) proizvoljan diskretni signal možemo predstaviti kao težinsku sumu pomjerenih jediničnih impulsa koristeći osobine linearnosti i vremenske invarijantnosti, odziv na proizvoljnu pobudu možemo odrediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}_{LTI}\{x(n)\} = \mathcal{T}_{LTI}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{T}_{LTI}\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \end{aligned} \tag{4.6}$$

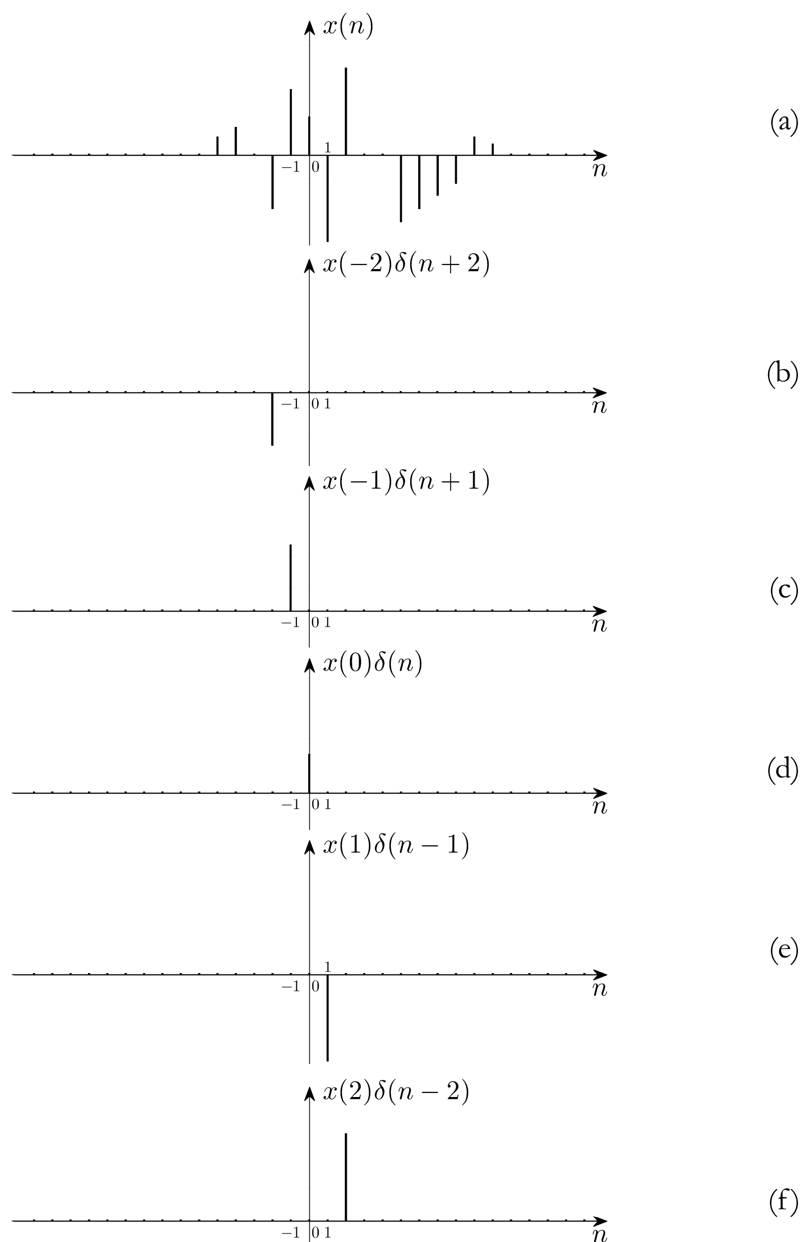
Jednakost (4.6) predstavlja opštu formu odziva LTI diskretnih sistema na proizvoljnu pobudu $x(n)$ i naziva se *konvoluciona suma*, ili jednostavno, *konvolucija*. Postupak određivanja odziva na signal proizvoljnog oblika preko težinske sume pomjerenih impulsnih odziva (4.6) ilustrovan je na Slici 4.2. Amplitude pomjerenih impulsnih odziva u (4.6) pomnožene su vrijednostima signala u trenucima u koje su pomjereni. Na Slici 4.2 je prvo prikazano razlaganje signala $x(n)$ na signale $x_k(n) = x(k)\delta(n-k)$, a zatim su prikazani pojedinačni odzivi na signale $x_k(n)$. Na kraju je prikazan odziv na kompletan signal $x(n)$ kao zbir odziva na signale $x_k(n)$.

Konvolucija diskretnih signala (4.6) se simbolički označava sa:

$$y(n) = x(n) * h(n). \tag{4.7}$$

Jednostavnom smjenom promjenljivih, lako se pokaže da je:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{4.8}$$



Slika 4.1 Predstava diskretnog signala preko jediničnih impulsa: (a) diskretni signal $x(n)$ proizvoljnog oblika; (b-f) neki od signala $x_k(n) = x(k)\delta(n-k)$ na koje se razlaže signal $x(n)$.

(a)

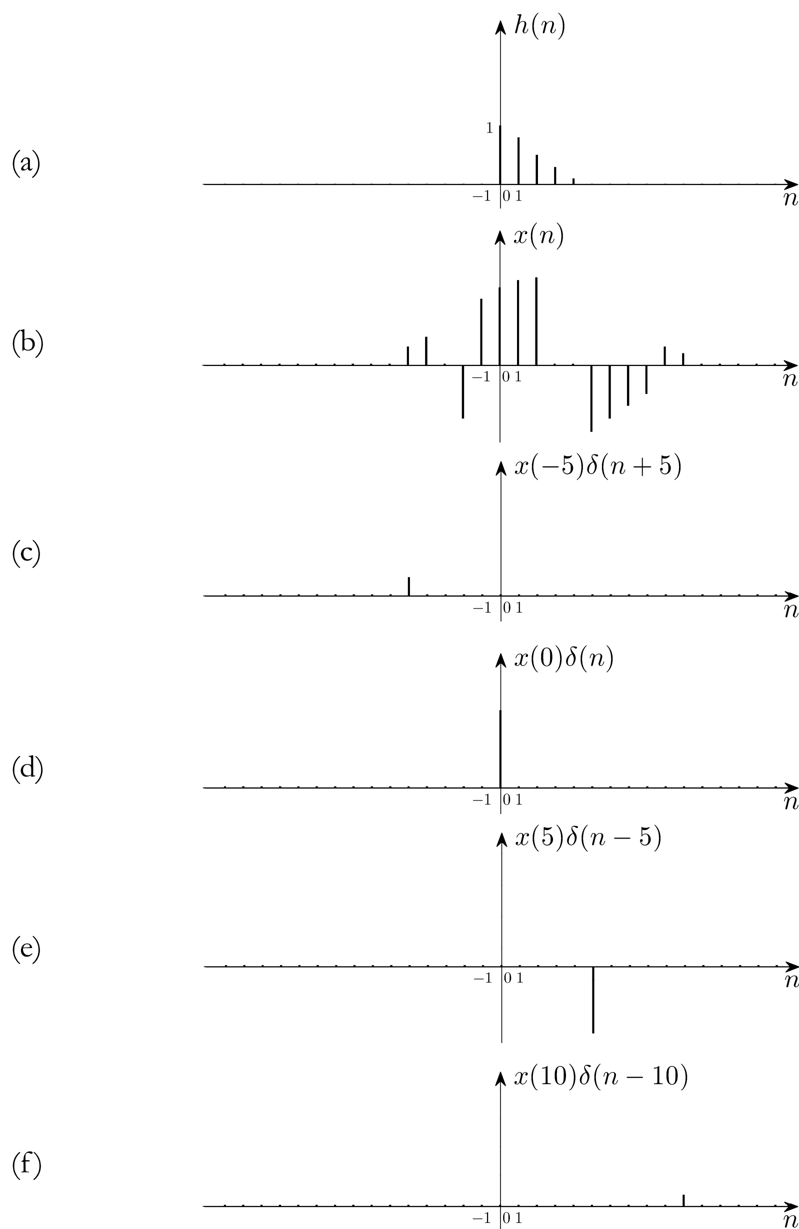
(b)

(c)

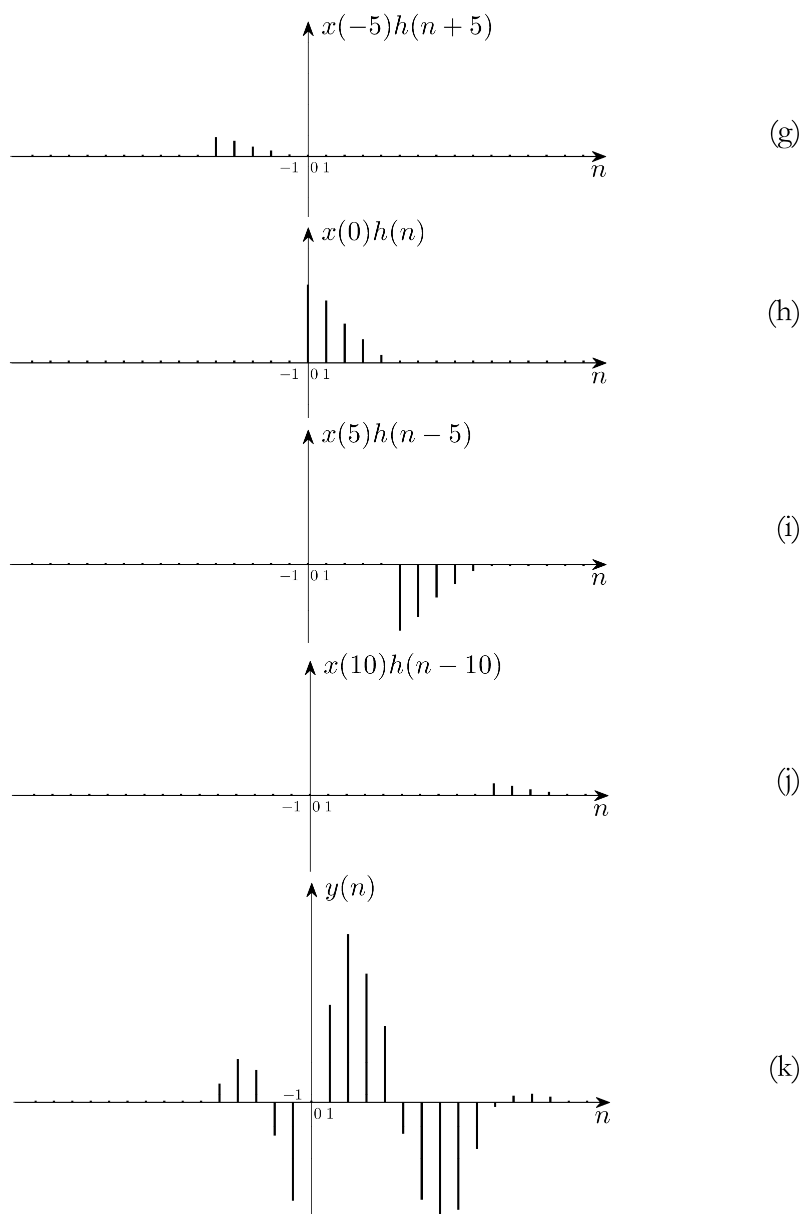
(d)

(e)

(f)



Slika 4.2 Grafička interpretacija određivanja odziva: (a) impulsni odziv $h(n)$; (b) pobudni signal $x(n)$; (c-f) neki od signala $x_k(n) = x(k)\delta(n-k)$ na koje se razlaže signal $x(n)$ (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.2 Grafička interpretacija određivanja odziva: (g-j) neki od elemenata konvolucione sume – odzivi na signale $x_k(n)$ sa slika (c-f) i (k) rezultat konvolucije kao zbir odziva na signale $x_k(n)$ (nastavak sa prethodnih stranica).

Budući da je zasnovana na sabiranju i množenju konvolucija je komutativna operacija, te vrijedi da je:

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n). \quad (4.9)$$

Konvolucija je i asocijativna. Ako su data tri signala: $x_1(n)$, $x_2(n)$ i $x_3(n)$, na osnovu asocijativnosti možemo pisati da je:

$$x_1(n)*x_2(n)*x_3(n)=\left[x_1(n)*x_2(n)\right]*x_3(n)=x_1(n)*\left[x_2(n)*x_3(n)\right]. \quad (4.10)$$

4.2.3 Grafičko izračunavanje konvolucije

Posmatrajmo konvolucionu sumu:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (4.11)$$

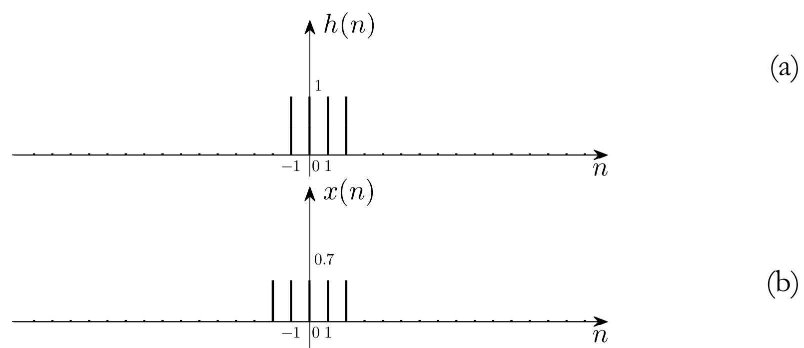
Kako bismo odredili rezultat konvolucije za neku specifičnu vrijednost promjenljive *n*, prvo na osnovu signala $h(k)$, čija je nezavisna promjenljive *k*, generišimo signal $h(n-k)$. Grafički posmatrano, uradi se vremenska inverzija, kako bismo iz signala $h(k)$ dobili vremenski invertovan signal $h(-k)$, a zatim se tako dobijen signal pomjera udesno, ako je $n>0$, ili ulijevo, ako je $n<0$, za iznos $|n|$. Iz (4.11) vidimo da se, za jednu specifičnu vrijednost nezavisne promjenljive *n*, rezultat konvolucije dobije množenjem vrijednosti svih elemenata signala $x(k)$ sa vrijednostima elemenata signala $h(n-k)$ sa istim indeksima *k* (član po član), u granicama od $-\infty$ do ∞, te sumiranjem svih tako dobijenih proizvoda. Postupak je potrebno ponoviti za svaku vrijednost nezavisne promjenljive *n*, odnosno za svaki trenutak diskretnog vremena u kom se računa konvolucija. Kod grafičkog izračunavanja konvolucije zamišljamo da se, pri promjeni *n* od $-\infty$ do ∞, vremenski invertovan signal $h(-k)$ pomjera po *k* osi s lijeva na desno za iznos *n*, te prilikom svakog pomaka ponavljamo opisani postupak: pratimo preklapanje signala $h(n-k)$ sa signalom $x(k)$, množimo

član po član elemente ova dva signala i sve te proizvode sumiramo. Tako dobijeni rezultat unosimo kao rezultat konvolucije u tački *n*, gdje *n* odgovara pomaku signala $h(n-k)$ u odnosu na $h(-k)$. Postupak grafičkog izračunavanja konvolucije detaljno je proveden u Primjeru 4.1 i Primjeru 4.2, a zatim je dato još nekoliko primjera konvolucije karakterističnih signala.

Ako se posmatra konvolucija signala konačnih trajanja, kod kojih su vijednosti signala jednake nuli van nekog konačnog vremenskog intervala, lako se može izvesti opšti zaključak o dužini konvolucione sekvence. Neka je trajanje jednog signala *N*, a drugog *M*. Budući da preklapanje signala počinje kada se signal koji pomjeramo postavi u poziciju da se njegov, grafički gledano, krajnji desni element preklopi sa krajnjim lijevim elementom signala koji se ne pomjera, a prestaje kad se njegov krajnji lijevi element nađe pomjeren za jednu poziciju udesno u odnosu na krajnji desni element signala koji miruje, konvoluciona sekvenca će imati $N+M-1$ elemenata.

Primjer 4.1:

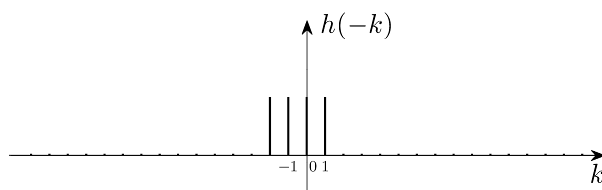
Grafičkim putem odrediti odziv LTI sistema čiji je impulsni odziva dat na Slici 4.5(a), a pobuda na Slici 4.5(b).



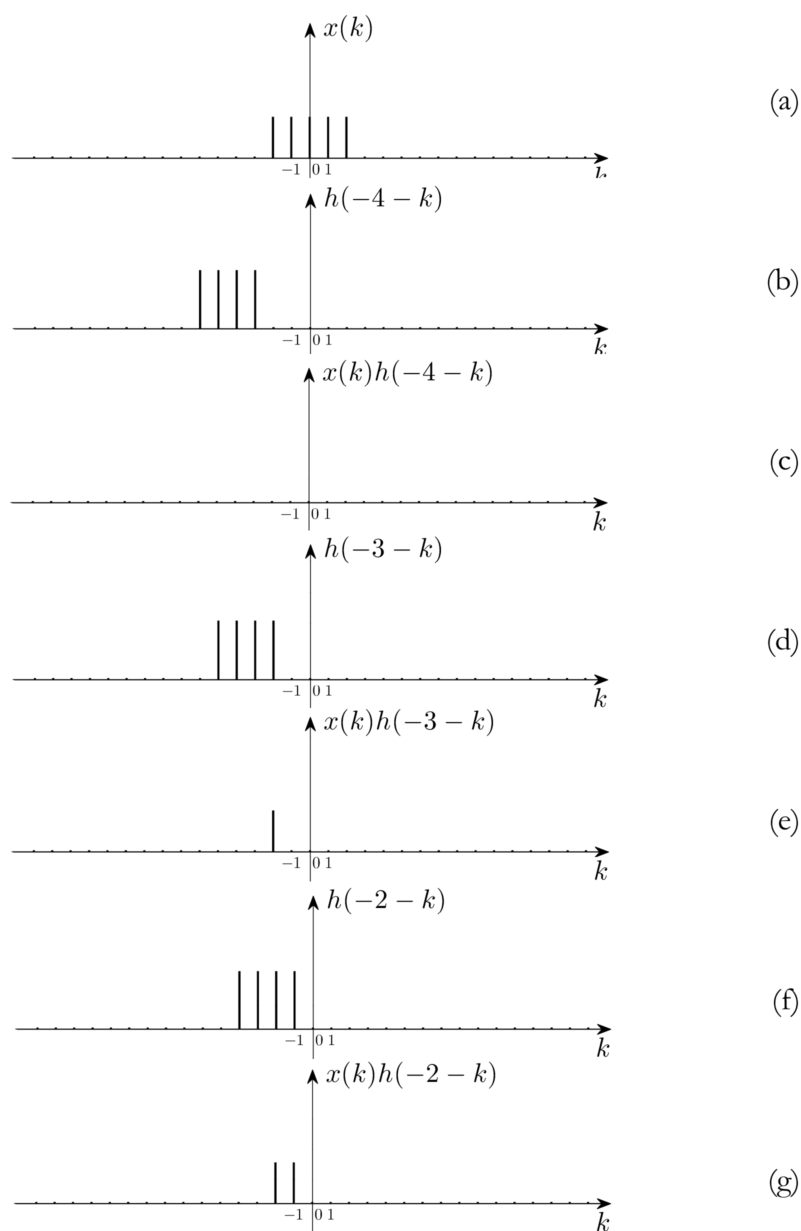
Slika 4.5 Signali čiju konvoluciju tražimo: (a) impulsni odziv LTI sistema i (b) pobuda.

Rješenje:

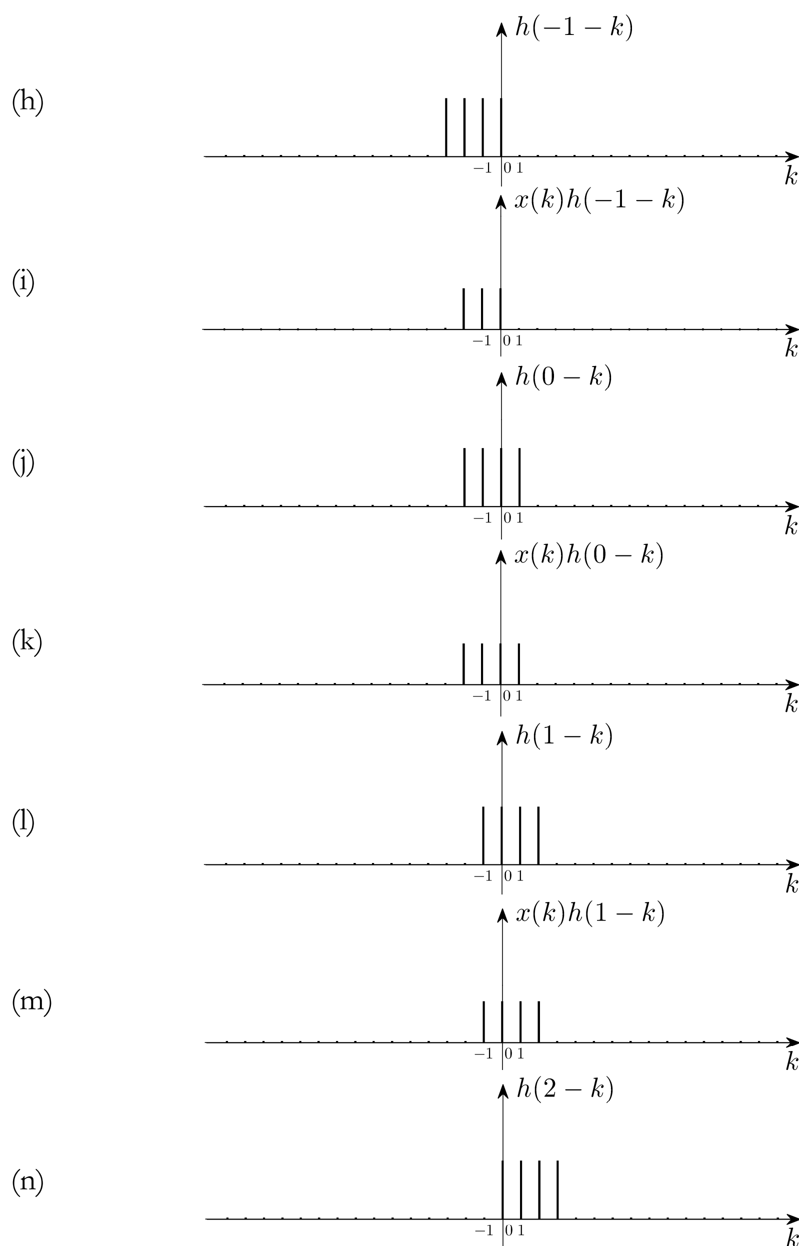
Odziv LTI sistema je dat konvolucijom impulsnog odziva i pobudnog signala. Prilikom grafičkog izračunavanja konvolucije, posmatraju se oba signala na *k* osi. Od jednog signala, npr. impulsnog odziva, se formira vremenski invertovan signal, kao na Slici 4.6. Daljnji koraci su prikazani na Slici 4.7. Prvo se vremenski invertovan impulsni odziv pomjeri dovoljno ulijevo, tako da nema preklapanja sa pobudnim signalom, Slika 4.7(b). Zatim se, za svaku pojedinačnu vrijednost *n*, sa korakom jednakim jedinici, vremenski invertovan impulsni odziv pomjera udesno po *k* osi, sve dok ne prestane preklapanje sa pobudnim signalom. Nakon svakog pomaka sumiraju se vrijednosti elemenata signala proizvoda $x(k)h(n-k),\ \forall k$, kako bi se dobila vrijednost odziva u trenutku *n*.



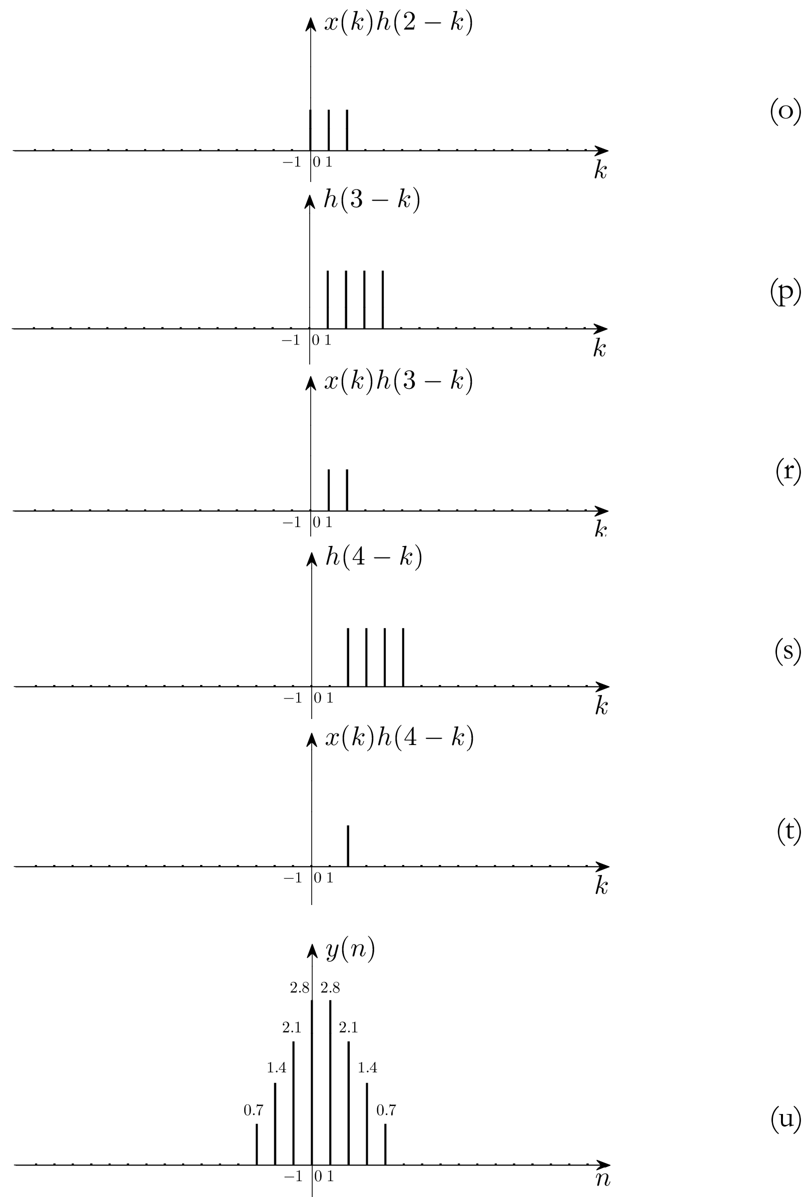
Slika 4.6 Vremenski invertovan impulsni odziv.



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog izračunavanja konvolucije: (a) pobudni signal; (b,d,f) pomjeren vremenski invertovan impulsni odziv i (c,e,g) signal proizvoda pobudnog signala i pomjerenog vremenski invertovanog impulsnog odziva (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog izračunavanja konvolucije: (h,j,l,n) pomjeren vremenski invertovan impulsni odziv i (i,k,m) signal proizvoda pobudnog signala i pomjerenog vremenski invertovanog impulsnog odziva (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog izračunavanja konvolucije: (p,s) pomjeren vremenski invertovan impulsni odziv; (o,r,t) signal proizvoda pobudnog signala i pomjerenog vremenski invertovanog impulsnog odziva i (u) rezultat konvolucije (nastavak sa prethodnih stranica).

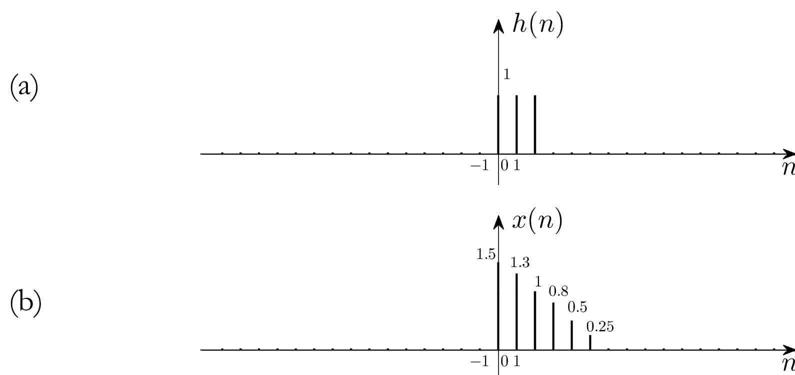
□

Primjer 4.2:

Grafičkim putem odrediti konvoluciju impulsnog odziva i pobudnog signala, koji su prikazani na Slici 4.8.

(a)

(b)



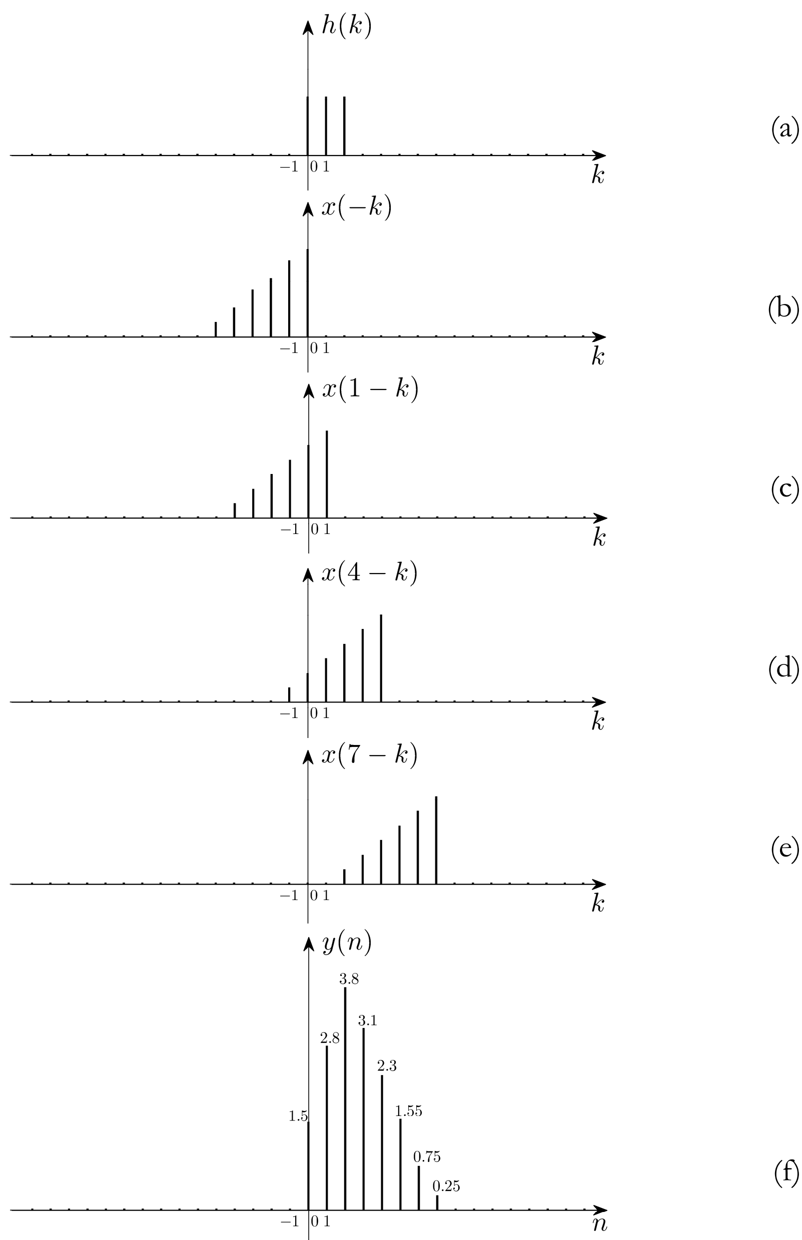
Slika 4.8 Signali čiju konvoluciju tražimo: (a) impulsni odziv i (b) pobuda.

Rješenje:

Umjesto da formiramo vremenski invertovan impulsni odziv na osnovu izraza za konvoluciju (4.11) kao u Primjeru 4.1, koristićemo drugi oblik konvolucije:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \tag{4.12}$$

i formirati vremenski invertovan pobudni signal, $x(-k)$. Vremenski invertovan pobudni signal ćemo pomjerati udesno, sa korakom jednakim jedinici, po k osi i posmatrati preklapanje njegovih elemenata sa elementima impulsnog odziva. Budući da su elementi oba signala jednaki nuli za $n<0$, nema potrebe za pomjeranjem vremenski invertovanog pobudnog signala ulijevo. Sumiranjem elemenata signala proizvoda $h(k)x(n-k)$ za pojedinačne vrijednosti n diskretnog vremena dobijamo rezultat konvolucije. Postupak je grafički ilustrovan na Slici 4.9. Prikazani su samo neki slučajevi pomjerenog vremenski invertovanog pobudnog signala, dok se računanje mora provesti za sve vrijednosti n za koje postoji preklapanje impulsnog odziva i pomjerenog vremenski invertovanog pobudnog signala.

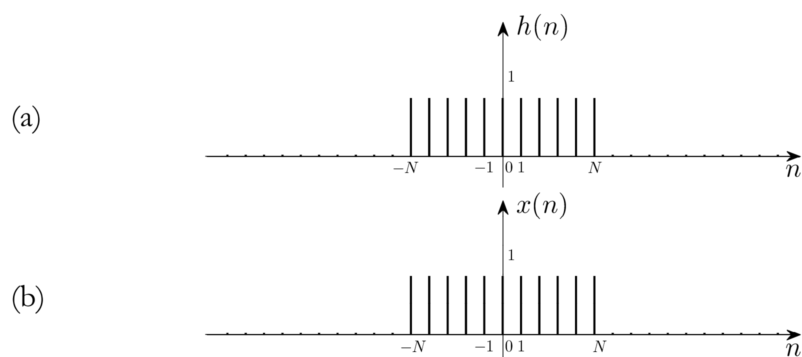


Slika 4.9 Grafičko izračunavanje konvolucije: (a) impulsni odziv; (b-e) pomjeren vremenski invertovan pobudni signal i (f) rezultat konvolucije.

□

Primjer 4.3:

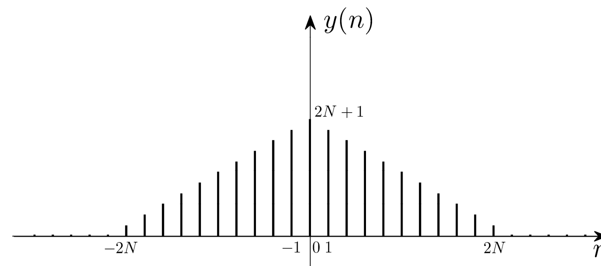
Pravougaoni impulsi se često primjenjuju u inženjerskoj praksi, te je poželjno poznavati oblik njihove konvolucije. Na slikama 4.10(a-b) su prikazana dva identična pravougaona impulsa. Grafičkim putem odrediti njihovu konvoluciju.



Slika 4.10 Signali čiju konvoluciju tražimo: (a,b) pravougaoni impuls.

Rješenje:

Nakon što se od jednog od signala formira vremenski invertovan signal, on se pomjera ulijevo dok ne prestane preklapanje sa drugim signalom. U ovom primjeru, preklapanje počinje kada se prednja ivica vremenski invertovanog signala nađe u tački $-N$, što se dešava kada se vremenski invertovan signal pomjeri za $-2N$ ulijevo, te je rezultat konvolucije jednak nuli za $n<-2N$. U intervalu $-2N<n\leq 0$ vrijednosti elemenata konvolucije se povećavaju, jer se sa porastom diskretnog vremena n povećava širina intervala na kom je signal proizvod $h(k)x(n-k)$ različit od nule. Za $n>0$ preklapanje se postepeno smanjuje i potpuno prestaje nakon $n=2N$, kada rezultat konvolucije postaje jednak nuli. Rezultat konvolucije je prikazan na Slici 4.11.

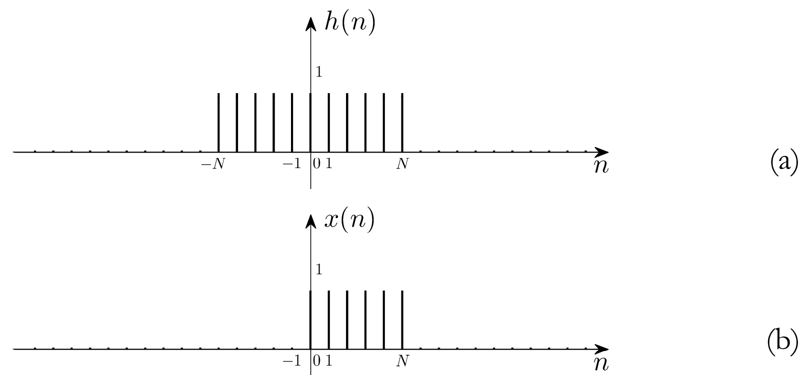


Slika 4.11 Konvolucija signala sa Slike 4.10.

□

Primjer 4.4:

Grafičkim putem odrediti odziv LTI sistema sa impulsnim odzivom datim na Slici 4.12(a) na pobudu prikazanu na Slici 4.12(b).

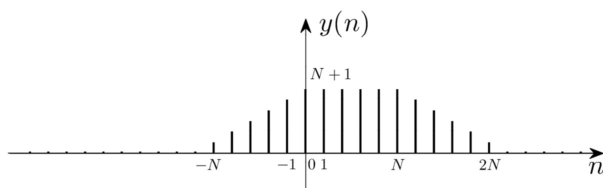


Slika 4.12 Signali čiju konvoluciju tražimo: (a) Impulsni odziv LTI sistema i (b) pobuda.

Rješenje:

Ako se rješavanju ovog zadatka pristupi tako da se formira vremenski invertovan pobudni signal, on se pomjera ulijevo u tačku $-N-1$, jer tada prestaje preklapanje sa impulsnim odzivom. U intervalu $-N<n\leq 0$ suma elemenata signala proizvoda $h(k)x(n-k)$ raste jer se sa porastom diskretnog vremena *n* povećava širina intervala na kom je taj signal različit od nule. Međutim, u

intervalu $0 \leq n \leq N$ suma elemenata signala proizvoda ostaje konstantna jer se za svako n iz tog intervala signal $x(n-k)$ u potpunosti preklapa sa impulsnim odzivom $h(k)$. Tek za $n > N$ preklapanje se postepeno smanjuje i potpuno prestaje za $n = 2N+1$. Rezultat konvolucije je prikazan na Slici 4.13. Primijetimo da je u ovom primjeru LTI sistem nekauzalan, jer njegov impulsni odziv nije jednak nuli za $n < 0$, pa se odziv pojavio prije pobude.

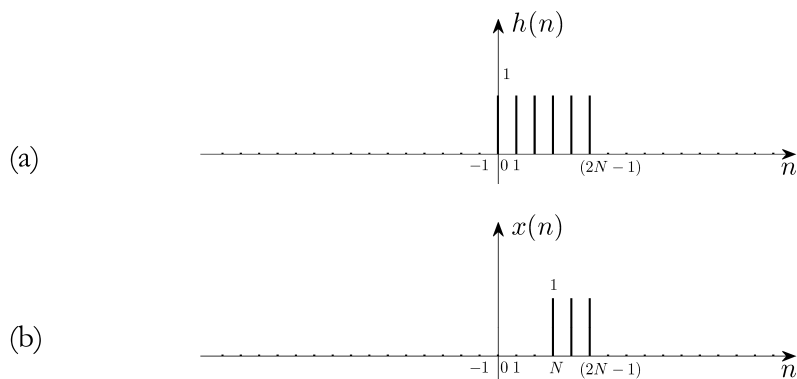


Slika 4.13 Odziv sistema sa impulsnim odzivom datim na Slici 4.12(a) na pobudu datu na Slici 4.12(b).

□

Primjer 4.5:

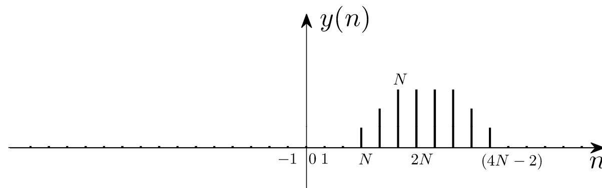
Impulsni odziv LTI sistema dat je na Slici 4.14(a). Odrediti odziv na pobudni signal prikazan na Slici 4.14(b).



Slika 4.14 Signali čiju konvoluciju tražimo: (a) Impulsni odziv kauzalnog LTI sistema i (b) kauzalna pobuda.

Rješenje:

Istim postupkom kao u prethodnim primjerima vezanim za određivanje konvolucije grafičkim putem, dobijamo signal odziva dat na Slici 4.15. Budući da je impulsni odziv LTI sistema jednak nuli za $n<0$, tj. sistem je kauzalan, odziv počinje od trenutka pobuđivanja sistema.



Slika 4.15 Konvolucija signala sa Slike 4.14.

□

4.2.4 Konvolucija signala sa jediničnim impulsima

Konvolucija signala proizvoljnog oblika sa jediničnim impulsima je od posebne važnosti u analizi i obradi signala. Na osnovu definicionog izraza za konvoluciju:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k), \tag{4.13}$$

pri konvoluciji signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa pomjerenim jediničnim impulsom $\delta(n-n_0)$ dobijamo da je:

$$y(n)=x(n)*\delta(n-n_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-n_0-k). \tag{4.14}$$

Po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa znamo da je:

$$x(k)\delta(n-n_0-k)=x(n-n_0)\delta(n-n_0-k), \tag{4.15}$$

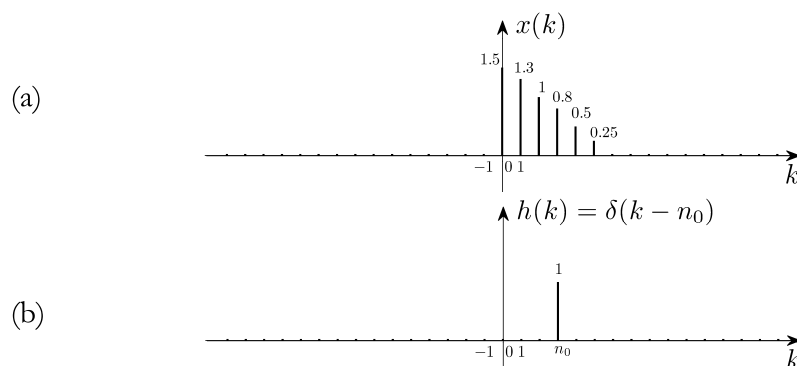
te je konvolucija (4.14) jednaka:

$$y(n)=x(n-n_0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0-k). \tag{4.16}$$

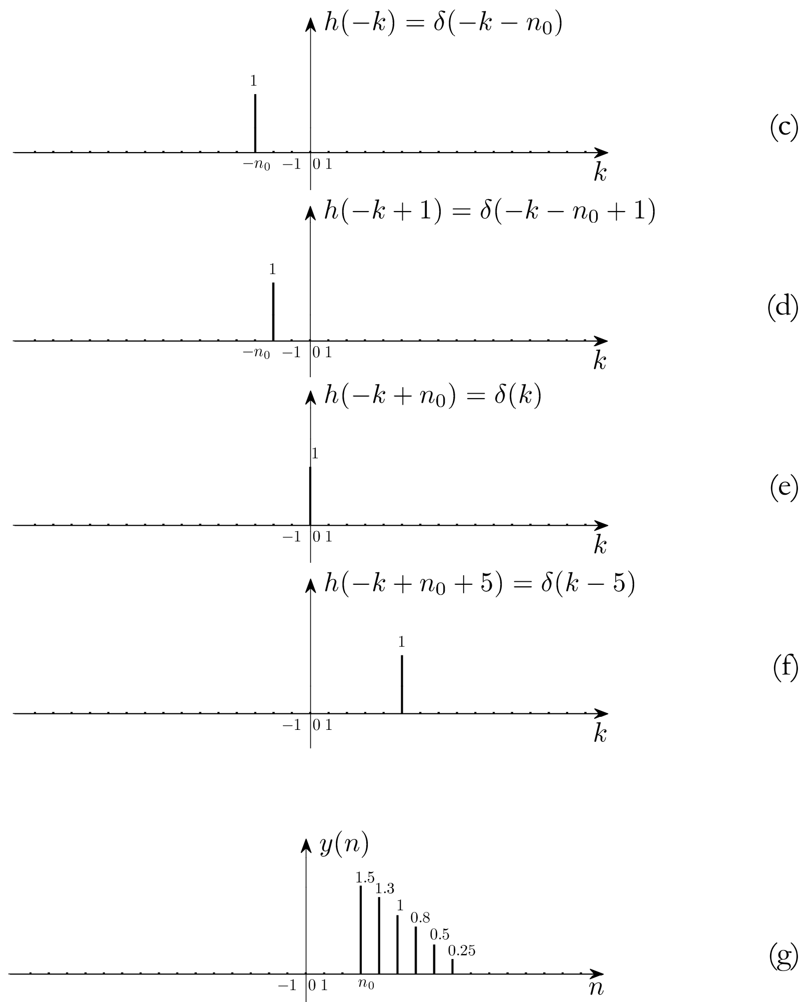
Suma elemenata jediničnog impulsa od $-\infty$ do ∞ jednaka je jedinici, neovisno od toga u kom trenutku diskretnog vremena djeluje jedinični impuls. Prema tome, iz (4.16), dobijamo da je konvolucija signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa jediničnim impulsom koji djeluje u trenutku n_0 jednaka signalu $x(n)$ pomjerenom u tačku n_0:

$$y(n) = x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0) . \tag{4.17}$$

Grafičko izračunavanje konvolucije proizvoljnog signala $x(n)$ sa pomjerenim jediničnim impulsom $\delta(n - n_0)$ prikazano je na Slici 4.16. Za svaku vrijednost nezavisne promjenljive *n*, signal proizvoda $x(k)\delta(n - n_0 - k)$ je, po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa, jednak $x(n - n_0)\delta(n - n_0 - k)$, dakle jediničnom impulsu koji djeluje u trenutku $n - n_0$, pomnoženom sa vrijednošću signala $x(n)$ u trenutku $n - n_0$. To je istovremeno rezultat konvolucije u trenutku *n*. Dakle, vrijednost konvolucije u trenutku *n* jednaka je vrijednosti signala $x(n)$ u trenutku $n - n_0$.



Slika 4.16 Konvolucija signala proizvoljnog oblika i pomjerenog jediničnog impulsa: (a) signal proizvoljnog oblika i (b) pomjeren jedinični impuls, prikazani na *k* osi (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.16 Konvolucija signala proizvoljnog oblika i pomjerenog jediničnog impulsa: (c) vremenski invertovan pomjeren jedinični impuls; (d-f) signali koji se dobiju pomjeranjem signala $h(-k)$ i (g) rezultat konvolucije (nastavak sa prethodne stranice).

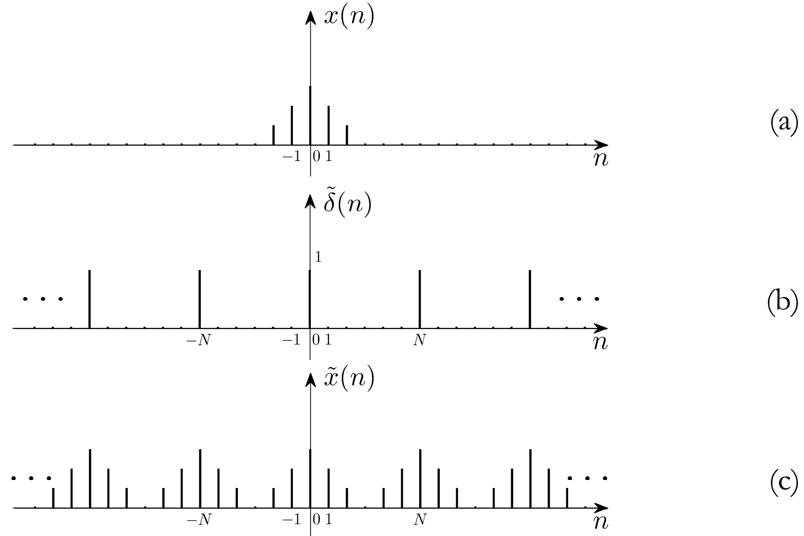
Posmatrajmo sada konvoluciju signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa sekvencom periodično ponovljenih jediničnih impulsa $\tilde{\delta}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN)$, $m\in\mathbb{Z}$, čiji je osnovni period *N*. Znajući da je $x(n)*\delta(n-mN)=x(n-mN)$, te da je konvolucija linearni operator, dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n)&=x(n)*\tilde{\delta}(n)=x(n)*\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN)=\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n)*\delta(n-mN)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Dakle, konvolucijom signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima, osnovnog perioda *N*, dobijamo periodično proširenje datog signala sa periodom *N*:

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN).\tag{4.19}$$

Za ilustraciju je na Slici 4.17 prikazana konvolucija trougaonog impulsa sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima. Rezultat te konvolucije su periodično ponovljeni trougaoni impulsi sa istim periodom koji ima povorka jediničnih impulsa.



Slika 4.17 Konvolucija signala sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima: (a) signal $x(n)$; (b) periodična povorka jediničnih impulsa i (c) rezultat konvolucije.

4.3 Jedinični odskočni odziv LTI sistema

U prethodnom izlaganju smo pokazali da impulsni odziv u potpunosti karakteriše sistem. Sistem je potpuno određen i ako poznajemo *jedinični odskočni odziv*, tj. odziv na jediničnu odskočnu sekvencu $u(n)$ pri nultom početnom stanju. Koristeći konvolucionu sumu, jedinični odskočni odziv $a(n)$ se može izraziti preko impulsnog odziva:

$$a(n)=h(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\cdot u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)\cdot 1=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k). \tag{4.20}$$

S druge strane, impulsni odziv se može dobiti iz jediničnog odskočnog odziva na osnovu sljedeće relacije:

$$h(n)=a(n)-a(n-1). \tag{4.21}$$

4.4 Osobine LTI sistema

Osnovne osobine diskretnih sistema, o kojima smo govorili u Glavi 3, sada ćemo ponovo analizirati pod uslovima linearnosti i vremenske invarijantnosti sistema. Činjenica da se odziv diskretnog LTI sistema na proizvoljnu pobudu može dobiti konvolucijom ulaznog signala $x(n)$ i impulsnog odziva $h(n)$:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n), \quad (4.22)$$

tj. da je diskretni LTI sistem u potpunosti okarakterisan svojim impulsnim odzivom $h(n)$, poslužiće nam da izvedemo zaključke o osobinama diskretnih LTI sistema.

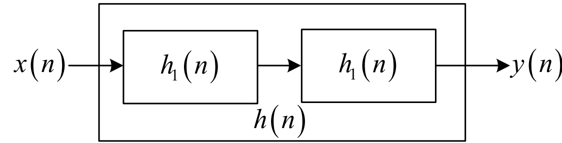
4.4.1 Impulsni odziv kaskadne i paralelne veze sistema

Pretpostavimo da poznajemo impulsne odzive $h_1(n)$ i $h_2(n)$ dva diskretna LTI sistema, povezana na neki način, tako da formiraju složen sistem. Odzivi tih sistema su dati sa: $y_1(n)=x_1(n)*h_1(n)$ i $y_2(n)=x_2(n)*h_2(n)$. Ako je izlaz jednog sistema doveden na ulaz drugog sistema, tako da je $y_1(n)=x_2(n)$, tada se radi o njihovoj kaskadnoj vezi. Kod kaskadne veze je ulazni signal prvog sistema jednak ulaznom signalu u cijeli sistem, $x_1(n)=x(n)$, a izlaz iz cijelog sistema jednak izlazu iz drugog sistema, $y(n)=y_2(n)$, pa je:

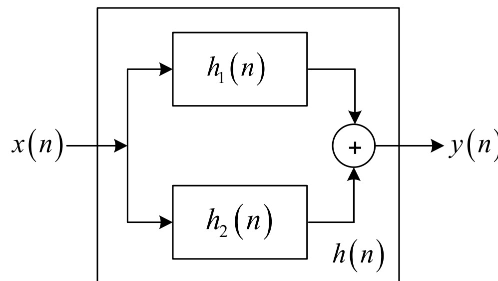
$$\begin{aligned}y(n)&=y_2(n)=x_2(n)*h_2(n)=y_1(n)*h_2(n)=\\&=\left[x_1(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)\end{aligned}. \quad (4.38)$$

Na osnovu osobine asocijativnosti konvolucije možemo pisati da je:

$$y(n)=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)=x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]. \quad (4.39)$$



Slika 4.18 Blok šema kaskadne veza dva diskretna LTI sistema.



Slika 4.19 Blok šema paralelne veze dva diskretna LTI sistema.

Prema tome, na osnovu osobine asocijativnosti konvolucije, impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema sa impulsnim odzivima $h_1(n)$ i $h_2(n)$, prikazane na Slici 4.18, je jednak konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n). \tag{4.40}$$

Posmatrajmo sada paralelnu vezu dva LTI sistema sa impulsnim odzivima $h_1(n)$ i $h_2(n)$, prikazanu na Slici 4.19. Kod paralelne veze se isti pobudni signal istovremeno dovodi na ulaz oba sistema, $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$, dok je izlaz cijelog sistema jednak zbiru izlaza pojedinačnih sistema, $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$. Slijedi da je odziv paralelne veze jednak:

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = x_1(n) * h_1(n) + x_2(n) * h_2(n). \tag{4.41}$$

Kako je $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$, koristeći definicioni izraz za konvoluciju i distributivnost, možemo pisati:

$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * \left[h_1(n) + h_2(n) \right], \tag{4.42}$$

te je impulsni odziv paralelne veze dva LTI sistema jednak zbiru impulsnih odziva pojedinačnih sistema:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n). \tag{4.43}$$

4.4.2 LTI sistemi bez memorije

Od ranije znamo da kod sistema bez memorije izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tom trenutku. Jedini diskretni LTI sistem bez memorije je opisan sa:

$$y(n) = Kx(n), \tag{4.23}$$

pa impulsni odziv LTI sistema bez memorije mora biti oblika:

$$h(n) = K\delta(n). \tag{4.24}$$

Na izlazu sistema bez memorije signal može biti samo pojačan ili oslabljen u odnosu na ulazni signal, zavisno od toga da li je $K > 1$ ili $K < 1$, respektivno. Za $K = 1$ radi se o sistemu kod koga je signal na izlazu sistema jednak signalu na njegovom ulazu.

4.4.3 Invertibilnost LTI sistema

Sistem je invertibilan ako mu je moguće pronaći inverzni sistem koji, kad se kaskadno veže sa originalnim sistemom, formira takav složeni sistem kod koga je signal odziva jednak signalu na ulazu u originalni sistem. Znajući da je konvolucija proizvoljnog signala sa jediničnim impulsom jednaka samom tom signalu, zaključujemo da impulsni odziv kompletnog sistema, $h_K(n)$, formiranog ovakvim kaskadnim vezivanjem, treba da bude jednak $\delta(n)$.

Ako sa $h_I(n)$ označimo impulsni odziv sistema za koji pretpostavljamo da je inverzan sistemu sa impulsnim odzivom $h(n)$, onda je, u slučaju LTI sistema, impulsni odziv njihove kaskadne veze dat sa:

$$h_K(n) = h(n) * h_I(n). \tag{4.25}$$

Prema izloženom, sistem sa impulsnim odzivom $h_I(n)$ je inverzan sistemu sa impulsnim odzivom $h(n)$ ako vrijedi da je:

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n). \tag{4.26}$$

4.4.4 Kauzalnost LTI sistema

Rekli smo da je sistem kauzalan ako odziv zavisi samo od trenutne i prošlih vrijednosti elemenata ulaznog signala. Da bi ovo bilo zadovoljeno kod LTI sistema, u konvolucionoj sumi ne smiju da se pojavljuju elementi signala sa indeksima većim od onog za koji se računa konvolucija, tako da gornja granica sume, umjesto ∞ u opštem izrazu za konvoluciju, postaje *n*:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k). \tag{4.27}$$

Nakon smjene $n-k \to k$ pod sumom u (4.27), dobijamo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{4.28}$$

To znači da svi elementi impulsnog odziva moraju biti jednaki nuli za $n<0$, odnosno da je diskretni LTI sistem kauzalan ako je $h(n)=0$ za $n<0$.

U opštem slučaju, kada se ne postavlja uslov kauzalnosti sistema, ali ako se pretpostavi da je pobudni signal jednak nuli za $n<0$, odziv će biti jednak:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)x(n-k). \tag{4.29}$$

Kod kauzalnih sistema, kod kojih konvoluciona suma poprima jedan od sljedećih oblika:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)\,, \tag{4.30}$$

pri pobudi koja je jednaka nuli za $n<0$, odziv je dat sa:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k)\,. \tag{4.31}$$

U praksi su od posebnog značaja kauzalni diskretni sistemi kod kojih je impulsni odziv konačnog trajanja, od npr. N elemenata. Tada je odziv dat sa:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)\,. \tag{4.32}$$

Kod ovakvih sistema, ukoliko je i pobudni signal konačnog trajanja, sa M elemenata, rezultat konvolucije je sekvenca od $N+M-1$ elemenata.

4.4.5 Stabilnost LTI sistema

Sistem je stabilan ako pobudni signal ograničene amplitude proizvodi signal odziva čija je amplituda takođe ograničena. Potražimo sada način na koji možemo iskazati uslov stabilnosti kod LTI sistema. Pretpostavimo da na ulazu LTI sistema sa impulsnim odzivom $h(n)$ djeluje pobuda ograničena po amplitudi, $|x(n)|<B, \forall n$. Tada je:

$$|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(n)||x(n-k)|\le B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|\,. \tag{4.33}$$

Odziv će imati ograničenu amplitudu ako je $|y(n)|<\infty, \forall n$, što znači da je diskretni LTI sistem stabilan ako je njegov impulsni odziv *apsolutno sumabilan*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty\,. \tag{4.34}$$

Sistem sa impulsnim odzivom $h(n)=\delta(n-n_0)$, čija je uloga samo da zakasni ulazni signal za n_0 elemenata, je primjer stabilnog sistema, jer je:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\delta(k-n_0)|=1. \tag{4.35}$$

To je bilo i za očekivati, jer je odziv ovog sistema na bilo koju pobudu ograničenu po amplitudi jednak pomjerenoj verziji pobude, dakle ograničen po amplitudi.

Posmatrajmo sada sistem koji nazivamo *akumulator*, sa impulsnim odzivom $h(n)=u(n)$. Provjeravajući da li je impulsni odziv ovog sistema apsolutno sumabilan, zaključujemo da:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|u(k)|=\sum_{k=0}^{\infty}u(k), \tag{4.36}$$

poprima beskonačno veliku vrijednosti, pa je sistem nestabilan. Na primjer, ako bi na ulaz ovog sistema doveli Hevisajdovu sekvencu $x(n)=u(n)$, izlazni signal bi neograničeno rastao:

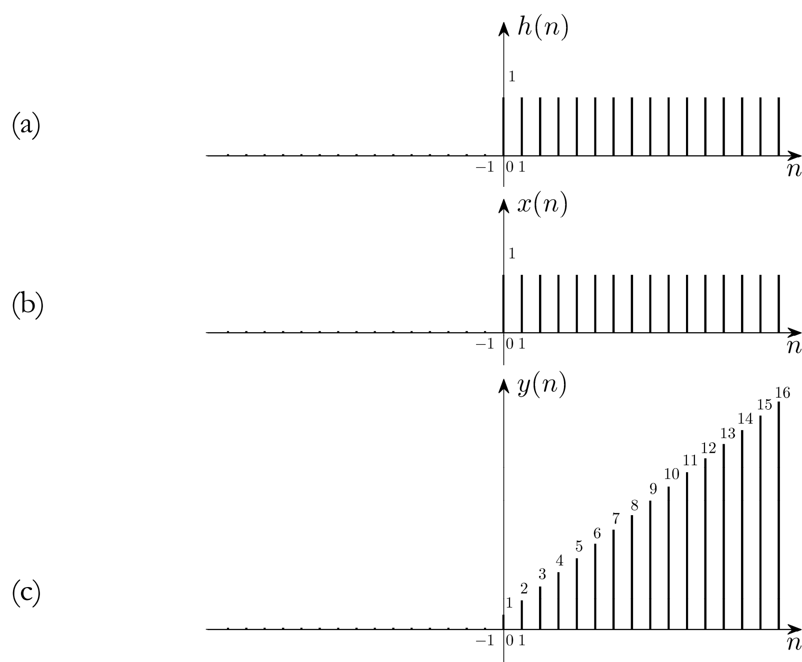
$$y(n)=u(n)*u(n)=r(n). \tag{4.37}$$

Na Slici 4.20 prikazan je odziv ovog nestabilnog sistema na pobudu ograničenu po amplitudi, u vidu Hevisajdove sekvence. Evidentno je da odziv ovog sistema na pobudu ograničenu po amplitudi neograničeno raste u toku vremena.

(a)

(b)

(c)



Slika 4.20 Odziv nestabilnog sistema na pobudu ograničenu po amplitudi: (a) impulsni odziv sistema; (b) pobudni signal i (c) odziv sistema.

4.5 Opis LTI sistema jednačinama diferencija

Prilikom opisa sistema uspostavljaju se relacije između parametara i promjenljivih relevantnih za ponašanje sistema, kao i relacije koje povezuju ulazne i izlazne signale. Ove relacije određuju se na osnovu prirodnih zakona ili eksperimentalno. Osim konvolucionom sumom, kada je neophodno poznavati impulsni odziv sistema, relacije između ulaznih i izlaznih signala nekog sistema se mogu opisati skupom jednačina diferencija prvog reda, tzv. jednačinama stanja, ili jednom jednačinom diferencija višeg reda. U daljnjem razmatranju ćemo se ograničiti na LTI sisteme koje možemo opisati jednačinama diferencija sa konstantnim koeficijentima.

4.5.1 Jednačine stanja

Fizičke veličine koje je neophodno poznavati kako bismo u potpunosti opisali sistem nazivamo *promjenljive stanja*. Neka je za opis ponašanja nekog sistema dovoljno poznavanje *N* promjenljivih stanja. Sve ostale veličine u sistemu, izuzev ulaznih signala, označavamo kao *zavisne promjenljive*. U opštem slučaju, sistem može da bude pobuđen sa *M* ulaznih signala (*ulaznih promjenljivih*) i da ima *L* izlaznih signala, odnosno *izlaznih promjenljivih*. Zbog toga je pogodno sve promjenljive sistema zapisati u vektorskom obliku. Vektor promjenljivih stanja $\left[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)\right]^T$ ćemo označiti kao vektor stanja, $\mathbf{x}(n)$. Vektore ulaznih $\left[e_1(n), e_2(n), \ldots, e_M(n)\right]^T$ i izlaznih signala $\left[y_1(n), y_2(n), \ldots, y_L(n)\right]^T$ ćemo označiti sa $\mathbf{e}(n)$ i $\mathbf{y}(n)$, respektivno. U svakom od elemenata ovih vektora je vrijeme nezavisna promjenljiva. Oznaka T označava operaciju transponovanja. Relacije koje povezuju promjenljive stanja i ulazne promjenljive opisuju se skupom simultanih jednačina diferencija prvog reda, koje se označavaju kao sistem *jednačina stanja*.

Koristeći sistem jednačina stanja, vrijednosti promjenljivih stanja LTI sistema u trenutku $n+1$ se mogu iskazati na osnovu vrijednosti promjenljivih stanja i ulaznih promjenljivih u trenutku *n*. U matričnoj formi sistem jednačina stanja u domenu diskretnog vremena ima oblik:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{e}(n), \tag{4.44}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(n+1)$ vektor promjenljivih stanja u trenutku $n+1$, $\mathbf{x}(n)$ vektor promjenljivih stanja u trenutku *n*, $\mathbf{e}(n)$ vektor ulaznih signala u trenutku *n*, matrica **A** je kvadratna matrica stanja dimenzija $N \times N$ i matrica **B** je pravougaona matrica koeficijenata uz ulazne signale dimenzija $N \times M$.

Poznavajući promjenljive stanja, izlazne promjenljive sistema se mogu odrediti iz matrične jednačine:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{e}(n), \tag{4.45}$$

gdje su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrice dimenzija $L \times N$ i $L \times M$, respektivno, koje povezuju izlazne promjenljive sa promjenljivim stanja i ulaznim promjenljivim. Elementi matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ zavise od parametara i topologije sistema. Kod vremenski invarijantnih sistema elementi ovih matrica se ne mijenjaju u toku vremena.

4.5.2 Opis LTI sistema jednačinama diferencija višeg reda

Pri analizi i obradi signala vrlo često se posmatra jedan izlazni signal kao odziv na jedan ili više pobudnih signala. U takvim slučajevima se, umjesto jednačinama stanja, LTI sistemi mogu opisati jednom jednačinom diferencija višeg reda. Gledano matematički, sistem od *N* simultanih jednačina diferencija (4.44) prvog reda svodimo na jednu jednačinu diferencija *N*-tog reda, čiji je opšti oblik dat sa:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M), \tag{4.46}$$

u sažetom obliku zapisano kao:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \tag{4.47}$$

gdje je sa $x(n)$ označen ulazni, a sa $y(n)$ izlazni signal.

Posmatraćemo kauzalne sisteme, tako da je u (4.46) $N \geq 0$ i $M \geq 0$. Kod LTI sistema svi koeficijenti a_k i b_k imaju konstantne vrijednosti. Bez gubljenja opštosti može se usvojiti da je $a_0 = 1$. Ako bi neki od ovih koeficijenata zavisio od vremena, ponašanje sistema bi se u toku vremena mijenjalo. Kod takvih, vremenski zavisnih, sistema oblik odziva ne zavisi samo od oblika, već i od trenutka dovođenja pobude. U slučaju kada bi neki od koeficijenata jednačine diferencija bio zavisan od ulaznog ili izlaznog signala, sistem ne bi bio linearan.

Jednačina diferencija (4.47) je nehomogena jer je njena desna strana različita od nule. U opštem slučaju, desna strana jednačine diferencija zavisi od pobude koja sadrži trenutnu vrijednost ulaznog signala $x(n)$ i njegove prethodne vrijednosti $x(n-k),\ k = 1,2,\ldots,M$. Uz pretpostavku da je $a_0 \neq 0$, ako bi se sa desne strane jednačine diferencija pojavile buduće vrijednosti pobudnog signala

$x(n+k)$, $k>0$, tj. elementi ulazne sekvence čiji je indeks veći od n, tada bi sistem koji opisuje takva jednačina diferencija bio nekauzalan.

Ako su svi koeficijenti osim a_0 i b_0 jednaki nuli, jednačina diferencija (4.47) se svodi na algebarsku jednačinu koja opisuje sisteme bez memorije i koja se jednostavno rješava:

$$y(n)=\frac{b_0}{a_0}x(n)=Kx(n). \tag{4.48}$$

Za razliku od sistema bez memorije, realne kauzalne LTI sisteme sa memorijom analiziramo u konačnom vremenskom intervalu, koji je ograničen početnim trenutkom n_0, kada počinje pobuda, i nekim trenutkom $n>n_0$, u kom određujemo vrijednost odziva.

Za sisteme opisane jednačinama diferencija, kod kojih je bar jedan koeficijent a_k, $k>0$ različit od nule, kažemo da su *rekurzivni*, jer izlazni signal:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k) \tag{4.49}$$

zavisi ne samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, već i od prethodnih stanja na izlazu. U slučaju kad izlazni signal zavisi samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, a ne i od prethodnih stanja na izlazu, kažemo da se radi o *nerekurzivnom* sistemu. Tada su svi koeficijenti $a_k=0,\ k=1,2,...,N$, te jednačina diferencija poprima oblik:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k). \tag{4.50}$$

Impulsni odziv ovakvih sistema, koji jednostavno dobijemo uvrštavajući u (4.50) da je $x(n)=\delta(n)$, a $y(n)=h(n)$, je konačnog trajanja, sa elementima koji su jednaki koeficijentima b_k:

$$h(n)=\begin{cases} b_n, & 0\le n\le M, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{4.51}$$

Na osnovu trajanja impulsnog odziva, sisteme dijelimo na *sisteme sa konačnim impulsnim odzivom* (eng. *Finite Impulse Response* - FIR), i *sisteme sa beskonačnim impulsnim odzivom* (eng. *Infinite Impulse Response* - IIR). Iako nije eksplicitno naglašeno u nazivima ovih sistema, podrazumijeva se da se pojmovi "konačno" i "beskonačno" odnose na trajanje impulsnog odziva. Dok svi nerekurzivni sistemi imaju impulsni odziv konačnog trajanja, impulsni odziv rekurzivnih sistema je, osim u specijalnim slučajevima, beskonačnog trajanja. Zbog toga se često izjednačavaju pojmovi "sistem sa konačnim impulsnim odzivom" i "nerekurzivni sistem", kao i pojmovi "sistem sa beskonačnim impulsnim odzivom" i "rekurzivni sistem". Međutim, u specijalnim slučajevima, rekurzivni sistemi mogu imati konačno trajanje impulsnog odziva, te izjednačavanje ovih pojmova treba izbjegavati.

Ako želimo da eksplicitno iskažemo izlazni signal u zavisnosti od diskretnog vremena, neophodno je riješiti jednačinu diferencija. U nastavku ove Glave ćemo razmotriti iterativni i klasični postupak rješavanja jednačina diferencija.

4.5.3 Iterativni postupak rješavanja jednačina diferencija

Koristeći relacije (4.49) kod rekurzivnih ili (4.50) kod nerekurzivnih kauzalnih LTI sistema, iterativnim postupkom rješavanja jednačina diferencija mogu se odrediti vrijednosti izlaznog signala, ako su poznate trenutna i prethodne vrijednosti pobude, kao i prethodne vrijednosti izlaznog signala. Kod nekauzalnih LTI sistema su za određivanje odziva potrebne i buduće vrijednosti ulaznog signala. Postupak se svodi na korak po korak izračunavanje vrijednosti elemenata izlaznog signala za $n = 0,1,2,\ldots$ ili neke druge željene vrijednosti nezavisne promjenljive n. Pri tome je potrebno, u opštem slučaju jednačine diferencija date sa (4.46), poznavati N početnih vrijednosti izlaznog signala u trenucima prije dovođenja pobude, i M početnih vrijednosti pobude. Sam postupak ćemo pokazati na primjeru određivanja impulsnog odziva sistema na osnovu poznate jednačine diferencija.

Primjer 4.6:

Odrediti impulsni odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $2y(n)-y(n-1)=2x(n),\ n\geq 0$.

Rješenje:

Impulsni odziv je po definiciji odziv sistema na jedinični impuls pri nultom početnom stanju, pa možemo pisati:

$$x(n)=\delta(n)\Rightarrow y(n)=h(n), \tag{4.52}$$

$$2h(n)-h(n-1)=2\delta(n),\ n\geq 0. \tag{4.53}$$

Jednačina diferencija je prvog reda, pa je za njeno rješavanje potrebno poznavanje jednog početnog uslova za odziv, $h(-1)$. Budući da je LTI sistem kauzalan, i da prilikom određivanja impulsnog odziva pretpostavljamo da sistem sa nultim početnim stanjem, odziv neće postojati prije dovođenja pobude, te je:

$$h(n)=0,\ n<0. \tag{4.54}$$

Iterativnim postupkom izračunavamo vrijednosti izlaznog signala za $n=0,1,2,\ldots$

$n=0$:

$2h(0)-h(-1)=2\delta(0)$

$2h(0)-0=2$

$h(0)=1$

$n=1$:

$2h(1)-h(0)=2\delta(1)$

$2h(1)-1=0$

$h(1)=\frac{1}{2}$

$n=2$:

$2h(2)-h(1)=2\delta(2)$

$$2h(2)-\frac{1}{2}=0$$

$$h(2)=\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

U jednostavnim slučajevima, kao što je ovaj, iterativnim postupkom se može odrediti i opšti oblik rješenja. Matematičkom indukcijom se može dokazati da je, u ovom primjeru, opšte rješenje dato sa:

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n},\ n\geq 0\,. \tag{4.55}$$

□

4.5.4 Klasični postupak rješavanja jednačina diferencija

Rješenje jednačine diferencija se sastoji od *sopstvenog* i *prinudnog* odziva:

$$y(n)=y_s(n)+y_p(n)\,. \tag{4.56}$$

Prinudni odziv $y_p(n)$ je istog oblika kao pobuda i mora da zadovoljava datu jednačinu diferencija, dok sopstveni odziv $y_s(n)$ predstavlja rješenje homogene jednačine diferencija:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=0\,. \tag{4.57}$$

Sopstveni odziv je linearna kombinacija svih partikularnih rješenja homogene jednačine diferencija, koja se pretpostavljaju u obliku Kz^n. Nakon zamjene pretpostavljenog rješenja u homogenu jednačinu diferencija dobijamo:

$$a_0Kz^n+a_1Kz^{n-1}+\dots a_NKz^{n-N}=0\,, \tag{4.58}$$

odnosno:

$$Kz^{n-N}\left[a_0z^N+a_1z^{N-1}+\dots+a_{N-1}z+a_N\right]=0\,. \tag{4.59}$$

Zanimaju nas netrivijalna rješenja, pa iz (4.59) izdvajamo *karakterističnu jednačinu sistema*:

$$a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1} z + a_N = 0 . \qquad (4.60)$$

U slučaju da su svi korijeni karakteristične jednačine različiti, sopstveno rješenje ima oblik:

$$y_s(n) = K_1 z_1^n + K_2 z_2^n + \ldots + K_N z_N^n = \sum_{i=1}^{N} K_i z_i^n , \qquad (4.61)$$

gdje su K_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ konstante koje zavise od početnih uslova. Stoga je za kompletno rješavanje jednačine diferencija neophodno poznavati i početno stanje sistema u nekom trenutku.

U slučaju višestrukih korijena karakteristične jednačine, npr. ako je korijen z_1 reda *r*, tj. $z_1 = z_2 = \cdots = z_r$, pojedinačna rješenja homogene jednačine diferencija vezana za ovaj korijen karakteristične jednačine su oblika:

$$y_1(n) = K_1 n^{r-1} z_1^n ,\ y_2(n) = K_2 n^{r-2} z_1^n , \cdots , y_{r-1}(n) = K_{r-1} n z_1^n ,\ y_r(n) = K_r z_1^n . \qquad (4.62)$$

Opšti oblik sopstvenog odziva je u ovom slučaju dat sa:

$$y_s(n) = \sum_{i=1}^{r} K_i n^{r-i} z_1^n + \sum_{i=r+1}^{N} K_i z_i^n . \qquad (4.63)$$

Za slučaj više višestrukih korijena karakteristične jednačine u sopstveno rješenje se dodaju ovakvi članovi za svaki višestruki korijen.

Ako u trenutku formiranja u sistemu nije zatečeno nulto početno stanje, sopstveni odziv postoji i kada je pobudni signal jednak nuli, jer predstavlja rješenje homogene jednačine diferencija. Vanjska pobuda ne utiče na oblik sopstvenog odziva. Pojam "sopstveno" potiče od činjenice da oblici komponenata sopstvenog rješenja, $K_i z_i^n$, zavise samo od strukturne šeme i parametara sistema. Jedino konstante K_i zavise od pobudnog signala i zatečenog stanja u trenutku pobuđivanja ili formiranja sistema.

Prinudni odziv sistema se javlja pod uticajem pobude. Određuje se kao partikularno rješenje koje zadovoljava nehomogenu jednačinu diferencija. Prinudni odziv se određuje metodom neodređenih koeficijenata, tako što se

pretpostavi rješenje u istom obliku kao pobuda, u vidu linearne kombinacije članova koji se pojavljuju s desne strane jednačine diferencija. Pri tome su koeficijenti linearne kombinacije nepoznati i određuju se uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u nehomogenu jednačinu diferencija. Npr, ako je $x(n)=n^k$, partikularno rješenje se pretpostavlja u obliku $c_1n^{k-1}+c_2n^{k-2}+...+c_k$. Ako je $x(n)=a^n$, pri čemu a nije korijen karakteristične jednačine, patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku ca^n, a u obliku $c_1n^{r-1}a^n+c_2n^{r-2}a^n+c_3n^{r-3}a^n+...+c_ra^n$ kada je a jednako jednom od korijena karakteristične jednačine reda $r-1$. Pri tome su c_i, $i=1,2,\ldots,r$ koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u jednačinu diferencija.

Kompletan odziv jednak je zbiru sopstvenog i prinudnog odziva. U slučaju različitih korijena karakteristične jednačine, kompletan odziv je jednak:

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N}K_iz_i^n+y_p(n), \tag{4.64}$$

dok u slučaju višestrukih korijena prvi član, tj. sumu u (4.64), treba modifikovati shodno prethodnom izlaganju vezanom za oblik sopstvenog odziva u slučaju višestrukih korijena karakteristične jednačine.

Da bi sistem bio stabilan, odziv na ograničenu pobudu ne smije da neograničeno raste. Kasnije ćemo vidjeti da stabilnost LTI sistema zavisi od položaja korijena karakteristične jednačine u kompleksnoj ravni. Sistem će biti stabilan ako su korijeni takvi da svi članovi oblika $K_iz_i^n$ u (4.64) iščezavaju sa porastom vremena, jer će tada kompletan odziv postati jednak prinudnom odzivu, dakle poprimiće isti oblik kao pobuda. Kada sopstveni odziv potpuno iščezne uspostavlja se *ustaljeno stanje*. Zbog toga kažemo da sopstveni odziv opisuje *prelazni proces*.

U kompletnom rješenju neophodno je odrediti konstante K_i, kako bi ono bilo jednoznačno. Ove konstante se određuju na osnovu poznatih *N* početnih vrijednosti kompletnog odziva $y(0),y(1),...,y(N-1)$. Ako je umjesto ovih vrijednosti poznato zatečeno stanje u trenutku dovođenja pobude iskazano kroz početne uslove za odziv, $y(-N),y(-N+1),...,y(-1)$, iterativnim postupkom se

odredi prvih N elemenata odziva, za $n = 0,1,\ldots,N-1$. Zatim se formira sistem od N jednačina iz kojih se određuju nepoznate konstante K_i, $i = 1,2,...,N$:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} K_i z_i^n + y_p(n),\ n = 0,1,\ldots,N-1. \quad (4.65)$$

Iz (4.65) se da zaključiti da konstante K_i zavise od razlika početnih vrijednosti kompletnog i prinudnog odziva u trenucima $n = 0,1,\ldots,N-1$. U specijalnom slučaju, kada je $y(n) = y_p(n),\ n = 0,1,\ldots,N-1$, prelaznog procesa nema, jer su sve konstante K_i jednake nuli i ustaljeno stanje se uspostavlja odmah nakon dovođenja pobude. Važna su još dva specijalna slučaja: sistem sa nultim početnim stanjem i nepobuđen sistem. Kod sistema sa nultim početnim stanjem je N početnih vrijednosti odziva jednako nuli, što znači da je $y(-N) = y(-N+1) = ... = y(-1) = 0$. Tada konstante K_i i sopstveni odziv zavise samo od pobude. Kada je sistem nepobuđen, desna strana jednačine diferencija je jednaka nuli, što znači da je i partikularno rješenje jednako nuli. U ovom slučaju konstante K_i i sopstveni odziv zavise samo od zatečenog početnog stanja sistema.

Označimo sa K_{0i} konstante koje bismo odredili pri nepobuđenom sistemu, kada sopstveni odziv zavisi samo od zatečenog (početnog) stanja pri formiranju sistema, a sa K_{pi} konstante koje se dobiju kada je zatečeno nulto početno stanje i sopstveni odziv zavisi samo od pobude. Po principu superpozicije sopstveni odziv se može predstaviti kao zbir sopstvenog odziva nepobuđenog sistema i sopstvenog odziva na pobudu pri nultom početnom stanju:

$$y(n) = \left(\sum_{i=1}^{N} K_{0i} z_i^n + \sum_{i=1}^{N} K_{pi} z_i^n \right) + y_p(n). \quad (4.66)$$

Grupisanjem članova koji ne zavise od početnih uslova, (4.66) se može napisati u obliku:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} K_{0i} z_i^n + \left(\sum_{i=1}^{N} K_{pi} z_i^n + y_p(n) \right) = y_a(n) + y_e(n). \quad (4.67)$$

Na ovaj način smo kompletan odziv razdvojili na odziv nepobuđenog sistema, $y_a(n)=\sum_{i=1}^{N}K_{0i}z_i^n$, i odziv sistema pri nultom početnom stanju, $y_e(n)=\sum_{i=1}^{N}K_{pi}z_i^n+y_p(n)$, koji se sastoji od sopstvenog i prinudnog odziva.

4.5.5 Oblici sopstvenog odziva

Korijeni karakteristične jednačine su u opštem slučaju kompleksni brojevi:

$$z_i=\xi_i e^{j\omega_i}=\mathrm{Re}\{z_i\}\pm j\,\mathrm{Im}\{z_i\}, \tag{4.68}$$

$$\xi_i=\sqrt{\mathrm{Re}^2\{z_i\}+\mathrm{Im}^2\{z_i\}}, \tag{4.69}$$

$$\omega_i=\arctan\frac{\mathrm{Im}\{z_i\}}{\mathrm{Re}\{z_i\}}, \tag{4.70}$$

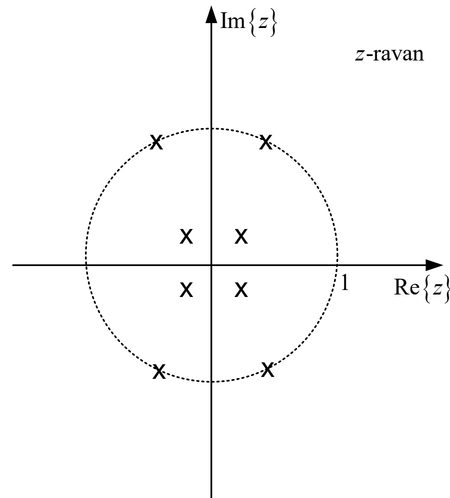
pa se odgovarajući članovi u sopstvenom odzivu mogu zapisati sa:

$$K_i z_i^n=K_i\xi_i^n e^{j\omega_i n}=K_i\xi_i^n\cos\omega_i n+jK_i\xi_i^n\sin\omega_i n. \tag{4.71}$$

Kod jednačina diferencija sa realnim koeficijentima korijeni karakteristične jednačine se pojavljuju u konjugovano kompleksnim parovima. Konjugovano kompleksne su i konstante u dijelu sopstvenog odziva koji potiče od para konjugovano kompleksnih korijena. Stoga je sopstveni odziv sistema realan.

Svaki par konjugovano kompleksnih korijena $z_i=\xi_i e^{j\omega_i}$ i $z_i^*=\xi_i e^{-j\omega_i}$ generiše dio sopstvenog odziva u obliku:

$$\begin{aligned}K_i z_i^n+K_i^*\left(z_i^*\right)^n&=\left|K_i\right|e^{j\varphi_i}\xi_i^n e^{j\omega_i n}+\left|K_i\right|e^{-j\varphi_i}\xi_i^n e^{-j\omega_i n}=\\&=\left|K_i\right|\xi_i^n e^{j(\omega_i n+\varphi_i)}+\left|K_i\right|\xi_i^n e^{-j(\omega_i n+\varphi_i)}\\&=2\left|K_i\right|\xi_i^n\cos\left(\omega_i n+\varphi_i\right),\end{aligned} \tag{4.72}$$



Slika 4.21 Primjer rasporeda sopstvenih učestanosti (označenih sa x) u kompleksnoj *z*-ravni.

gdje je: $K_k = |K_k| e^{j\varphi_k}$ i $K_k^* = |K_k| e^{-j\varphi_k}$. Primjer rasporeda korijena karakteristične jednačine u kompleksnoj z-ravni dat je na Slici 4.21.

Razmotrimo uticaj položaja korijena karakteristične jednačine na stabilnost kauzalnog sistema. U slučaju da je modul, ξ_i, nekog korijena karakteristične jednačine veći od jedan, sa porastom vremenske promjenljive *n* član sopstvenog odziva $z_i^n = \xi_i^n e^{j\omega_i n} = \xi_i^n \left(\cos\omega_i n + j\sin\omega_i n\right)$ poprima beskonačno veliku vrijednost, te je sistem nestabilan. Par jednostrukih konjugovano kompleksnih korijena karakteristične jednačine $z_i = e^{j\omega_i}$ i $z_i^* = e^{-j\omega_i}$, koje se nalaze na jediničnoj kružnici, generišu u sopstvenom odzivu prostoperiodične oscilacije oblika $\cos(\omega_i n + \varphi_i)$, sa konstantnom amplitudom. Takav sistem se nalazi na granici stabilnosti. Ako su korijeni na jediničnoj kružnici višestruki (reda $r+1,\ r \geq 1$), u sopstvenom odzivu se pojavljuju članovi oblika $n^r \cos(\omega_i n + \varphi_i)$, čija amplituda neograničeno raste s porastom vremena, pa je sistem nestabilan.

Primjer 4.7:

Odrediti odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$ za $n \geq 1$, pri čemu je početno stanje sistema opisano početnim uslovima $y(1)=1$ i $y(2)=2$.

Rješenje:

Desna strana jednačine diferencija je jednaka nuli, što znači da na ulaz sistema nije doveden ulazni signal, te se kompletan odziv sistema za $n \geq 1$ formira usljed zatečenog stanje prilikom formiranja sistema, koje je zadano početnim uslovima. Odziv nepobuđenog sistema je sopstveni odziv, a pronalazimo ga kao rješenje date homogene jednačine diferencija. Pretpostavljajući rješenje u obliku:

$$y(n)=y_a(n)=Kz^n, \tag{4.73}$$

nakon uvrštavanja u zadatu jednačinu diferencija, dobijamo:

$$Kz^n - Kz^{n-1} + Kz^{n-2} = 0, \tag{4.74}$$

$$Kz^{n-2}\left(z^2 - z + 1\right) = 0. \tag{4.75}$$

Rješenja karakteristične jednačine:

$$z^2 - z + 1 = 0 \tag{4.76}$$

su data sa:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{4.77}$$

Sopstveni odziv je oblika:

$$y(n) = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{4.78}$$

Izjednačimo vrijednosti izlaznog signala datog sa (4.78) za $n=1$ i $n=2$ sa poznatim početnim uslovima:

$$y(1)=K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=1, \tag{4.79}$$

$$y(2)=K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=2, \tag{4.80}$$

kako bismo odredili konstante K_1 i K_2:

$$K_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \tag{4.81}$$

$$K_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right). \tag{4.82}$$

Konačno, odziv je za $n\geq 1$ dat sa:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{4.83}$$

□

4.5.6 Određivanje impulsnog odziva iz jednačine diferencija

Prilikom određivanja impulsnog odziva kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija *N*-tog reda, za ulazni signal se uzima da je jednak $\delta(n)$. Posmatra se sistem sa nultim početnim stanjem, odnosno sa početnim uslovima jednakim nuli:

$$h(-N)=h(-N+1)=...=h(-1)=0\,. \tag{4.84}$$

Jednačinu diferencija uvijek možemo dopuniti članovima sa nultim koeficijentima, tako da postignemo da je $M=N-1$:

$$\begin{aligned}&h(n)+a_1h(n-1)+...+a_Nh(n-N)=\\&=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+...+b_{N-1}\delta(n-N+1).\end{aligned} \tag{4.85}$$

Prvih *N* elemenata impulsnog odziva dobija se iterativnim postupkom:

$$h(0)=b_0$$
$$h(1)+a_1h(0)=b_1$$
$$\vdots$$
$$h(N-1)+a_1h(N-2)+\ldots+a_{N-1}h(0)=b_{N-1}$$

Za $n\geq N$ impulsni odziv predstavlja rješenje homogene jednačine diferencija:

$$h(n)+a_1h(n-1)+\ldots+a_Nh(n-N)=0\,, \tag{4.86}$$

sa prethodno, iterativnim postupkom, određenim početnim uslovima $h(0),h(1),\ldots,h(N-1)$.

<u>Primjer 4.8:</u>

Odrediti impulsni odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)-x(n-1)$.

Rješenje:

Prilikom određivanja impulsnog odziva kauzalnog sistema, pretpostavlja se pobuda u obliku jediničnog impulsa i smatra se da su početni uslovi jednaki nuli:

$$x(n)=\delta(n)\Rightarrow y(n)=h(n)\,, \tag{4.87}$$

$$h(n)=0,\; n<0\,. \tag{4.88}$$

Tada jednačina diferencija koja opisuje dati sistem postaje:

$$h(n)-\frac{5}{6}h(n-1)+\frac{1}{6}h(n-2)=\delta(n)-\delta(n-1)\,. \tag{4.89}$$

Jednačina diferencija je drugog reda, te su potrebna dva početna uslova $h(-1)=0$ i $h(-2)=0$ za njeno rješavanje. Iterativnim postupkom se odrede vrijednosti prva dva elementa odziva:

$n = 0$:

$$h(0) - \frac{5}{6}h(-1) + \frac{1}{6}h(-2) = \delta(0) - \delta(-1)$$

$$h(0) - \frac{5}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 = 1 - 0$$

$$h(0) = 1$$

$n = 1$:

$$h(1) - \frac{5}{6}h(0) + \frac{1}{6}h(-1) = \delta(1) - \delta(0)$$

$$h(1) - \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 = 0 - 1$$

$$h(1) = -\frac{1}{6}$$

.

Za $n \geq 2$ jednačina diferencija postaje homogena:

$$h(n) - \frac{5}{6}h(n-1) + \frac{1}{6}h(n-2) = 0, \tag{4.90}$$

te njeno rješavanje ide sljedećim tokom:

$$Kz^n - \frac{5}{6}Kz^{n-1} + \frac{1}{6}Kz^{n-2} = 0, \tag{4.91}$$

$$Kz^{n-2}\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right) = 0, \tag{4.92}$$

$$z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2},\ z_2 = \frac{1}{3}, \tag{4.93}$$

$$h(n) = K_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^n. \tag{4.94}$$

Na osnovu izračunatih vrijednosti impulsnog odziva za $n = 0$ i $n = 1$ određujemo konstante K_1 i K_2:

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= K_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \\ h(1) &= K_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_1 = -3,\ K_2 = 4\,. \tag{4.95}$$

Impulsni odziv sistema opisanog datom jednačinom diferencija je:

$$h(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ n \geq 0\,. \tag{4.96}$$

□

4.6 Odziv LTI sistema na kompleksnu eksponencijalnu pobudu

Posmatranje karakteristika sistema prilikom pobude kompleksnim eksponencijalnim signalima, tj. karakterizacija sistema u frekvencijskom domenu, veoma je važna za obradu signala. Na primjer, poznavanje frekvencijskih karakteristika sistema nam pri filtriranju signala olakšava sagledavanje kako pojedinačne frekvencijske komponente, sadržane u signalu, bivaju pojačane ili oslabljene pri prolasku kroz sistem. Široka klasa signala se može predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih kompleksnih eksponencijalnih signala, što nam omogućava da odzive na signale složenih oblika odredimo kao linearnu kombinaciju odziva na ove elementarne signale.

4.6.1 Funkcija prenosa LTI sistema

Ako na ulaz diskretnog sistema, čiji je impulsni odziv $h(n)$, dovedemo kompleksni eksponencijalni signal $x(n) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, signal na izlazu sistema će biti jednak:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}\right]z^n . \quad (4.97)$$

Primijetimo da na izlazu sistema imamo isti oblik signala kao na njegovom ulazu, tj. kompleksni eksponencijalni signal, samo pomnožen sa faktorom:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} , \quad (4.98)$$

koji nazivamo *funkcija prenosa* LTI sistema. Pobudna funkcija za koju LTI sistem ima odziv istog oblika kao pobuda naziva se *sopstvena diskretna funkcija sistema.*

Funkcija prenosa nije definisana u domenu diskretnog vremena, već je kompleksna funkcija kompleksne promjenljive *z*. Ona opisuje način kako diskretni sistem transformiše kompleksni eksponencijalni signal. Nakon što smo definisali funkciju prenosa, odziv LTI sistema na pobudu oblika $x(n) = z^n$ možemo zapisati sa:

$$y(n) = H(z)z^n . \quad (4.99)$$

Iako se oblik signala pri pobudi LTI sistema kompleksnim eksponencijalnim signalom $x(n) = z^n$ ne mijenja, amplituda izlaznog signala je, u odnosu na amplitudu ulaznog signala, pomnožena konstantom $|H(z)|$. Uz to je izlazni signal fazno pomjeren u odnosu na ulazni signal za $\arg H(z)$. Modul, $|H(z)|$, i argument, $\arg H(z)$, funkcije prenosa $H(z)$ zavise od kompleksne vrijednosti *z*, te sistem na različite načine modifikuje pobudne signale oblika z^n, za različite vrijednosti *z*. Funkciju prenosa diskretne mreže možemo odrediti iz jednačine diferencija, što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 4.9:

Odrediti funkciju prenosa LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $2y(n)+3y(n-1)+4y(n-2)=5x(n)$.

Rješenje:

Kako bismo odredili funkciju prenosa, pretpostavimo da je ulazni signal jednak sopstvenoj diskretnoj funkciji sistema:

$$x(n)=z^n,\ z\in\mathbb{C}. \tag{4.100}$$

Tada je odziv dat sa:

$$y(n)=H(z)z^n. \tag{4.101}$$

Uvrštavanjem izraza (4.100) i (4.101) za ulazni i izlazni signal, respektivno, u datu jednačinu diferencija, dobijamo funkciju prenosa LTI sistema kroz sljedećih nekoliko koraka:

$$2H(z)z^n+3H(z)z^{n-1}+4H(z)z^{n-2}=5z^n, \tag{4.102}$$

$$H(z)\left[2z^n+3z^{n-1}+4z^{n-2}\right]=5z^n, \tag{4.103}$$

$$H(z)=\frac{5}{2+3z^{-1}+4z^{-2}}. \tag{4.104}$$

□

4.6.2 Frekvencijska karakteristika LTI sistema

Pretpostavimo da LTI sistem sa impulsnim odzivom $h(n)$ pobuđujemo kompleksnim sinusnim signalom $x(n)=e^{j\omega n}$, $-\infty<n<\infty$. Odziv sistema je kompleksni sinusni signal iste učestanosti, ali su njegova amplituda i faza promijenjene:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{j\omega(n-k)}=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\right]e^{j\omega n}. \tag{4.105}$$

Način kako se mijenjaju amplituda i faza kompleksnog sinusnog signala pri prolasku kroz sistem određen je *frekvencijskom karakteristikom* sistema:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h\left(k\right)e^{-j\omega k}, \tag{4.106}$$

jer vidimo da, sa ovako definisanom frekvencijskom karakteristikom, odziv sistema na kompleksni sinusni signal možemo izraziti na sljedeći način:

$$y\left(n\right)=H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}. \tag{4.107}$$

Frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija digitalne učestanosti ω:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)}. \tag{4.108}$$

Modul frekvencijske karakteristike je *amplitudna karakteristika* sistema i ona utiče na promjenu amplitude pri prolasku kompleksnog sinusnog signala kroz sistem, dok argument frekvencijske karakteristike predstavlja *faznu karakteristiku* sistema, koja određuje fazni pomak izlaznog signala u odnosu na ulazni signal.

Ako pobudni sinusni signal napišemo kao linearnu kombinaciju dva kompleksna sinusna signala:

$$x\left(n\right)=\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}, \tag{4.109}$$

odziv možemo izraziti kao:

$$\begin{aligned}y\left(n\right)&=\frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\omega_0 n}=\\&=\frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\arg H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}\left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|e^{j\arg H\left(e^{-j\omega_0}\right)}e^{-j\omega_0 n}.\end{aligned} \tag{4.110}$$

Kod sistema sa realnim impulsnim odzivom vrijedi da je:

$$H^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h\left(k\right)e^{j\omega k}, \tag{4.111}$$

$$H\left(e^{-j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h\left(k\right)e^{j\omega k}, \tag{4.112}$$

odakle zaključujemo da je:

$$H\left(e^{-j\omega}\right)=H^*\left(e^{j\omega}\right). \tag{4.113}$$

Zbog toga je amplitudna karakteristika realnih sistema parna:

$$\left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|=\left|H^*\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|, \tag{4.114}$$

a fazna karakteristika neparna funkcija digitalne učestanosti ω:

$$\arg H\left(e^{-j\omega}\right)=\arg H^*\left(e^{j\omega}\right)=-\arg H\left(e^{j\omega}\right). \tag{4.115}$$

Koristeći (4.114) i (4.115), odziv sistema na sinusnu pobudu, dat sa (4.110), možemo napisati u jednostavnijem obliku:

$$\begin{aligned} y(n)&=\frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\arg H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\arg H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{-j\omega_0 n}=\\ &=\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n+\arg H\left(e^{j\omega_0}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.116}$$

Sada jasno vidimo da se amplituda sinusnog signala, pri prolasku kroz LTI sistem, množi vrijednošću amplitudne karakteristike na digitalnoj učestanosti ω_0, koja odgovara učestanosti pobudnog signala, tj. Sa $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$. Izlazni i ulazni signal su međusobno fazno pomjereni za vrijednost fazne karakteristike na učestanosti ω_0, određenoj sa $\arg H\left(e^{j\omega_0}\right)$. Frekvencija sinusnog signala se ne mijenja pri prolasku kroz LTI sistem.

Frekvencijska karakteristika se može dobiti iz funkcije prenosa, uvođenjem smjene $z=e^{j\omega}$:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=H\left(e^{j\omega}\right). \tag{4.117}$$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sistema je kontinualna periodična funkcija digitalne učestanosti ω sa osnovnim periodom 2π, jer je:

$$H\left(e^{j(\omega+2m\pi)}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j(\omega+2m\pi)k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}e^{-j2m\pi k}=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}=H\left(e^{j\omega}\right),\ m\in\mathbb{Z}. \tag{4.118}$$

Frekvencijska karakteristika sistema se uobičajeno posmatra na intervalu od $-\pi$ do π. Zbog periodičnosti sa periodom 2π, ako je frekvencijska karakteristika $H\left(e^{j\omega}\right)$ poznata za digitalne učestanosti ω od $-\pi$ do π, onda je poznata i za svaku vrijednost digitalne učestanosti ω.

4.7 Korelacija signala

Korelacija signala ukazuje na njihovu sličnost u zavisnosti od pomjeraja jednog signala u odnosu na drugi. Ukoliko se radi o korelaciji različitih signala govorimo o kroskorelaciji. Autokorelacija je korelacija signala sa samim sobom. Iako se kroskorelacija i autokorelacija mogu definisati i za kompleksne signale, mi ćemo se ograničiti na rad sa realnim signalima.

Jednodimenzionalna diskretna funkcija definisana sa:

$$r_{xs}(n)=x(n)\star s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)s(k-n),\ n=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{4.119}$$

ili, ekvivalentno, sa:

$$r_{xs}(n)=x(n)\star s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n+k)s(k),\ n=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{4.120}$$

naziva se *kroskorelacija* signala $x(n)$ i $s(n)$.

Slično kao kod konvolucije, prilikom izračunavanja kroskorelacije $r_{xs}(n)$, date sa (4.119), u nekom trenutku *n*, signal $s(k)$ se pomjera u odnosu na signal $x(k)$ za *n* jedinica diskretnog vremena, zatim se signali $x(k)$ i $s(k-n)$ množe član po član i izračunava se suma tako dobijenih proizvoda. Kada je *n* pozitivno,

signal $s(k)$ se pomjera udesno, a za *n* negativno ulijevo. Ekvivalentan rezultat se dobija ako signal $s(k)$ miruje, a preko njega se pomjera signal $x(k)$ u suprotnom smjeru, za *n* pozitivno ulijevo, a za *n* negativno udesno, na što ukazuje (4.120).

Ako zamijenimo uloge signala $x(n)$ i $s(n)$ dobićemo kroskeralaciju signala $s(n)$ i $x(n)$ definisanu sa:

$$r_{sx}(n) = s(n) \star x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)x(k-n), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{4.121}$$

ili sa:

$$r_{sx}(n) = s(n) \star (n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(n+k)x(k), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.122}$$

Sada se za *n* pozitivno signal $x(k)$ pomjera udesno, a za *n* negativno ulijevo u odnosu na signal $s(k)$, ili se signal $s(k)$ za *n* pozitivno pomjera ulijevo, a za *n* negativno udesno u odnosu na signal $x(k)$. Vidimo da redoslijed indeksa kroskorelacije ukazuje na smjer u kom se jedan signal pomjera u odnosu na drugi. Tako se, na primjer, za *n* pozitivno, kod kroskorelacije $r_{xs}(n)$ signal $s(k)$ pomjera udesno, a kod kroskorelacije $r_{sx}(n)$ ulijevo u odnosu na signal $x(k)$.

Pri izračunavanju kroskorelacije obično se signal kraćeg trajanja (uzorak) prevlači preko ispitivanog signala u kom tražimo sličnost sa uzorkom. Ako u ispitivanom signalu postoji segment identičan uzorku, vrijednost kroskorelacije će biti najveća kada se prilikom pomjeranja uzorak preklopi sa tim segmentom ispitivanog signala, jer tada proizvodu član po član odgovara kvadriranje elemenata uzorka. Velika pozitivna vrijednost kroskorelacije će se dobiti i za one vrijednosti pomjeraja *n* za koje se uzorak preklapa sa segmenima koji su mu slični. Budući da vrijedi da je:

$$r_{xs}(n) = r_{sx}(-n), \tag{4.123}$$

sa stanovišta utvrđivanja sličnosti signala, svejedno je koji od navedenih definicionih izraza za kroskerelaciju se koristi.

Autokorelacija definisana sa:

$$r_{xx}(n) = x(n) \star x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k), \tag{4.124}$$

ukazuje na postojanje sličnosti u samom signalu. Primijetimo da je autokorelacija parna diskretna funkcija.

Za signale energije, autokorelacija u nuli je jednaka ukupnoj energiji signala:

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = E_x. \tag{4.125}$$

Autokorelacija poprima maksimalnu vrijednost kada je pomjeraj signala jednak nuli, jer se u tom slučaju, prije sumiranja, sve vrijednosti signala kvadriraju. Kako bismo dokazali da je vrijednost autokorelacije najveća u nuli, pođimo od nejednakosti:

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k)\right| \le \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_1(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_2(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.126}$$

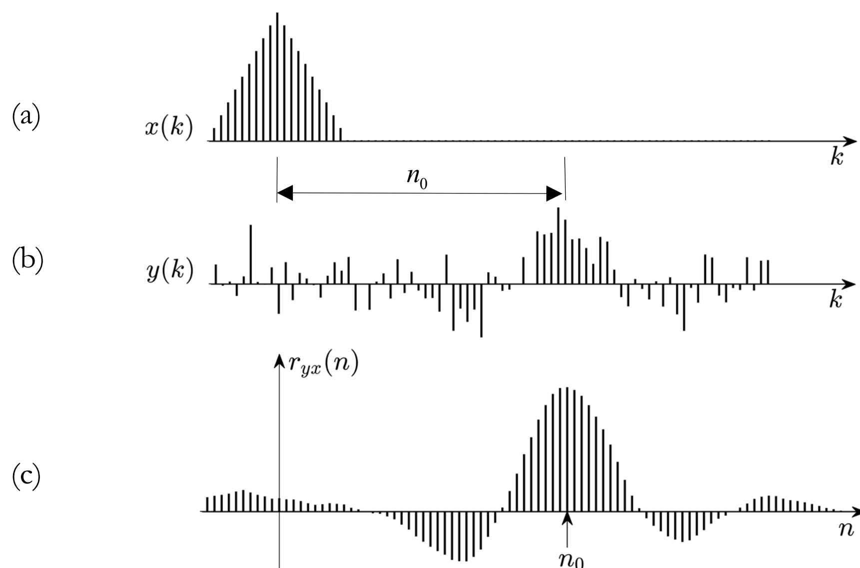
Primijenimo nejednakost (4.123) na definicioni izraz za autokorelaciju (4.121):

$$\begin{aligned} |r_{xx}(n)| &= \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k)\right| \le \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(n+k)\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = r_{xx}(0). \end{aligned} \tag{4.127}$$

Pri tome smo koristili činjenicu da konačni pomjeraj signala duž vremenske ose ne utiče na vrijednost sume elemenata tog signala, kada se suma računa od $-\infty$ do ∞. Dakle, vrijedi da je:

$$|r_{xx}(n)| \le r_{xx}(0). \tag{4.128}$$

Korelacija se često koristi u radarskim i sonarnim sistemima za detekciju i praćenje objekata. Pri tome predajnik šalje signal $x(n)$ poznatog oblika, a prijemnik registruje reflektovani signal, $y(n)$, koji je u odnosu na signal $x(n)$ oslabljen i izobličen šumom. Koristeći kroskorelaciju primljenog signala $y(n)$



Slika 4.22 Kroskorelacija signala: (a) signal predajnika; (b) reflektovani signal i (c) kroskorelacija ova dva signala.

sa signalom $x(n)$, moguće je odrediti vremensko kašnjenje reflektovanog signala u odnosu na signal koji je poslao predajnik, što omogućava detekciju objekata i određivanje njihove udaljenosti, brzine i smjera kretanja.

Na Slici 4.22 dat je primjer kroskorelacije signala koji šalje predajnik, $x(n)$, sa reflektovanim signalom, $y(n)$, koji je u odnosu na signal predajnika zakašnjen za neko n_0, oslabljen i izobličen šumom. Ako pretpostavimo da se radi o aditivnom šumu $z(n)$, a sa α označimo koeficijent slabljenja signala, primljeni reflektovani signal možemo predstaviti na sljedeći način:

$$y(n) = \alpha x(n - n_0) + z(n). \tag{4.126}$$

Napravimo li kroskorelaciju reflektovanog signala sa signalom koji šalje predajnik dobijamo:

$$
\begin{aligned}
r_{yx}(n) &= y(n) \star x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(k-n) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\alpha x(k-n_0) + z(k)\right] x(k-n) = \\
&= \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-n_0)x(k-n) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k)x(k-n) = \\
&= \alpha r_{xx}(n-n_0) + r_{zx}(n).
\end{aligned}
\tag{4.127}
$$

Primijetimo da se kroskorealcija signala $y(n)$ i $x(n)$ sastoji od dvije komponente: autokorelacije signala $x(n)$, koja je pomjerena u vremenu za iznos vremenskog kašnjenja signala n_0 i kroskorelacije šuma $z(n)$ i signala $x(n)$. Šum je slučajni signal, te je njegova sličnost sa signalom $x(n)$, izražena kroz kroskorelaciju $r_{zx}(n)$, zanemarljiva u odnosu na vršnu vrijednost autokorelacije $\alpha r_{xx}(n-n_0)$, koja nastupa za $n = n_0$. Stoga detekcijom maksimuma kroskorelacije $r_{yx}(n)$ možemo odrediti vremensko kašnjenje reflektovanog signala u odnosu na signal koji šalje predajnik.

U digitalnim telekomunikacijama korelacija se koristi za detekciju simbola i sinhronizaciju. Predajnik šalje sekvencu formiranu konkatenacijom signala $x_0(n)$ i $x_1(n)$, kojima se predstavljaju binarna nula i jedinica, respektivno. Prijemnik poznaje oba signala, $x_0(n)$ i $x_1(n)$, i određuje njihove kroskorelacije sa primljenim signalom. U vremenskim trenucima gdje se nalaze maksimumi kroskorelacije primljenog signala sa $x_0(n)$ detektuje se binarna nula, a tamo gdje su maksimumi kroskorelacije primljenog signala sa $x_1(n)$ detektuje se binarna jedinica. Na taj način se iz primljenog signala, koji je zakašnjen, oslabljen i izobličen šumom, rekonstruiše digitalni signal. U cilju ostvarivanja vremenske sinhronizacije predajnika i prijemnika, kako bi označio početak slanja važećih podataka, prijemnik umeće sinhronizacionu sekvencu, uzorak signala koji je poznat i prijemniku, na početku svakog okvira podataka. Prijemnik računa kroskorelaciju primljenog signala sa sinhronizacionom sekvencom i sinhronizacija je postignuta kada vrijednost te korelacije premaši zadani prag.

Pri analizi i obradi signala, kroskorelacija se često koristi za prepoznavanje uzoraka pri obradi govora, slike, biometrijskih signala, kao što su otisak prsta i dužica oka, seizmoloških podataka, detekciji anomalija pri monitoringu životne sredine, finansijskim analizama i u mnogim drugim oblastima. Uzorak koji želimo da pronađemo se pomjera i preklapa (množi) sa ispitivanim signalom. Vrijednost kroskorelacije uzorka i ispitivanog signala je velika za one vrijednosti pomaka uzorka pri kojima uzorak i analizirani signal postaju jednaki ili veoma slični.

Definicioni izraz za kroskorelaciju formalno je veoma sličan definicionom izrazu za konvoluciju, samo što se pri računanju kroskorelacije ne radi vremenska inverzija. Veza kroskorelacije i konvolucije se može iskazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} r_{xs}(n) = x(n) \star s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\, x(n+m)\Big|_{m \to -k} &= \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(-k)\, x(n-k) = s(-n) * x(n).& \end{aligned} \tag{4.128}$$

U slučaju parnih signala, kroskorelacija signala je jednaka njihovoj konvoluciji. Iako su definicioni analitički izrazi za konvoluciju i kroskorelaciju veoma slični, njihovo suštinsko značenje, pa stoga i primjene se veoma razlikuju. Dok konvoluciju uglavnom koristimo za određivanje odziva LTI sistema, kroskorelacija predstavlja mjeru sličnosti dva signala. Obje operacije se koriste i u domenu vještačke inteligencije, kroskorelacija za prepoznavanje uzoraka, dok je konvolucija postala sastavni dio konvolucionih neuronskih mreža.

Glava 5

$\mathcal{Z}$- TRANSFORMACIJA I NJENE PRIMJENE U ANALIZI DISKRETNIH SISTEMA

U karakterizaciji sistema i praktičnim primjenama analize i obrade signala nezaobilazne su transformacione tehnike, bilo da se radi u kontinualnom ili diskretnom domenu. U ovoj glavi ćemo uvesti z-transformaciju, opisati njene osobine i mogućnosti primjene u analizi diskretnih LTI sistema. Primjenom z-transformacije na jednačinu diferencija višeg reda, ili na jednačine stanja, određivanje kompletnog odziva sistema, koji uključuje odziv na pobudu i odziv nepobuđenog sistema, usljed zatečenog stanja, se znatno pojednostavljuje u odnosu na rješavanje ovog zadatka u vremenskom domenu. Pokazaćemo da je u domenu z-transformacije (kompleksnoj z-ravni) vremenska konvolucija dva signala ekvivalentna množenju njihovih z-transformacija. Ova osobina je veoma korisna prilikom analitičkog određivanja odziva LTI sistema na proizvoljan oblik pobude. Pored toga, vidjećemo kako z-transformaciju koristimo za opis i analizu složenih LTI diskretnih sistema.

5.1 Bilateralna z - transformacija

z-transformacija diskretnog signala $x(n)$ se definiše kao stepeni red:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}, \tag{5.1}$$

gdje je z kompleksna promjenljiva. Dakle, po definiciji, z-transformacija je pravilo na osnovu kojeg se niz brojeva, realnih ili kompleksnih, kojim je predstavljen diskretni signal $x(n)$ u vremenskom domenu, preslikava u kompleksnu funkciju kompleksne promjenljive $X(z)$. Relacija (5.1) se naziva *direktna z-transformacija*, dok se relacija kojom se diskretni signal $x(n)$ iskazuje preko $X(z)$ naziva *inverzna z-transformacija*. Po konvenciji se z-transformacija označava sa:

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x(n)\}, \tag{5.2}$$

a inverzna z-transformacija sa:

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}. \tag{5.3}$$

Transformacioni par z-transformacije označavamo na sljedeći način:

$$x(n)\leftrightarrow X(z). \tag{5.4}$$

Izraz (5.1) zapravo predstavlja Loranov red, pa se $X(z)$ može odrediti samo za one vrijednosti kompleksne promjenljive z za koje Loranov red konvergira. Tada $|X(z)|$ ima konačnu vrijednost. Skup vrijednosti promjenljive z za koje Loranov red (5.1) konvergira naziva se *oblast konvergencije z-transformacije*, dok se skup vrijednosti promjenljive z za koje taj red divergira naziva *oblast divergencije z-transformacije*.

Signal $x(n)$ konačnog trajanja $N_1 \le n \le N_2$ ima z-transformaciju koja konvergira u cijeloj z-ravni, ako svi njegovi elementi imaju konačne vrijednosti:

$$\left|x(n)\right| < \infty, \; N_1 \le n \le N_2 . \tag{5.5}$$

Iz oblasti konvergencije se jedino isključuju tačka u beskonačnosti, ako je $N_1 < 0$, i/ili tačka u nuli, ako je $N_2 > 0$, jer za te vrijednosti kompleksne promjenljive *z*:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n) z^{-n} , \tag{5.6}$$

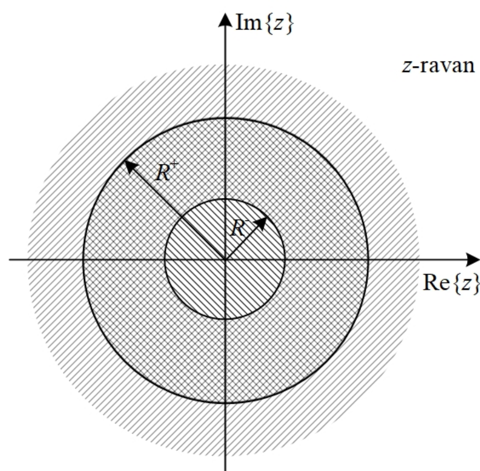
poprima beskonačno veliku vrijednost.

Problem određivanja oblasti konvergencije za signale neograničenog trajanja je složeniji. Stavljajući da je $z = re^{j\theta}$, modul *z*-transformacije se može zapisati sa:

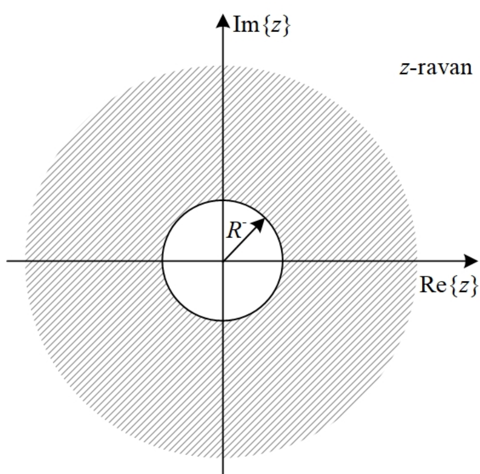
$$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n) r^{-n}\right| , \tag{5.7}$$

$$\left|X(z)\right| \le \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|x(n) r^{-n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|x(n) r^{-n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|x(-n) r^{n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|x(n) r^{-n}\right| . \tag{5.8}$$

Egzistencija $X(z)$ zavisi od konvergencije posljednje dvije sume u (5.8). Ako postoji neko $r = R^+$, dovoljno malo da prva suma konvergira, odnosno da signal $\left|x(-n) r^n\right|$ bude apsolutno sumabilan za $1 \le n < \infty$, onda ta suma konvergira i za svako $r < R^+$. S druge strane, ako postoji neko $r = R^-$, dovoljno veliko da druga suma konvergira, odnosno da signal $\left|x(n) r^{-n}\right|$ bude apsolutno sumabilan za $0 \le n < \infty$, onda ta suma konvergira i za svako $r > R^-$. Sa $z = re^{j\theta}, \; r = const.$ je određena kružnica u *z*-ravni sa poluprečnikom *r*, pa možemo reći da je oblast konvergencije prve sume unutrašnjost kruga poluprečnika R^+, dok je oblast konvergencije druge sume spoljašnjost kruga poluprečnika R^-. Za egzistenciju *z*-transformacije neophodno je da obe ove sume konvergiraju, te je oblast konvergencije *z*-transformacije prsten određen sa $R^- < |z| < R^+$. Na Slici 5.1 oblast konvergencije prve sume je šrafirana kosim linijama pod uglom od 135°, a oblast konvergencije druge sume kosim linijama pod uglom od 45°. Presjek ove dvije oblasti je oblast konvergencije *z*-transformacije $X(z)$. U svakoj tački iz oblasti konvergencije *z*-transformacija $X(z)$ i sve njene derivacije su kontinualne funkcije promjenljive *z*. Za kauzalne signale, kod kojih je $x(n) = 0$

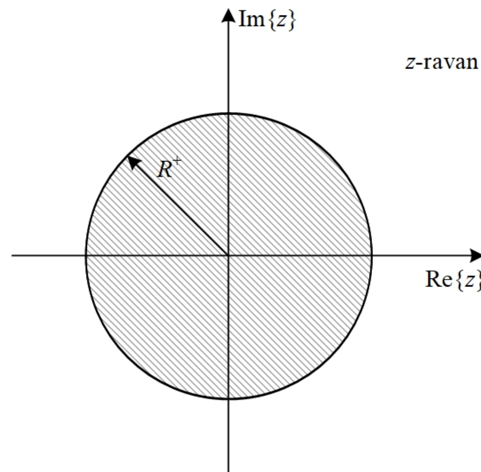


Slika 5.1 Oblast konvergencije *z*-transformacije.



Slika 5.2 Oblast konvergencije *z*-transformacije kauzalnog signala.

za $n<0$, elementi signala u prvoj sumi su jednaki nuli, te je dovoljno ispuniti uslov konvergencije druge sume. Stoga je oblast konvergencije kauzalnih signala spoljašnjost kruga poluprečnika R^-, tj. $|z|>R^-$, prikazana na Slici 5.2. Na sličan način, oblast konvergencije antikauzalnih signala, za koje vrijedi da je $x(n)=0$



Slika 5.3 Oblast konvergencije z-transformacije antikauzalnog signala.

za $n > 0$, je unutrašnjost kruga poluprečnika R^{+}, tj. $|z| < R^{+}$, jer su u tom slučaju elementi signala u drugoj sumi jednaki nuli i dovoljno je da prva suma bude apsolutno sumabilna. Oblast konvergencije antikauzalnih signala prikazana je na Slici 5.3. Vrijednosti promjenljive z za koje je z-transformacija $X(z)$ beskonačno velika nazivaju se *polovima*, a one za koje je jednaka nuli *nulama* z-transformacije $X(z)$. U grafičkom prikazu rasporeda polova i nula u kompleksnoj z-ravni polovi se označavaju sa "x", a nule sa "o".

Preslikavanje koje se vrši z-transformacijom nije jednoznačno ako se ne uzme u obzir oblast konvergencije. Na primjerima elementarnih signala pokazaćemo kasnije da su analitički izrazi za z-transformacije nekih od kauzalnih signala $x(n)u(n)$ i njihovih antikauzalnih pomjerenih verzija $-x(-n-1)u(-n-1)$ identične. Međutim, oblasti konvergencije tih signala su različite. Prema tome, z-transformacija je jednoznačno preslikavanje i diskretni signal $x(n)$ je jednoznačno određen svojom z-transformacijom $X(z)$ samo ukoliko je poznata i oblast konvergencije $X(z)$.

Kod *z*-transformacije definisane sa (5.1) granice sume su od $-\infty$ do ∞, pa ovako definisanu *z*-transformaciju ponekad nazivamo i *bilateralna z-transformacija*. U narednom podpoglavlju ćemo uvesti i *unilateralnu z-transformaciju*, koja je definisana sumom istog oblika, ali sa granicama od nule do beskonačnosti.

5.2 Unilateralna *z* - transformacija

U praksi je signal $x(n)$ poznat tek nakon nekog trenutka kada počinje njegovo posmatranje. Taj trenutak najčešće označavamo sa $n=0$. U tom slučaju nije moguće koristiti definicioni izraz za bilateralnu *z*-transformaciju, jer ne znamo vrijednosti signala $x(n)$ za $n<0$. Zbog toga je potrebno definisati jednostranu, odnosno, *unilateralnu*, *z-transformaciju*, sa:

$$\mathcal{Z}_+\left\{x(n)\right\}=X_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}\,. \tag{5.9}$$

Najvažnija primjena unilateralne *z*-transformacije je određivanje odziva LTI sistema sa poznatim početnim stanjem, koje je opisano početnim uslovima. Za rješavanje tih problema nije moguće koristiti bilateralnu *z*-transformaciju jer ne poznajemo niti pobudu, niti stanje sistema (izuzev početnih uslova) za $n<0$.

Za konvergenciju unilateralne z-transformacije, na osnovu:

$$\left|X_+(z)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}\right|\le\sum_{n=-0}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|<\infty\,, \tag{5.10}$$

vidimo da treba osigurati apsolutnu sumabilnost signala $\left|x(n)r^{-n}\right|$, te je oblast konvergencije unilateralne *z*-transformacije uvijek spoljašnjost kruga poluprečnika $r=R^-$, koji je dovoljno velik da (5.10) konvergira.

Bilateralna z-transformacija kauzalnog signala $x_+(n)$, koji je za $n<0$ jednak nuli, a za $n \geq 0$ posmatranom signalu $x(n)$:

$$x_+(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

jednaka je unilateralnoj z-transformaciji signala $x(n)$:

$$\mathcal{Z}\{x_+(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_+(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \mathcal{Z}_+\{x(n)\} = X_+(z). \tag{5.12}$$

Stoga se računanje *inverzne unilateralne z-transformacije* od $X_+(z)$ svodi na računanje inverzne bilateralne z-transformacije i zadržavanje samo dijela signala za $n \geq 0$:

$$x_+(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X_+(z)\},\ n \geq 0. \tag{5.13}$$

Uglavnom se posebno ne naglašava da li se koristi bilateralna ili unilateralna z-transformacija, niti se uvode posebne oznake, kao što smo to radili u okviru ovog poglavlja. Koji oblik z-transformacije se koristi jasno je iz samog konteksta. Stoga ćemo u daljem izlaganju u oba slučaja koristiti oznake uvedene kod bilateralne, neovisno da li se radi o bilateralnoj ili unilateralnoj z-transformaciji.

5.3 Inverzna z - transformacija

Prilikom korištenja z-transformacije, nakon obrade signala u transformacionom domenu, potrebno je odrediti inverznu z-transformaciju, te na taj način dobiti rezultujući signal u domenu diskretnog vremena. Kako bismo došli do izraza za inverznu z-transformaciju, pomnožimo definicioni izraz (5.1) sa z^{k-1}, pa odredimo krivolinijski integral čija se kontura integracije C nalazi u oblasti konvergencije z-transformacije:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n+k-1}dz\,. \tag{5.14}$$

Budući da je na konturi integracije osigurana konvergencija *z*-transformacije, možemo zamijeniti redoslijed integraljenja i sumiranja:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-(n-k+1)}dz\,. \tag{5.15}$$

Na osnovu Košijeve teoreme znamo da je:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-k}dz = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0 & k\neq 1. \end{cases} \tag{5.16}$$

Stoga su svi integrali pod sumom u (5.15) jednaki nuli, osim za $n=k$, te dobijamo da je:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = x(k)\,. \tag{5.17}$$

Na kraju, napravimo zamjenu $k\to n$, kako bismo dobili uobičajen oblik zapisa inverzne *z*-transformacije:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz\,. \tag{5.18}$$

Analitičko izračunavanje krivolinijskih integrala nije jednostavno, te se u praksi koriste drugi metodi određivanja inverzne *z*-transformacije, koji će biti detaljno izloženi u Poglavlju 5.6.

5.4 *z*- transformacije elementarnih signala

U ovom poglavlju odredićemo *z*-transformacije elementarnih signala, kao što su jedinični impuls, Hevisajdova sekvenca i kompleksni eksponencijalni signal, kao i *z*-transformacije drugih signala koje se iz njih lako odrede, a značajne su za daljnje izlaganje i u praktičnim primjenama.

Za jedinični impuls z-transformacija se odredi veoma jednostavno. Budući da je $\delta(n)=0$ za svaku vrijednost *n*, osim za $n=0$, vrijedi da je:

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1. \tag{5.19}$$

Kako se radi o signalu konačnog trajanja, tačnije o samo jednom elementu signala u trenutku $n=0$, z-transformacija jediničnog impulsa konvergira u cijeloj *z*-ravni.

Za Hevisajdovu sekvencu,

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0,\\ 0 & n<0,\end{cases} \tag{5.20}$$

z-transformaciju odredimo na sljedeći način:

$$\mathcal{Z}\{u(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot z^{-n}\ . \tag{5.21}$$

Poslednja suma u (5.21) je geometrijski red koji konvergira za $\left|z^{-1}\right|<1$, odnosno za $|z|>1$. U toj oblasti konvergencije, koja je spoljašnost kruga jediničnog poluprečnika, z-transformacija Hevisajdove sekvence je jednaka:

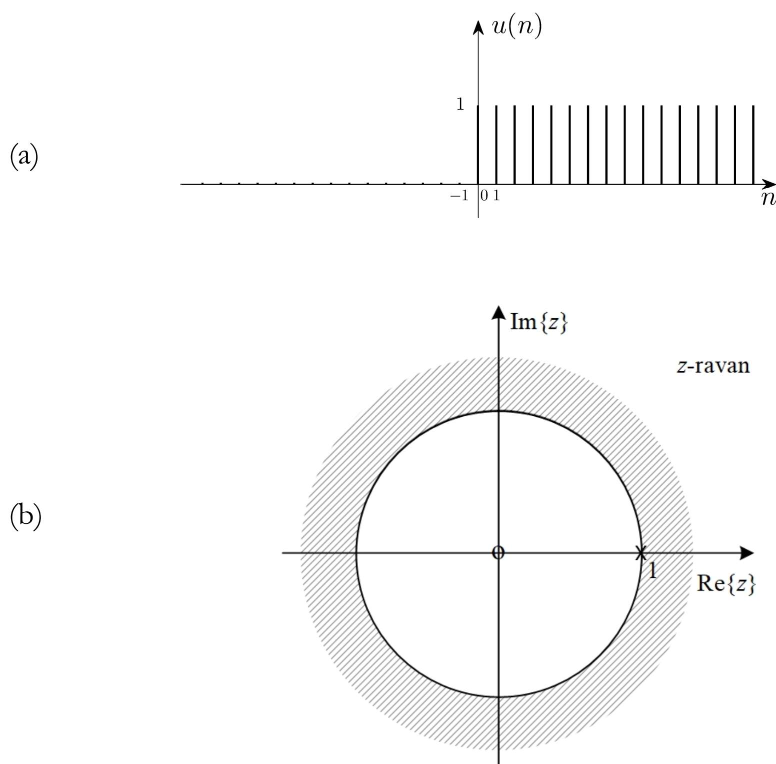
$$\mathcal{Z}\{u(n)\}=\left.\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\right|_{\left|z^{-1}\right|<1}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}. \tag{5.22}$$

Hevisajdova sekvenca i oblast konvergencije njene z-transformacije prikazane su na Slici 5.4.

Za sekvencu koja se dobije vremenskom inverzijom negativne Hevisajdove sekvence i pomjeranjem za jednu diskretnu vremensku jedinicu ulijevo:

$$-u(-n-1)=\begin{cases}-1, & n\leq -1,\\ 0 & n\geq 0,\end{cases} \tag{5.23}$$

z-transformacija je jednaka:



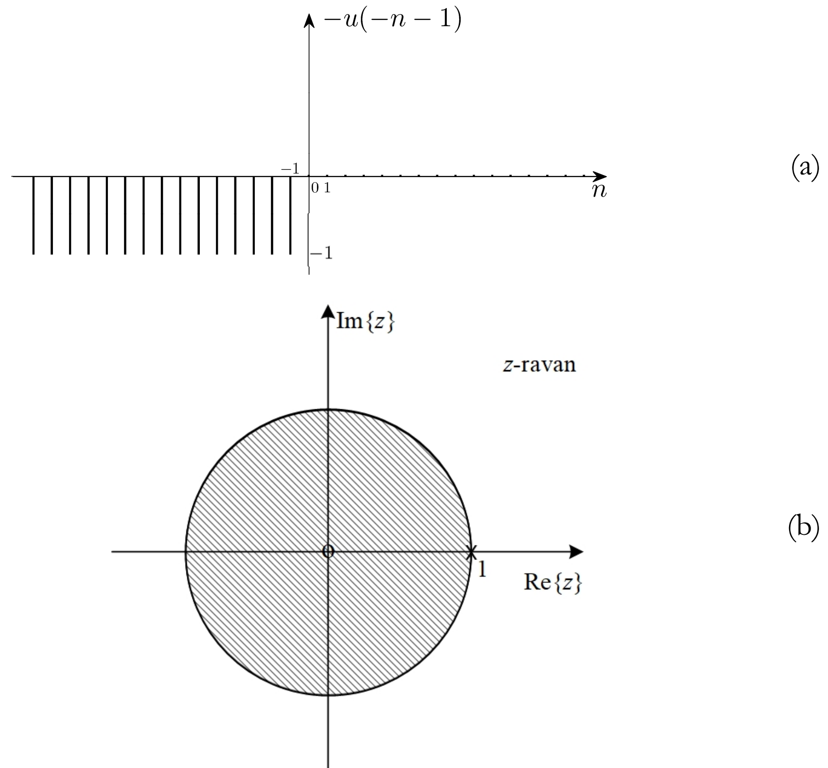
Slika 5.4 Oblast konvergencije z-transformacije: (a) Hevisajdova sekvenca i (b) oblast konvergencije njene z-transformacije.

$$z\{-u(-n-1)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -u(-n-1)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \cdot z^{-n} . \tag{5.24}$$

Nakon dodavanja i oduzimanja elementa sume za $n=0$, dobijamo:

$$z\{-u(-n-1)\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \Bigg|_{|z|<1} = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1}, \tag{5.25}$$

pod uslovom da je $|z|<1$. Dakle, oblast konvergencije ove antikauzalne sekvence je unutrašnjost kruga jediničnog poluprečnika. Analizirani signal i oblast konvergencije njegove z-transformacije prikazani su na Slici 5.5.



Slika 5.5 Oblast konvergencije z-transformacije: (a) Vremenski invertovana i pomjerena negativna Hevisajdova sekvenca i (b) oblast konvergencije njene z-transformacije.

Sličan postupak provodimo kako bismo odredili z-transformaciju kompleksnog eksponencijalnog signala $x(n)=a^n u(n),\ a\in\mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}\{a^n u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n\Big|_{|az^{-1}|<1} = \\ = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a},\ |z|>|a|. \tag{5.26}$$

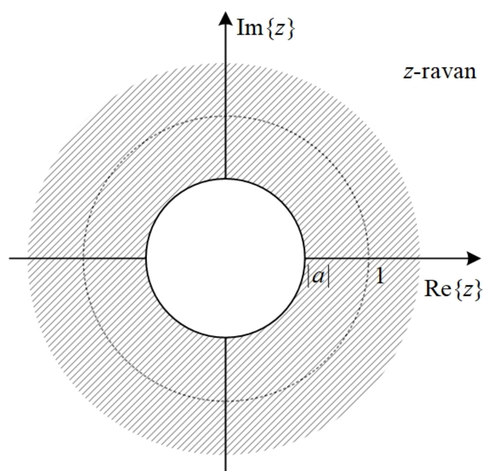
Oblast konvergencije ovog kauzalnog signala je određena sa $|z|>|a|$. U geometrijskom smislu to je spoljašnost kruga poluprečnika $|a|$.

Za kompleksni eksponencijalni signal $x(n) = -a^n u(-n-1),\ a \in \mathbb{C}$ z-transformacija je jednaka:

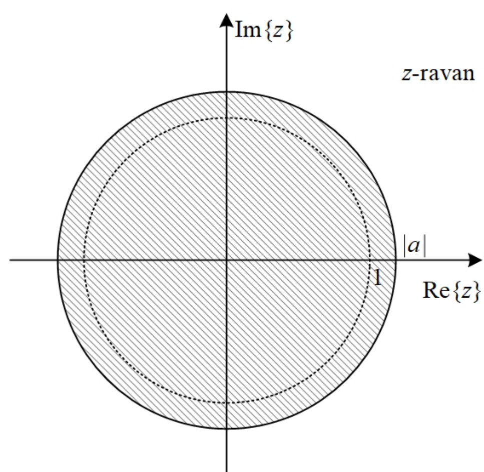
$$\begin{aligned} z\left\{-a^n u(-n-1)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^n \Bigg|_{\left|a^{-1}z\right|<1} = \\ &= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = 1 - \frac{a}{a-z} = \frac{z}{z-a},\ |z| < |a|. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Kod ovog antikauzalnog signala oblast konvergencije je određena sa $|z| < |a|$, dakle unutrašnjost kruga poluprečnika $|a|$.

Oblasti konvergencije z-transformacija kompleksnih eksponencijalnih signala $a^n u(n)$, uz $|a| < 1$, i $-a^n u(-n-1)$, uz $|a| > 1$, su prikazane na slikama 5.6 i 5.7, respektivno. Primijetimo da Hevisajdova sekvenca i vremenski invertovana negativna Hevisajdova sekvenca koja je pomjerena za jednu diskretnu vremensku jedinicu ulijevo imaju jednake analitičke izraze za njihove z-transformacije. Jednako vrijedi za analiziranu kauzalnu i antikauzalnu verziju kompleksnog eksponencijalnog signala. Međutim, iako su analitički izrazi za z-transformacije ovih signala jednaki, razlikuju se njima odgovarajuće oblasti konvergencija, što osigurava jednoznačnost preslikavanja, o čemu smo već govorili u Poglavlju 5.1.



Slika 5.6 Oblast konvergencije z-transformacije kauzalnog kompleksnog eksponencijalnog signala $a^n u(n)$, uz $|a|<1$.



Slika 5.7 Oblast konvergencije z-transformacije antikauzalnog kompleksnog eksponencijalnog signala $-a^n u(-n-1)$, uz $|a|>1$.

5.5 Osobine z - transformacije

U ovom poglavlju razmotrićemo i dokazati najvažnije osobine z-transformacije. Na osnovu njih se izvode pravila koja pojednostavljuju računanje direktne i inverzne z-transformacije složenih signala, znajući z-transformacije elementarnih signala. Većina osobina vrijedi podjednako i za bilateralnu i za unilateralnu z-transformaciju. Jedino ćemo osobinu pomaka signala u domenu diskretnog vremena razmatrati posebno za bilateralnu, a posebno za unilateralnu z-transformaciju. Ova osobina je veoma značajna pri rješavanju jednačina diferencija, odnosno određivanju odziva sistema sa poznatim početnim stanjem, pomoću z-transformacije.

5.5.1 Linearnost

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z),\ R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z),\ R_2^- < |z| < R_2^+$, tada je z-transformacija linearne kombinacije ta dva diskretna signala jednaka linearnoj kombinaciji njihovih z-transformacija u presjeku njihovih oblasti konvergencija:

$$\begin{aligned} &ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z),\ \forall a, b \in \mathbb{C}, \\ &R^- < |z| < R^+,\ R^- = \max\left(R_1^-, R_2^-\right),\ R^+ = \min\left(R_1^+, R_2^+\right). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Dokaz:

Zbog linearnosti sume kao osnovnog operatora z-transformacije, iz njenog definicionog izraza (5.1) direktno slijedi:

$$\begin{aligned} z\{ax_1(n) + bx_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] z^{-n} = \\ &= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = \\ &= aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned} \tag{5.29 }$$

z-transformacija linearne kombinacije ova dva signala će konvergirati u oblasti u kojoj konvergiraju njihove pojedinačne z-transformacije. Ako su oblasti konvergencije z-transformacija $X_1(z)$ i $X_2(z)$ date sa $R_1^- < |z| < R_1^+$ i $R_2^- < |z| < R_2^+$ respektivno, oblast konvergencije z-transformacije njihove linearne kombinacije je dio z-ravni u kojoj se preklapaju oblasti konvergencija $X_1(z)$ i $X_2(z)$, tj. $R^- < |z| < R^+$, $R^- = \max\left(R_1^-, R_2^-\right)$, $R^+ = \min\left(R_1^+, R_2^+\right)$.

□

Prilikom linearne kombinacije diskretnih signala, u nekim slučajevima se može desiti da oblast konvergencije z-transformacije linearne kombinacije bude šira od svake od pojedinačnih oblasti konvergencija z-transformacija signala koji učestvuju u linearnoj kombinaciji. Jedan takav slučaj linearne kombinacije diskretnih signala prikazaćemo u primjeru koji slijedi.

Primjer 5.1:

Odrediti oblasti konvergencije z-transformacija signala $a^n u(n)$ i $a^n u(n-1)$, a zatim i njihove linearne kombinacije $a^n u(n) - a^n u(n-1)$.

Rješenje:

Prilikom razmatranja z-transformacija elementarnih signala, u (5.26) smo pronašli da je oblast konvergencije z-transformacije signala $a^n u(n)$ jednaka $|z| > |a|$. Posmatrajući z-transformaciju signala $a^n u(n-1)$:

$$\mathcal{Z}\left\{a^n u(n-1)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n-1) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n \tag{5.30}$$

zaključujemo da će sekvenca az^{-1} biti apsolutno sumabilna za $n = 1, 2, \ldots, \infty$ ako je $\left|az^{-1}\right| < 1$, odnosno $|z| > |a|$. Vidimo da su oblasti konvergencija

z-transformacija oba ova signala jednake, $|z|>|a|$, što je u geometrijskom smislu spoljašnjost kruga poluprečnika $|a|$ u *z*-ravni.

Posmatrajmo sada linearnu kombinaciju $a^n u(n)-a^n u(n-1)$. Ova razlika signala za rezultat ima sekvencu $\delta(n)$:

$$a^n u(n)-a^n u(n-1)=a^n\delta(n), \tag{5.31}$$

jer su svi elementi ova dva signala, osim u nuli, jednaki i poništavaju se. Po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa, znamo da je

$$a^n\delta(n)=a^0\delta(n)=\delta(n), \tag{5.32}$$

a oblast konvergencije *z*-transformacije delta sekvence je cijela kompleksna *z*-ravan. Zaključujemo da je, nakon ovako formirane linearne kombinacije posmatranih signala, došlo do proširenja oblasti konvergencije *z*-transformacije.

□

<u>Primjer 5.2:</u>

Koristeći pravilo linearnosti odrediti *z*-transformacije signala $\cos\omega_0 n\cdot u(n)$ i $\sin\omega_0 n\cdot u(n)$.

Rješenje:

Poznavajući transformacioni par:

$$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|, \tag{5.33}$$

lako odredimo *z*-transformacije kompleksnih sinusnih signala:

$$e^{j\omega_0 n}u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{j\omega_0}},\ |z|>\left|e^{j\omega_0}\right|=1, \tag{5.34}$$

$$e^{-j\omega_0 n}u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}},\ |z|>\left|e^{-j\omega_0}\right|=1. \tag{5.35}$$

Sada na osnovu (5.34) i (5.35) određujemo često korištene z-transformacije signala $\cos\omega_0 n \cdot u(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cos\omega_0 n \cdot u(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{e^{j\omega_0 n}u(n)\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right) = \\
&= \frac{z\left(z-e^{-j\omega_0}\right) + z\left(z-e^{j\omega_0}\right)}{2\left(z-e^{j\omega_0}\right)\left(z-e^{-j\omega_0}\right)} = \\
&= \frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}, \ |z| > 1
\end{aligned} \tag{5.36}$$

i signala $\sin\omega_0 n \cdot u(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\sin\omega_0 n \cdot u(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right]u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\left\{e^{j\omega_0 n}u(n)\right\} - \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\left\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right) = \\
&= \frac{z\left(z-e^{-j\omega_0}\right) - z\left(z-e^{j\omega_0}\right)}{2j\left(z-e^{j\omega_0}\right)\left(z-e^{-j\omega_0}\right)} = \\
&= \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}, \ |z| > 1.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

□

5.5.2 Pomak u vremenskom domenu kod bilateralne *z*-transformacije

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada pomak signala $x(n)$ u domenu diskretnog vremena za m diskretnih vremenskih jedinica ($m \in \mathbb{Z}$) dovodi do množenja *z*-transformacije $X(z)$ sa z^{-m}, pri čemu se oblast konvergencije ne mijenja:

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} X(z),\ R^- < |z| < R^+. \tag{5.38}$$

U odnosu na *z*-transformaciju originalnog signala, konvergencija *z*-transformacije pomjerenog signala se može razlikovati samo u nuli ili u beskonačnosti.

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.1) dobijamo *z*-transformaciju pomjerenog signala $x(n-m)$:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m) z^{-n} \Bigg|_{n-m \to n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-(n+m)} = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}. \tag{5.39}$$

Posljednja suma je jednaka $X(z)$, te je oblast konvergencije *z*-transformacije signala $x(n-m)$ jednaka oblasti konvergencije $X(z)$, izuzev eventualno u nuli ili u beskonačnosti, što je posljedica množenja sa z^{-m} u (5.39). U oblasti konvergencije vrijedi da je:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m} X(z). \tag{5.40}$$

□

Primjer 5.3:

Koristeći pravilo pomaka odrediti *z*-transformacije i oblasti konvergencije signala $\delta(n-1)$ i $\delta(n+1)$.

Rješenje:

Za jedinični impuls $\delta(n)$ znamo da ima z-transformaciju jednaku jedinici sa oblašću konvergencije koja obuhvata kompletnu z-ravan. Koristeći pravilo pomaka (5.38) dobijamo:

$$z\{\delta(n-1)\} = z^{-1}, \tag{5.41}$$

$$z\{\delta(n+1)\} = z\,. \tag{5.42}$$

Iz (5.41) vidimo da oblast konvergencije $z\{\delta(n-1)\}$ ne obuhvata tačku $z=0$ jer tada z^{-1} poprima beskonačno veliku vrijednost, dok $z\{\delta(n+1)\}$ data sa (5.42) ne konvergira u beskonačnosti.

□

Primjer 5.4:

Koristeći pravilo pomaka odrediti z-transformaciju pomjerene Hevisajdove sekvence $u(n+5)$.

Rješenje:

Za Hevisajdovu sekvencu vrijedi da je:

$$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1},\ |z|>1\,. \tag{5.43}$$

Na osnovu pravila pomaka (5.38) dobijamo da je:

$$u(n+5) \leftrightarrow \frac{z^6}{z-1}\,. \tag{5.44}$$

Oblast konvergencije ostaje spoljašnost kruga $|z|>1$, ali je neophodno iz oblasti konvergencije isključiti tačku u beskonačnosti.

□

5.5.3 Pomak u vremenskom domenu kod unilateralne *z*-transformacije

Budući da ćemo se prilikom primjene unilateralne *z*-transformacije za traženje odziva zadržati na kauzalnim LTI sistemima, i da se u jednačinama diferencija koje opisuju ovakve sisteme ne pojavljuju elementi signala sa indeksima većim od onog koji označava trenutak posmatranja *n*, pravilo pomaka kod unilateralne *z*-transformacije ćemo razmatrati samo za slučaj da je $m > 0$.

Ako postoji transformacioni par unilateralne *z*-transformacije $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada je unilateralna *z*-transformacija signala koji je u odnosu na $x(n)$ u domenu diskretnog vremena pomjeren za *m* diskretnih vremenskih jedinica ($m > 0$), tj. signala $x(n-m)$, jednaka:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z). \qquad (5.45)$$

Pri tome se oblast konvergencije unilateralne *z*-transformacije ne mijenja, osim eventualno u tački $z = 0$.

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.9), za unilateralnu *z*-transformaciju pomjerenog signala $x(n-m)$, $m > 0$, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n}\Bigg|_{n-m\to n} = \sum_{n=-m}^{\infty} x(n)z^{-(n+m)} = z^{-m}\sum_{n=-m}^{\infty} x(n)z^{-n} = \\
&= z^{-m}\left[x(-m)z^{m} + x(-m+1)z^{m-1} + \cdots + x(-1)z^{1} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}\right] = \qquad (5.46) \\
&= x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z),
\end{aligned}$$

pri čemu je potrebno osigurati konvergenciju $z^{-m}X(z)$. Budući da smo pretpostavili da je $m > 0$, unilateralna *z*-transformacija pomjerenog signala konvergira svuda gdje konvergira $X(z)$, osim eventualno u tački $z = 0$ zbog množenja sa z^{-m} u (5.46). □

5.5.4 Skaliranje u vremenskom domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada za skaliran signal $x(an),\ a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x(an) \leftrightarrow X\left(z^{\frac{1}{a}}\right). \tag{5.47}$$

Za konvergenciju *z*-transformacije skaliranog signala je potrebno da bude $R^- < \left|z^{\frac{1}{a}}\right| < R^+$.

Dokaz:

Za *z*-transformaciju skaliranog signala $x(an),\ a \in \mathbb{R}$ se na osnovu definicionog izraza (5.1) dobija:

$$z\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(an) z^{-n}\Bigg|_{an \to n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(z^{\frac{1}{a}}\right)^{-n} = X\left(z^{\frac{1}{a}}\right). \tag{5.48}$$

Ako je oblast konvergencije $X(z)$ jednaka $R^- < |z| < R^+$, da bi $X\left(z^{\frac{1}{a}}\right)$ konvergiralo, mora da vrijedi $R^- < \left|z^{\frac{1}{a}}\right| < R^+$.

□

5.5.5 Skaliranje u *z*-domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada je *z*-transformacija signala $a^n x(n),\ a \in \mathbb{C}$, skalirana verzija od $X(z)$, tj. vrijedi da je:

$$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(a^{-1}z\right),\ |a|R^- < |z| < |a|R^+ . \tag{5.49}$$

Dokaz:

Potražimo *z*-transformaciju signala $a^n x(n),\ a \in \mathbb{C}$:

$$z\left\{a^n x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(a^{-1}z\right)^{-n} = X\left(a^{-1}z\right). \tag{5.50}$$

Za konvergenciju $z\left\{a^n x(n)\right\}$ potrebno je ispuniti uslov $R^- < \left|a^{-1}z\right| < R^+$, odakle slijedi da je $|a|R^- < |z| < |a|R^+$.

□

Primjer 5.5:

Koristeći pravilo skaliranja u *z*-domenu, odrediti *z*-transformaciju signala $a^n u(-n-1),\ a \in \mathbb{C}$.

Rješenje:

Umjesto direktnim računanjem na osnovu definicionog izraza (5.1) kao u Poglavlju 5.4, gdje smo pronašli transformacioni par

$$a^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z-a},\ |z| < |a|, \tag{5.51}$$

poznavajući *z*-transformaciju vremenski invertovane i pomjerene Hevisajdove sekvence:

$$X(z) = z\left\{u(-n-1)\right\} = -\frac{z}{z-1},\ |z| < 1, \tag{5.52}$$

i koristeći pravilo skaliranja u *z*-domenu (5.49), direktno određujemo *z*-transformaciju signala $a^n u(-n-1)$:

$$z\left\{a^n u(-n-1)\right\} = X\left(a^{-1}z\right) = -\frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1}, \tag{5.53}$$

te je:

$$a^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z-a}, \ |z| < |a|. \tag{5.54}$$

□

5.5.6 Deriviranje u z-domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada postoji i transformacioni par:

$$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}. \tag{5.55}$$

Dokaz:

Deriviranjem z-transformacije $X(z)$ po promjenljivoj z dobijamo:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1}. \tag{5.56}$$

Sada vrijedi da je:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[nx(n)\right]z^{-n} = z\{nx(n)\}, \tag{5.57}$$

te egzistira transformacioni par:

$$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}. \tag{5.58}$$

Deriviranjem z-transformacije oblast konvergencije se može promijeniti i potrebno ju je odrediti za svaki slučaj posebno.

□

5.5.7 *z*-transformacija konjugovano kompleksnog signala

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada postoji i transformacioni par:

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*). \tag{5.59}$$

Oblast konvergencije *z*-transformacije konjugovano kompleksnog signala $x^*(n) = x_1(n) - jx_2(n)$ jednaka je oblasti konvergencije *z*-transformacije originalnog signala $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$.

Dokaz:

Potražimo *z*-transformaciju konjugovano kompleksnog signala $x^*(n) = x_1(n) - jx_2(n)$:

$$z\{x^*(n)\} = z\{x_1(n) - jx_2(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) - jx_2(n)\right] z^{-n}. \tag{5.60}$$

S druge strane, vrijedi da je konjugovano kompleksna vrijednost *z*-transformacije originalnog signala:

$$X^*(z) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) + jx_2(n)\right] z^{-n} \right\}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) - jx_2(n)\right] (z^*)^{-n}, \tag{5.61}$$

odakle, za konjugovano kompleksnu vrijednost promjenljive *z*, dobijamo:

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) - jx_2(n)\right] z^{-n}. \tag{5.62}$$

Poređenjem (5.60) i (5.62) zaključujemo da je:

$$z\{x^*(n)\} = X^*(z^*). \tag{5.63}$$

Nakon konjugovano kompleksnih operacija ne mijenja se oblast konvergencije, te su oblasti konvergencije *z*-transformacija signala $x^*(n)$ i $x(n)$ jednake.

□

5.5.8 Početna vrijednost kauzalnog signala

Za kauzalan signal $x(n)$ koji ima *z*-transformaciju $X(z)$ vrijedi da je:

$$x(0)=\lim_{|z|\to\infty} X(z). \tag{5.64}$$

Ova osobina *z*-transformacije nam omogućava da, bez traženja inverzne *z*-transformacije, odredimo početnu vrijednost kauzalnog signala $x(n)$, tj. $x(0)$, ako poznajemo njegovu *z*-transformaciju $X(z)$.

Dokaz:

z-transformacija kauzalnog signala $x(n)$ se može zapisati u razvijenom obliku sa:

$$z\{x(n)\}=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+\cdots. \tag{5.65}$$

Kada $|z|\to\infty$ svi članovi sume (5.65), osim $x(0)$, teže ka nuli, te vrijedi da je:

$$\lim_{|z|\to\infty} X(z)=x(0). \tag{5.66}$$

□

Primjer 5.6:

Odrediti početnu vrijednost kauzalnog signala čija je *z*-transformacija data sa $z/(z-a)$, $|z|>|a|$.

Rješenje:

Na osnovu (5.64) dobijamo da je:

$$x(0)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{z}{z-a}=1. \tag{5.67}$$

Ovo je u skladu sa našim ranijim znanjima, jer je zadata *z*-transformacija zapravo *z*-transformacija signala $a^n u(n)$, koji u nuli ima vrijednost 1.

□

5.5.9 Krajnja vrijednost kauzalnog signala

Za kauzalan signal $x(n)$, koji ima *z*-transformaciju $X(z)$, čiji se polovi nalaze unutar jediničnog kruga, vrijedi da je:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z). \tag{5.68}$$

Ova osobina *z*-transformacije nam omogućava da, bez traženja inverzne *z*-transformacije, odredimo čemu će biti jednaka vrijednost kauzalnog signala $x(n)$ u beskonačnosti, ako poznajemo njegovu *z*-transformaciju $X(z)$.

Dokaz:

Bilateralna *z*-transformacija $X(z)$ kauzalnog signala $x(n)$ jednaka je njegovoj unilateralnoj transformaciji, te ćemo smatrati da je $X(z)$ unilateralna transformacija. Formirajmo razliku unilateralnih *z*-transformacija signala $x(n+1)$ i $x(n)$:

$$\begin{aligned} z\{x(n+1)\} - z\{x(n)\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k+1)-x(k)\right]z^{-k} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[x(k+1)-x(k)\right]z^{-k}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Budući da je:

$$\begin{aligned} z\{x(n+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k}\Big|_{k+1\to m} = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-m+1} = \\ &= z\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - zx(0) = zX(z) - zx(0), \end{aligned} \tag{5.70}$$

na osnovu (5.69) i (5.70) možemo pisati:

$$zX(z) - zx(0) - X(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[x(k+1) - x(k)\right]z^{-k} \ . \tag{5.71}$$

Pod pretpostavkom da oblast konvergencije $X(z)$ obuhvata jediničnu kružnicu, kada $z \to 1$ ponište se svi članovi sume sa desne strane jednakosti (5.71), osim $x(0)$ i $\lim_{n\to\infty} x(n)$, tako da vrijedi da je:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[x(k+1) - x(k)\right]z^{-k} = \lim_{n\to\infty} x(n) - x(0) . \tag{5.72}$$

Posmatrajući (5.71) na jediničnoj kružnici imamo da je:

$$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)X(z) - zx(0)\right] = \lim_{n\to\infty} x(n) - x(0) , \tag{5.73}$$

te je konačno:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty} x(n) . \tag{5.74}$$

□

Ako oblast konvergencije z-transformacije kauzalnog signala ne obuhvata jediničnu kružnicu, $X(z)$ ima polove čiji je modul veći ili jednak jedinici, pa signal $x(n)$ beskonačno raste sa porastom vremena ili ima konstantnu vrijednost. Na primjer, z-transformacija $X(z) = z/(z-a)$, $|z| > |a|$ ima pol $z = a$. Inverznom z-transformacijom se dobije signal u vremenskom domenu je oblika $x(n) = a^n u(n)$. Za $|a| > 1$, kada $n \to \infty$ vrijednost signala postaje beskonačno velika, a za $|a| = 1$, kada se pol nalazi na jediničnoj kružnici, signal ima konstantnu krajnju vrijednost.

5.5.10 Konvolucija u vremenskom domenu

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z),\ R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z),\ R_2^- < |z| < R_2^+$, tada konvoluciji signala u domenu diskretnog vremena odgovara množenje u *z*-domenu:

$$\begin{aligned} &x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z), \\ &R^- < |z| < R^+,\ R^- = \max\left(R_1^-, R_2^-\right),\ R^+ = \min\left(R_1^+, R_2^+\right). \end{aligned} \tag{5.75}$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.1) *z*-transformacija konvolucije diskretnih signala je jednaka:

$$\begin{aligned} z\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) * x_2(n)\right] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) x_1(n-k)\right] z^{-n}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Nakon zamjene redoslijeda sumiranja dobijamo:

$$z\{x_1(n) * x_2(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) z^{-n}\right]. \tag{5.77}$$

Smjenom promjenljivih $m = n - k$, (5.77) postaje:

$$z\{x_1(n) * x_2(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) z^{-m}\right]. \tag{5.78}$$

Unutrašnja suma u (5.78) se ponaša kao konstanta za vanjsku sumu, te možemo pisati da je:

$$z\{x_1(n) * x_2(n)\} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) z^{-m}\right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k}\right], \tag{5.79}$$

te konačno dobijamo:

$$\mathcal{Z}\left\{x_1(n) * x_2(n)\right\} = X_1(z) \cdot X_2(z). \tag{5.80}$$

Budući da je za konvergenciju (5.79) potrebna konvergencija i $X_1(z)$ i $X_2(z)$, *z*-transformacija konvolucije dva signala konvergira u onom dijelu *z*-ravni gdje konvergiraju *z*-transformacije oba signala.

□

5.5.11 Konvolucija u *z*-domenu

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z),\ R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z),\ R_2^- < |z| < R_2^+$, tada množenju signala u domenu diskretnog vremena odgovara konvolucija u *z*-domenu:

$$\begin{aligned} & x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1\left(\frac{z}{\upsilon}\right) X_2(\upsilon) \upsilon^{-1} d\upsilon \\ & R^- < |z| < R^+,\ R^- = \max\left(R_1^-, R_2^-\right),\ R^+ = \min\left(R_1^+, R_2^+\right). \end{aligned} \tag{5.81}$$

Dokaz:

Ako jedan od signala, recimo $x_2(n)$, izrazimo preko njegove inverzne *z*-transformacije, date sa (5.18), *z*-transformciju proizvoda dva diskretna signala možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{x_1(n) \cdot x_2(n)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) \cdot x_2(n)\right] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_2(\upsilon) \upsilon^{n-1} d\upsilon\right] z^{-n}, \end{aligned} \tag{5.82}$$

gdje je C_1 zatvorena kontura u kompleksnoj υ-ravni, u presjeku oblasti konvergencija $X_1\left(\frac{z}{\upsilon}\right)$ i $X_2(\upsilon)$. Zamjenom redoslijeda sumiranja i integraljenja dobijamo:

$$\mathcal{Z}\left\{x_1(n)\cdot x_2(n)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\left(\frac{z}{\upsilon}\right)^{-n}\right]X_2(\upsilon)\upsilon^{-1}d\upsilon, \tag{5.83}$$

$$\mathcal{Z}\left\{x_1(n)\cdot x_2(n)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1} X_1\left(\frac{z}{\upsilon}\right)X_2(\upsilon)\upsilon^{-1}d\upsilon. \tag{5.84}$$

Za konvergenciju (5.83) potrebno je da bude $R_1^- < \left|\frac{z}{\upsilon}\right| < R_1^+$ i $R_2^- < |\upsilon| < R_2^+$.

Ako se umjesto $x_2(n)$ preko inverzne *z*-transformacije izrazi $x_1(n)$, za *z*-transformaciju proizvoda dva signala se dobija alternativni oblik:

$$\mathcal{Z}\left\{x_1(n)\cdot x_2(n)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2} X_1(\upsilon)X_2\left(\frac{z}{\upsilon}\right)\upsilon^{-1}d\upsilon, \tag{5.85}$$

pri čemu je C_2 zatvorena kontura u kompleksnoj υ-ravni, u presjeku oblasti konvergencija $X_1(\upsilon)$ i $X_2\left(\frac{z}{\upsilon}\right)$.

□

Zbirni pregled osobina *z*-transformacije dat je u Tabeli 5.1. Pri korištenju ove tabele neophodno obratiti pažnju i na oblast konvergencije, kako je ranije detaljno opisano uz svaku osobinu *z*-transformacije.

Tabela 5.1. Osobine *z*-transformacije (nastavak na sljedećoj stranici);

Osobina	$x(n)$	$X(z)$
Linearnost	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
Pomak u vremenskom domenu kod bilateralne transformacije	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$

Tabela 5.1. Osobine z-transformacije (nastavak sa prethodne stranice).

Osobina	$x(n)$	$X(z)$
Pomak u vremenskom domenu kod unilateralne transformacije	$x(n-m)$	$x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \cdots$ $+x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z)$
Skaliranje u vremenskom domenu	$x(an)$	$X\left(z^{\frac{1}{a}}\right)$
Skaliranje u z-domenu	$a^n x(n)$	$X\left(a^{-1}z\right)$
Osobina	$x(n)$	$X(z)$
Deriviranje u z-domenu	$nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$
Transformacija konjugovano kompleksnog signala	$x^*(n)$	$X^*\left(z^*\right)$
Konvolucija u vremenskom domenu	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)\cdot X_2(z)$
Proizvod u vremenskom domenu	$x_1(n)\cdot x_2(n)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{C_1} X_1\left(\dfrac{z}{\upsilon}\right)X_2(\upsilon)\upsilon^{-1}d\upsilon$ $\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{C_2} X_1(\upsilon)X_2\left(\dfrac{z}{\upsilon}\right)\upsilon^{-1}d\upsilon$
Početna vrijednost kauzalnog signala	$x(0) = \lim\limits_{\lvert z\rvert\to\infty} X(z)$	
Krajnja vrijednost kauzalnog signala	$x(\infty) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$	

5.6 Metodi određivanja inverzne *z* - transformacije

Zbog složenosti izračunavanja krivolinijskih integrala, inverzna *z*-transformacija se vrlo rijetko računa na osnovu definicionog izraza (5.18). Umjesto toga, koriste se jednostavniji načini za određivanje vremenskog oblika signala, ako je poznata njegova *z*-transformacija. Prvi metod se zasniva na korištenju Košijeve teoreme ostataka za izračunavanje krivolinijskog integrala. Međutim, ako se radi o jednostavnim oblicima funkcija, problem se može riješiti poznavajući *z*-transformacije elementarnih signala i pravila koja proističu iz osobina *z*-transformacije. Taj metod se u literaturi naziva tablični metod. Osim navedenih, u ovom poglavlju ćemo izložiti još dva metoda za određivanje inverzne *z*-transformacije. Jedan od njih se zasniva na pretpostavci da se složena funkcija $X(z)$ može razviti u parcijalne razlomke. Koristeći tablični metod, odrede se inverzne *z*-transformacije pojedinačnih sabiraka, a zatim, koristeći pravilo linearnosti, tražena inverzna *z*-transformacija kao njihov zbir. U slučajevima kada nije neophodno dobiti analitički izraz za signal u vremenskom domenu, već nas zanimaju samo vrijednosti nekih njegovih elemenata, vidjećemo da je za traženje inverzne *z*-transformacije pogodno koristiti razvoj u stepeni red.

5.6.1 Određivanje inverzne *z*-transformacije pomoću Košijeve teoreme o reziduumima

Ako se definicioni izraz za *z*-transformaciju (5.1) posmatra sa stanovišta kompleksne analize, elementi signala $x(n)$ predstavljaju koeficijente Loranovog reda oko tačke $z=0$, u koji je razvijena funkcija $X(z)$. U poglavlju 5.3 odredili smo te koeficijente u obliku:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \tag{5.86}$$

i na taj način dobili izraz za inverznu z-transformaciju. U (5.86) zatvorena kontura *C* leži u oblasti konvergencije, obuhvata koordinantni početak i orijentisana je suprotno kretanju kazaljke na satu.

Primjenom Košijeve teoreme o reziduumima na kompleksnu funkciju $X(z)z^{n-1}$, koja je holomorfna na i unutar konture *C*, osim u polovima $\{z_1,\ldots,z_n\}$:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(C,z_i)\mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right), \tag{5.87}$$

gdje je $\mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right)$ reziduum funkcije $X(z)z^{n-1}$ u polu z_i, a $\mathrm{I}(C,z_i)=1$ za polove koji se nalaze unutar konture *C* i $\mathrm{I}(C,z_i)=0$ za polove koji se nalaze van konture *C*, dobijamo da je:

$$x(n) = \sum \mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right), \tag{5.88}$$

u polovima z_i funkcije $X(z)z^{n-1}$ koji se nalaze unutar zatvorene konture *C*, ili, budući da je suma svih reziduuma jednaka nuli:

$$x(n) = -\sum \mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right), \tag{5.89}$$

u polovima z_i funkcije $X(z)z^{n-1}$ koji se nalaze van zatvorene konture *C*.

Polovi podintegralne funkcije $X(z)z^{n-1}$ mogu biti jednostruki i višestruki. U slučaju jednostrukih polova reziduum u polu $X(z)z^{n-1}$ se određuje sa:

$$\mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right) = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)X(z)z^{n-1}, \tag{5.90}$$

dok je u slučaju višestrukih polova reziduum u polu z_i reda *m* jednak:

$$\mathrm{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m X(z)z^{n-1}\right]. \tag{5.91}$$

Posmatranjem podintegralne funkcije $X(z)z^{n-1}$ u izrazu (5.86) zaključujemo da ona, za različite vrijednosti *n*, može da ima višestruki pol u nuli ili u beskonačnosti. Kako je izračunavanje reziduuma u višestrukim polovima

složeno, posebno kad je red pola promjenljiv, preporučuje se izbjegavanje računanja sume ostataka u višestrukim polovima u nuli ili beskonačnosti. Budući da se višestruki polovi u nuli i u beskonačnosti ne pojavljuju istovremeno, to je moguće postići ako se inverzna *z*-transformacija računa na sljedeći način:

$$x(n)=\begin{cases}\sum \operatorname{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right), & \begin{array}{l}\textit{u polovima } z_i \textit{ unutar konture } C\\ \textit{za one vrijednosti } n \textit{ za koje } X(z)z^{n-1}\\ \textit{nema višestruki pol u nuli},\end{array}\\[2ex] -\sum \operatorname{Res}\left(X(z)z^{n-1},z_i\right), & \begin{array}{l}\textit{u polovima } z_i \textit{ van konture } C\\ \textit{za one vrijednosti } n \textit{ za koje } X(z)z^{n-1}\\ \textit{nema višestruki pol u beskonačnosti}.\end{array}\end{cases} \tag{5.92}$$

Primjer 5.7:

Odrediti inverznu *z*-transformaciju od $X(z)=\dfrac{5z}{(2-z)(3z-1)}$, ako je oblast konvergencije $1/3<|z|<2$.

Rješenje:

Kada je oblast konvergencije prsten u z-ravni, kao što je ovdje slučaj, inverznom *z*-transformacijom trebamo dobiti signal koji će imati elemente i za pozitivne i za negativne vrijednosti diskretnog vremena ***n***. Funkcija:

$$X(z)z^{n-1}=\frac{5z^n}{(2-z)(3z-1)}, \tag{5.93}$$

za svaku vrijednost ***n*** ima konačne polove, $z_1=1/3$ i $z_2=2$. Za $n>0$ javlja se i višestruki pol u beskonačnosti reda ***n***, dok se za $n<0$ javlja višestruki pol u nuli, takođe reda $n<0$. Stoga je pogodno za $n>0$ koristiti sumu reziduuma u polovima unutar konture *C*, koja ne uključuje višestruki pol u beskonačnosti, a za $n<0$ sumu reziduuma u polovima van konture *C*, koja ne uključuje višestruki

pol u nuli. Za $n=0$ oba izraza su ravnopravna. Oblast konvergencije i raspored polova $X(z)$ prikazani su na Slici 5.8. Za $n\geq 0$, unutar konture *C*, koja se nalazi u oblasti konvergencije, nalazi se samo pol $z_1 = 1/3$, te dobijamo:

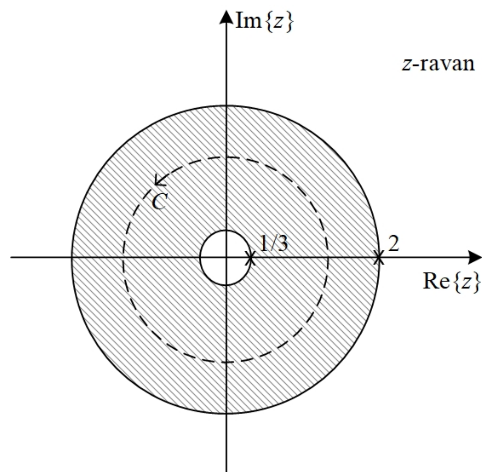
$$x(n) = \text{Res}\left(X(z)z^{n-1}, \frac{1}{3} \right) = \lim_{z\to\frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{5z \cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)} = \left(\frac{1}{3} \right)^n . \tag{5.94}$$

Za $n<0$, van konture *C* se nalazi samo pol $z_2 = 2$, te je:

$$x(n) = -\text{Res}\left(X(z)z^{n-1}, 2 \right) = -\lim_{z\to 2} (z-2) \frac{5z \cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)} = 2^n . \tag{5.95}$$

Konačan izraz za inverznu *z*-transformaciju je:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} \right)^n, & n \geq 0, \\ 2^n, & n < 0. \end{cases} \tag{5.96}$$



Slika 5.8 Oblast konvergencije i raspored konačnih polova zadate *z*-transformacije $X(z)$.

□

5.6.2 Tablični metod određivanja inverzne *z*-transformacije

Tablični metod se zasniva na korištenju tabela u kojima su date *z*-transformacije elementarnih signala, zajedno sa pravilima *z*-transformacije. Na osnovu najčešće korištenih transformacionih parova, datih u Tabeli 5.2, za zadanu *z*-trasformaciju $X(z)$ potrebno je prepoznati o kom elementarnom signalu $x(n)$ se radi. U slučajevima složenijih izraza za $X(z)$, koji nisu navedeni u Tabeli 5.2, treba razmotriti mogućnost određivanja inverzne *z*-transformacije koristeći tabelu transformacionih parova i pravila *z*-transformacije. Na primjer, inverznu *z*-transformaciju od $1/(z-a)$, uz oblast konvergencije $|z|>|a|$, određujemo primjenom osobine pomaka u vremenskom domenu na tablični transformacioni par $a^n u(n) \leftrightarrow z/(z-a)$, te zbog množenja u domenu *z*-transformacije sa z^{-1} dobijamo da je $a^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow 1/(z-a)$.

Tabela 5.2. *z*-transformacije često korištenih signala (nastavak na sljedećoj stranici);

Signal $x(n)$	*z*-transformacija $X(z)$	Oblast konvergencije
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-m),\ m>0$	z^{-m}	$z \neq 0$
$\delta(n+m),\ m>0$	z^{m}	$z \neq \infty$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u(-n-1)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert<1$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$

Tabela 5.2. z-transformacije često korištenih signala (nastavak sa prethodne stranice).

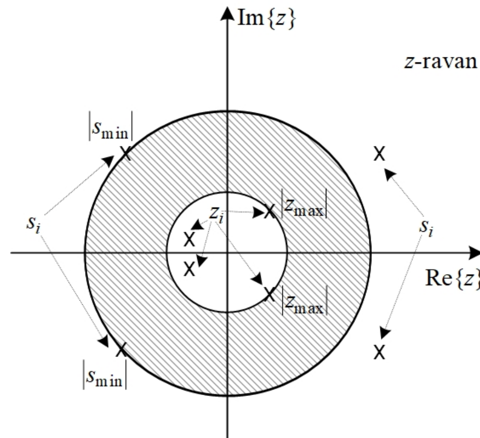
Signal $x(n)$	z-transformacija $X(z)$	Oblast konvergencije
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos\omega_0 n\cdot u(n)$	$\frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin\omega_0 n\cdot u(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \cos\omega_0 n\cdot u(n)$	$\frac{z^2 - za\cos\omega_0}{z^2 - 2za\cos\omega_0 + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \sin\omega_0 n\cdot u(n)$	$\frac{za\sin\omega_0}{z^2 - 2za\cos\omega_0 + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \le n < N \\ 0, & inače \end{cases}$	$\frac{z^{-N+1}\left(z^N - a^N\right)}{z-a}$	$\lvert z\rvert > 0$

5.6.3 Određivanje inverzne *z*-transformacije razvojem u parcijalne razlomke

Neka je *z*-transformacija $X(z)$, sa oblašću konvergencije $|z_{\max}|<|z|<|s_{\min}|$ prikazanoj na Slici 5.9, racionalna funkcija:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}, \tag{5.97}$$

gdje je $N(z)$ polinom po z reda *M*, a $D(z)$ polinom po z reda N. Sa z_i smo označili polove $X(z)$ takve da je $|z_i|<|z_{\max}|$, a sa s_i polove $X(z)$ takve da je $|s_i|>|s_{\min}|$.



Slika 5.9 Oblast konvergencije i konačni polovi funkcije $X(z)$.

Razvojem funkcije $X(z)$ u parcijalne razlomke dobijamo:

$$\begin{aligned} X(z)=&\sum_{i=0}^{M-N} c_i z^{-i}+\sum_{i=1}^{Nz}\frac{A_i z}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{Ns}\frac{B_i z}{z-s_i}+ \\ &+\sum_{i=1}^{Nmz}\sum_{k=0}^{mz_i-1}\frac{C_i z}{(z-z_i)^{k+1}}+\sum_{i=1}^{Nms}\sum_{k=0}^{ms_i-1}\frac{D_i z}{(z-s_i)^{k+1}}. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Sa Nz je označen broj jednostrukih, a sa Nmz broj višestrukih polova z_i, dok je sa Ns označen broj jednostrukih, a sa Nms broj višestrukih polova s_i reda mz_i i ms_i, respektivno.

Ako je stepen polinoma u brojniku veći ili jednak stepenu polinoma u nazivniku, koeficijenti c_i u (5.98) se dobiju dijeljenjem polinoma $N(z)$ sa polinomom $D(z)$. U suprotnom, za $N > M$, prvu sumu u (5.98) treba izostaviti prilikom računanja inverzne *z*-transformacije.

Kako bismo odredili inverzne *z*-transformacije članova u razvoju (5.98), razmotrimo šta se dešava prilikom diferenciranja *z*-transformacije kompleksnih eksponencijalnih signala. Od ranije znamo da egzistiraju transformacioni parovi:

$$z_i^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - z_i}, \ |z| > |z_i|, \tag{5.99}$$

$$s_i^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - s_i}, \ |z| < |s_i|. \tag{5.100}$$

Za prvi izvod *z*-transformacije signala $z_i^n u(n)$ po z_i:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n z^{-n}\right] = \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{z}{z - z_i}, \tag{5.101}$$

dobijamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z_i^{n-1} z^{-n} = \frac{z}{\left(z - z_i\right)^2}. \tag{5.102}$$

Iz (5.102) zaključujemo da postoji transformacioni par:

$$n z_i^{n-1} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{\left(z - z_i\right)^2}, \ |z| > |z_i|. \tag{5.103}$$

Drugi izvod *z*-transformacije signala $z_i^n u(n)$ po z_i je jednak:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n z^{-n}\right] = \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} n z_i^{n-1} z^{-n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z_i^{n-2} z^{-n} = \frac{2z}{\left(z - z_i\right)^3}, \tag{5.104}$$

što znači da je:

$$n(n-1)z_i^{n-2}u(n) \leftrightarrow \frac{2z}{(z-z_i)^3},\ |z|>|z_i|. \tag{5.105}$$

Ako postupak nastavimo, za *k*-ti izvod *z*-transformacije signala $z_i^n u(n)$ po z_i dobijamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)z_i^{n-k}z^{-n} = \frac{k!z}{(z-z_i)^{k+1}}, \tag{5.106}$$

odnosno:

$$\binom{n}{k} z_i^{n-k}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-z_i)^{k+1}},\ |z|>|z_i|. \tag{5.107}$$

Na sličan način, na osnovu *k*-tog izvoda *z*-transformacije signala $s_i^n u(n)$ po s_i dobijamo transformacioni par:

$$\binom{n}{k} s_i^{n-k}u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{(z-s_i)^{k+1}},\ |z|<|s_i|. \tag{5.108}$$

Relacije (5.107) i (5.108) nam sada mogu poslužiti da odredimo inverznu *z*-transformaciju članova treće, četvrte i pete sume u razvoju (5.98), dok inverznu *z*-transformaciju članova druge i treće sume u tom razvoju određujemo na osnovu (5.99) i (5.100). Inverznu *z*-transformaciju članova prve sume lako odredimo koristeći pravilo pomaka i činjenicu da je $\delta(n) \leftrightarrow 1$. Tako konačno dobijamo inverznu *z*-transformaciju funkcije $X(z)$ razvijene u parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} x(n) = {} & \sum_{i=0}^{M-N} c_i\delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Nz} A_i z_i^n\right]u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Ns} B_i s_i^n\right]u(-n-1) + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{Nmz}\sum_{k=0}^{mz_i-1} C_i \binom{n}{k} z_i^{n-k}\right]u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nms}\sum_{k=0}^{ms_i-1} D_i \binom{n}{k} s_i^{n-k}\right]u(-n-1). \end{aligned} \tag{5.109}$$

Primijetimo da polovi z_i za koje vrijedi da je $|z_i|<|z_{\max}|$ generišu kauzalni, a polovi s_i za koje je $|s_i|>|s_{\min}|$, antikauzalni dio signala u vremenskom domenu.

Primjer 5.8:

Odrediti inverznu *z*-transformaciju od $X(z)=\dfrac{-35z^2+265z+18}{12(5z-1)(z-6)}$, ako je oblast konvergencije data sa: a) $|z|>6$; b) $|z|<1/5$; c) $1/5<|z|<6$.

Rješenje:

Članovi razvoja funkcije $X(z)$ u parcijalne razlomke:

$$X(z)=\frac{1}{4}-\frac{z}{z-\frac{1}{5}}+\frac{1}{6}\frac{z}{z-6}, \tag{5.110}$$

su tablične *z*-transformacije. Njihovim poređenjem sa transformacionim parovima datim u tablicama i korištenjem superpozicije na najjednostavniji način dobijamo inverznu *z*-transformaciju.

a) Ako je oblast konvergencije spoljašnost kruga, $|z|>6$, iz tablica biramo kauzalne signale, kao inverzne *z*-transformacije članova u razvoju (5.110):

$$x(n)=\frac{1}{4}\delta(n)-\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)+\frac{1}{6}6^n u(n). \tag{5.111}$$

b) Kada je oblast konvergencije unutrašnjost kruga određena sa $|z|<1/5$, signali u vremenskom domenu koji odgovaraju članovima u (5.110) su antikauzalni, a određujemo ih takođe na osnovu tablica:

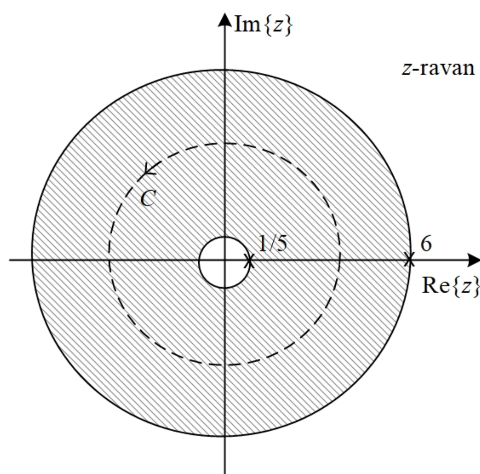
$$x(n)=\frac{1}{4}\delta(n)+\left(\frac{1}{5}\right)^n u(-n-1)-\frac{1}{6}6^n u(-n-1). \tag{5.112}$$

c) Konačno, ako tražimo inverznu *z*-transformaciju kada je oblast konvergencije $X(z)$ prsten, kao što je prikazano na Slici 5.10, trebamo dobiti signal u vremenskom domenu, koji ima elemente i za pozitivne i za negativne vrijednosti diskretnog vremena *n*. Datu oblast konvergencije $1/5<|z|<6$ možemo posmatrati kao da je nastala preklapanjem dvije oblasti konvergencije: $1/5<|z|$ i $|z|<6$. Prva oblast je spoljašnost kruga čiji je

poluprečnik određen polom $z=1/5$ funkcije $X(z)$, te će član $\dfrac{z}{z-1/5}$ u razvoju funkcije $X(z)$ generisati kauzalni dio signala u vremenskom domenu. Druga oblast, koja je određena polom $z=6$, je unutrašnjost kruga, te član $\dfrac{z}{z-6}$ u razvoju funkcije $X(z)$ treba posmatrati kao *z*-transformaciju antikauzalnog signala.

Vodeći se ovim principima, za inverznu *z*-transformaciju dobijamo:

$$x(n)=\frac{1}{4}\delta(n)-\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)-\frac{1}{6}6^n u(-n-1). \tag{5.113}$$



Slika 5.10 Oblast konvergencije i raspored konačnih polova funkcije $X(z)$.

□

5.6.4 Određivanje inverzne *z*-transformacije razvojem u stepeni red

Osnovna ideja ovog metoda leži u činjenici da se *z*-transformacija $X(z)$ može razviti u stepeni red po z^{-1}:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}\,, \qquad (5.114)$$

koji ima istu oblast konvergencije kao $X(z)$. Budući da je je *z*-transformacija jedinstvena, ukoliko se posmatra zajedno sa njenom oblašću konvergencije, elementi signala u vremenskom domenu su jedinstveno određeni sa:

$$x(n)=c_n,\ \forall n\,, \qquad (5.115)$$

što zaključujemo poređenjem (5.114) sa definicionim izrazom (5.1) za *z*-transformaciju.

Ovaj metod je pogodan ako je razvoj u stepeni red jednostavno izvesti. U slučajevima kada je $X(z)$ racionalna funkcija, dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku se odredi nekoliko prvih članova stepenog reda, pa se onda generalizacijom, kada je to moguće, izvodi funkcionalni oblik za $x(n)$.

U nekim primjenama nije neophodno odrediti funkcionalni oblik signala u vremenu, već je dovoljno odrediti samo nekoliko početnih elemenata originalnog signala $x(n)$. Na osnovu poznate oblasti konvergencije, funkcija $X(z)$ se razdvoji na dva dijela: prvi sa oblašću konvergencije koja je spoljašnjost kruga, čijom inverznom *z*-transformacijom se dobije kauzalni, i drugi, sa oblašću konvergencije koja je unutrašnjost kruga, čijom inverznom *z*-transformacijom se dobije antikauzalni dio signala u vremenskom domenu. Kako bismo dobili elemente kauzalnog signala, dijelimo polinom u brojniku sa polinomom u nazivniku počevši od njegovog najvišeg stepena. Na primjeru jednostavne *z*-transformacije $X(z)=\dfrac{a}{a-z}$, $|z|>|a|$, to znači sljedeće:

$$X(z)=\frac{a}{-z+a}=a:(-z+a)=-az^{-1}-a^2z^{-2}-a^3z^{-3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-n}\ . \quad (5.116)$$

Ovakvim načinom dijeljenja dobijamo stepeni red po *z*, sa negativnim stepenima, te jednostavnim poređenjem sa (5.1) slijedi da je:

$$x(1)=-a,\ x(2)=-a^2,\ x(3)=-a^3,\ \cdots \quad (5.117)$$

Ako *z*-transformacija konvergira u unutrašnjosti kruga, npr. ako je $X(z)=\frac{a}{a-z},\ |z|<|a|$, inverznom *z*-transformacijom dobićemo antikauzalni signala ako se polinom u brojniku dijeli sa polinomom u nazivniku počevši od najnižeg stepena, tako da se dobije stepeni red po *z*, sa pozitivnim stepenima:

$$X(z)=\frac{a}{a-z}=a:(a-z)=1+a^{-1}z+a^{-2}z^2+a^{-3}z^3-\cdots=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}\ , \quad (5.118)$$

odakle poređenjem sa (5.1) dobijamo elemente signala $x(n)$:

$$x(0)=1,\ x(-1)=a^{-1},\ x(-2)=a^{-2},\ x(-3)=a^{-3},\ \cdots \quad (5.119)$$

Primjer 5.9:

Razvojem u stepeni red odrediti inverznu *z*-transformaciju od $X(z)=\frac{5z}{1+z-6z^2}$, ako je oblast konvergencije data sa $1/3<|z|<1/2$.

Rješenje:

Oblast konvergencije u obliku prstena, prikazana na Slici 5.11, nam ukazuje na to da je signal $x(n)$ nekauzalan, tj. da ima elemente i za $n>0$ i za $n<0$. Oblast konvergencije je određena polovima funkcije $X(z)$: $z_1=1/3$ i $z_2=1/2$. Ako rastavimo funkciju $X(z)$ u parcijalne razlomke:

$$X(z)=\frac{5z}{1+z-6z^2}=-\frac{1}{1+3z}+\frac{1}{1-2z}=X_1(z)+X_2(z), \quad (5.120)$$

tako da prvi član:

$$X_1(z) = -\frac{1}{1+3z}, \tag{5.121}$$

konvergira za $|z| > 1/3$, a drugi član:

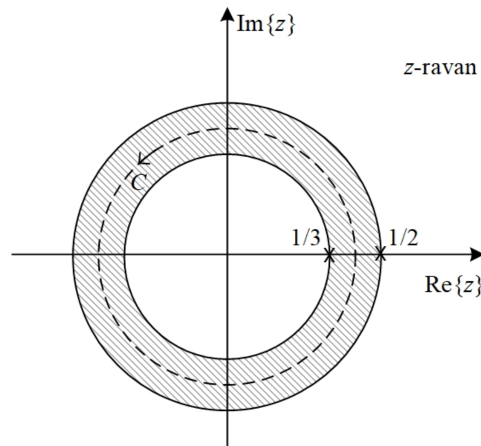
$$X_2(z) = \frac{1}{1-2z}, \tag{5.122}$$

za $|z| < 1/2$, $X(z)$ će konvergirati u presjeku oblasti konvergencija $1/3 < |z| < 1/2$, gdje konvergiraju i $X_1(z)$ i $X_2(z)$.

Oblast konvergencije $X_1(z)$ je spoljašnjost kruga, pa dijeljenje radimo počevši od najvišeg stepena kako bismo generisali stepeni red po *z*, sa negativnim eksponentima:

$$X_1(z) = -\frac{1}{1+3z} = -1:(3z+1) = -\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2} - \frac{1}{27}z^{-3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}z^{-n} + \cdots, \tag{5.123}$$

odakle se, poređenjem sa (5.1), dobija kauzalni dio signala:



Slika 5.11 Oblast konvergencije i raspored konačnih polova zadate z-transformacije $X(z)$.

$$x_1(n) = \frac{(-1)^n}{3^n},\ n > 0. \tag{5.124}$$

Kod $X_2(z)$ oblast konvergencije je unutrašnjost kruga. Dijeljenje radimo počevši od najnižeg stepena, tako da dobijamo stepeni red po *z*, sa pozitivnim eksponentima:

$$X_2(z) = \frac{1}{1-2z} = 1:(1-2z) = 1 + 2z + 4z^2 + \cdots + 2^n z^n + \cdots, \tag{5.125}$$

odakle, poredeći sa (5.1), očitamo elemente antikauzalnog dijela signala:

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n \le 0. \tag{5.126}$$

Konačno možemo pisati da je:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \le 0, \\ \frac{(-1)^n}{3^n}, & n > 0. \end{cases} \tag{5.127}$$

□

5.7 Primjena z- transformacije u analizi sistema i obradi signala

Linearni, vremenski invarijantni (LTI) sistemi se opisuju jednačinama diferencija u obliku:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \quad a_0 = 1, \tag{5.128}$$

gdje su $a_i, i = 0,1,\ldots,N$ i $b_j, j = 1,2,\ldots,M$ konstante koje zavise od elemenata sistema i njihovih međusobnih veza, $x(n)$ pobudni signal, a $y(n)$ odziv sistema. U daljnjem izlaganju smatraćemo da su te konstante realne. Napisana u razvijenom obliku, ova jednačina diferencija je data sa:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M). \tag{5.129}$$

Do sada smo naučili da odziv LTI sistema pri nultom početnom stanju možemo odrediti konvolucijom ulaznog signala i impulsnog odziva $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n). \tag{5.130}$$

Drugi metod određivanja odziva, koji obuhvata i odziv nepobuđenog sistema, zasniva se na rješavanju jednačine diferencija (5.128) u domenu diskretnog vremena.

5.7.1 Određivanje odziva množenjem u z-domenu

U Glavi 4 smo definisali funkciju prenosa diskretnog LTI sistema sa:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}. \tag{5.131}$$

Do ove definicije smo došli pobuđujući LTI sistem kompleksnim eksponencijalnim signalom:

$$x(n)=z^n,\ z\in\mathbb{C}. \tag{5.132}$$

Tada je odziv istog oblika kao pobuda, ali njegova amplituda i fazni pomjeraj zavise od funkcije prenosa $H(z)$:

$$y(n)=h(n)*x(n)\Big|_{x(n)=z^n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{n-k}=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}\right]z^n=H(z)z^n. \tag{5.133}$$

Poredeći (5.131) sa definicionim izrazom za *z*-transformaciju (5.1), vidimo da je funkcija prenosa $H(z)$ jednaka *z*-transformaciji impulsnog odziva:

$$h(n)\leftrightarrow H(z). \tag{5.134}$$

Na osnovu osobine konvolucije u vremenskom domenu:

$$h(n)*x(n)\leftrightarrow H(z)X(z), \tag{5.135}$$

koja podjednako vrijedi kako za unilateralnu, tako i za bilateralnu *z*-transformaciju, odziv $y(n)$ na proizvoljnu pobudu $x(n)$, čija je *z*-transformacija $X(z)$, uz poznatu funkciju prenosa $H(z)$, možemo odrediti množenjem u transformacionom domenu:

$$Y(z)=H(z)X(z), \tag{5.136}$$

a zatim, povratkom u vremenski domen:

$$y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)X(z)\}. \tag{5.137}$$

Ovaj metod daje odziv na proizvoljnu pobudu pri nultom početnom stanju.

Bilateralnu *z*-transformaciju nije pogodno koristiti za traženje odziva u praktičnim primjenama, jer ona podrazumijeva poznavanje pobudnog signala od $-\infty$ do ∞, dok u praksi smatramo da je pobuda poznata od početnog trenutka posmatranja, tj. za $n\geq 0$. Početni uslovi se takođe vezuju za trenutak početka posmatranja sistema. Zbog toga se odziv određuje primjenom unilateralne *z*-transformacije, pri čemu se podrazumijeva kauzalnost sistema. Odziv kauzalnog LTI sistema dat preko konvolucije:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k), \tag{5.138}$$

na kauzalnu pobudu u vidu kompleksnog eksponencijalnog signala:

$$x(n)=z^n u(n), \tag{5.139}$$

je jednak:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)z^{n-k}=\left[\sum_{k=0}^{n}h(k)z^{-k}\right]z^n. \tag{5.140}$$

Za razliku od (5.133), izraz u uglastim zagradama u (5.140) je funkcija vremena, jer je gornja granica sume jednaka *n*. Zbog toga odziv nije istog oblika kao pobuda, za razliku od odziva kada je sistem pobuđen nekauzalnom sopstvenom diskretnom funkcijom $x(n)=z^n$. Međutim, za sisteme kod kojih je impulsni odziv takav da se proizvod $h(k)z^{-k}$ u sumi (5.140) smanjuje pri porastu vremenske promjenljive, članovi $h(k)z^{-k}$ će nakon dovoljno dugo vremena postati zanemarljivo mali, te se može smatrati da suma nakon dovoljno dugo vremena dostiže svoju konačnu vrijednost koja ne zavisi od gornje granice sumiranja *n*. Zbog toga, za velike vrijednosti *n* vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{n}h(k)z^{-k}\approx\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k}, \tag{5.141}$$

što znači da odziv nakon dovoljno dugo vremena poprima isti oblik kao pobuda. Tada kažemo da je nastupilo ustaljeno stanje, u kome vrijedi da je odziv na kauzalnu sopstvenu diskretnu funkciju (5.139) dat sa:

$$y(n)\approx\left[\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k}\right]z^n=H(z)z^n. \tag{5.142}$$

Interval vremena prije nastupanja ustaljenog stanja se naziva prelazni proces.

Na osnovu ranije provedene analize u domenu diskretnog vremena, znamo da je odziv jednak zbiru sopstvenog i prinudnog odziva. Nakon dovoljno dugo vremena sopstveni odziv iščezava i odziv postaje jednak prinudnoj komponenti.

Pri kauzalnoj kompleksnoj eksponencijalnoj pobudi taj odziv je u ustaljenom stanju dat sa:

$$y(n) \approx y_p(n) = H(z)z^n . \tag{5.143}$$

Stoga se funkcija prenosa često definiše i kao količnik prinudnog odziva na kompleksnu eksponencijalnu pobudu i same te pobude:

$$H(z) = \frac{prinudni\ odziv\ na\ z^n}{z^n} . \tag{5.144}$$

5.7.2 Funkcija prenosa diskretnih sistema

Poznavajući pravilo *z*-transformacije o konvoluciji diskretnih signala:

$$y(n) = h(n) * x(n) \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z), \tag{5.145}$$

zaključujemo da se funkcija prenosa diskretnog sistema može iskazati kao količnik *z*-transformacije odziva i *z*-transformacije pobude:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} . \tag{5.146}$$

Kada je funkcija prenosa $H(z)$ racionalna funkcija, uobičajeno se koriste oznake $N(z)$ za polinom u brojniku i $D(z)$ za polinom u nazivniku, pa se funkcija prenosa zapisuje u obliku:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} . \tag{5.147}$$

Kod diskretnih sistema opisanih rekurzivnom jednačinom diferencija:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k), \tag{5.148}$$

impulsni odziv je u opštem slučaju beskonačnog trajanja. Funkcija prenosa je racionalna funkcija sa nulama z_k i polovima p_k konačnih vrijednosti, pa može da se zapiše u faktorizovanom obliku, kao količnik dva polinoma po z^{-1}:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=K\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k z^{-1}\right)}, \tag{5.149}$$

ili kao količnik dva polinoma po *z*:

$$H(z)=z^{N-M}\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{M-k}}{z^N+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{N-k}}=Kz^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(z-z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(z-p_k\right)}. \tag{5.150}$$

Ako je diskretni sistem opisan nerekurzivnom jednačinom diferencija:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k), \tag{5.151}$$

onda je impulsni odziv konačnog trajanja. Funkcija prenosa ima *M* konačnih nula i pol reda *M* u nuli:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}=z^{-M}\sum_{k=0}^{M}b_k z^{M-k}. \tag{5.152}$$

Posebnu klasu sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom čine sistemi koji nemaju konačnih nula transmisije (eng. *all-pole systems*), kod kojih je $b_k=0,\ k\neq 0$, i čija funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z)=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=z^N\frac{b_0}{z^N+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{N-k}}. \tag{5.153}$$

5.7.3 Uslov stabilnosti diskretnih sistema u *z*-domenu

Pokazali smo da je diskretni sistem stabilan ako njegov impulsni odziv zadovoljava sljedeći uslov:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty. \tag{5.154}$$

Posmatrano u z-domenu, pokazaćemo da uslov stabilnosti možemo iskazati na sljedeći način: diskretni sistem je stabilan ako i samo ako oblast konvergencije njegove funkcije prenosa sadrži jediničnu kružnicu.

Iz uslova stabilnosti (5.154), datog u vremenskom domenu, slijedi da funkcija prenosa konvergira na jediničnoj kružnici u z-ravni:

$$\left|H(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n) z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right|\left|z^{-n}\right|\Bigg|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| < \infty . \quad (5.155)$$

Vrijedi i obrnuto. Prvo iz razmatranja izuzmimo FIR sisteme, jer su oni uvijek stabilni. Ako se radi o kauzalnom FIR sistemu, njegova funkcija prenosa nema drugih polova osim pola M-tog reda u nuli:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M} , \quad (5.156)$$

te impulsni odziv ovog sistema ima konačan broj elemenata:

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \ldots + b_M \delta(n-M) . \quad (5.157)$$

Ako sistem nije kauzalan, opet je broj elemenata impulsnog odziva konačan, samo se pojavljuju elementi i za $n < 0$. Zbog konačnosti impulsnog odziva uvijek je zadovoljen uslov (5.154) te je FIR sistem uvijek stabilan.

Posmatrajmo sada kauzalan IIR diskretni sistem sa funkcijom prenosa:

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - p_k z^{-1}\right)} . \quad (5.158)$$

Pretpostavimo da je $M < N$, jer se za $M \geq N$ funkcija prenosa diskretnog

sistema može predstaviti zbirom funkcije prenosa FIR sistema i funkcije prenosa IIR sistema kod koga je $M < N$. Razvojem u parcijalne razlomke, u slučaju da su svi polovi jednostruki, imamo:

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}} , \quad (5.159)$$

gdje je:

$$A_k = \lim_{z \to p_k} \left(1 - p_k z^{-1}\right) H(z),\ k = 1,2,...,N\,. \tag{5.160}$$

Odgovarajući impulsni odziv je jednak:

$$h(n) = \left[A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + ... + A_N p_N^n \right] u(n)\,. \tag{5.161}$$

Treba da pokažemo da iz uslova da oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu slijedi da je sistem stabilan. Budući da posmatramo kauzalan sistem, čija oblast konvergencije mora da bude spoljašnjost kruga, zaključujemo da se svi polovi diskretnog sistema nalaze u unutrašnjosti jediničnog kruga u z-ravni i da vrijedi:

$$\left| p_k \right| < 1,\ k = 1,2,...,N\,. \tag{5.162}$$

Ako su svi polovi funkcije prenosa po modulu manji od jedan, niti jedan od članova impulsnog odziva (5.161) ne može da poprimi beskonačnu vrijednost, nego im vrijednosti opadaju sa porastom vremena, te je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty$. Prema tome, kauzalan sistem čija oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu je stabilan. Slično se može pokazati i u slučaju da funkcija prenosa ima višestruke polove.

Slično razmatranje se može sprovesti i za antikauzalne sisteme. Tada se iz uslova da je oblast konvergencije unutrašnjost kruga koja obuhvata jediničnu kružnicu, dolazi do zaključka da svi polovi p_k moraju da imaju modul veći od jedinice. Ti polovi u impulsnom odzivu generišu članove funkcionalnog oblika p_k^n, koji onda teže nuli kada $n \to -\infty$.

Dakle, diskretni sistem je stabilan ako i samo ako oblast konvergencije funkcije prenosa obuhvata jediničnu kružnicu.

5.7.4 Određivanje odziva rješavanjem jednačina diferencija primjenom *z*-transformacije

Pretpostavimo da želimo da odredimo odziv LTI sistema koji je opisan jednačinom diferencija *N*-tog reda:

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_Ny(n-N)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_Mx(n-M), \quad (5.163)$$

pri čemu su poznati početni uslovi $y(-N), y(-N+1),..., y(-1)$ i kauzalni pobudni signal. Uvešćemo dodatnu pretpostavku za ulazni signal i ograničiti se na pobude čije su *z*-transformacije racionalne funkcije. Ova pretpostavka nije mnogo restriktivna, jer većina signala od praktičnog značaja ima racionalnu *z*-transformaciju.

Nakon primjene unilateralne *z*-transformacije na posmatranu jednačinu diferencija, vodeći računa o pravilu pomaka:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\}=x(-m)z^0+x(-m+1)z^{-1}+\cdots+x(-1)z^{-m+1}+z^{-m}X(z), \quad (5.164)$$

dobijamo:

$$Y(z)\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}\right)=X(z)\left(b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}\right)+IC(z), \quad (5.165)$$

gdje su u polinom $IC(z)$ grupisani svi članovi koji uključuju početne uslove.

Ako želimo samo da odredimo funkciju prenosa, svi početni uslovi se postavljaju na nulu, jer bilo koja karakteristika sistema ne smije da zavisi od trenutno zatečenog stanja sistema. Tako dobijamo funkciju prenosa:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{N(z)}{D(z)}, \quad (5.166)$$

koja je količnik dva polinoma po *z* sa realnim koeficijentima, tzv. realna racionalna funkcija. Ako polinom u nazivniku izjednačimo s nulom:

$$D(z)=0, \quad (5.167)$$

rješenja ove jednačine su *polovi funkcije prenosa*. Istovremeno su to korijeni karakteristične jednačine sistema (vidi (4.62)), te se polinom $D(z)$ naziva *karakteristični polinom*.

Međutim, ako nas zanima kompletan odziv koji zavisi i od početnog stanja sistema, potrebno je pronaći inverznu *z*-transformaciju izraza:

$$Y(z)=H(z)X(z)+\frac{1}{D(z)}IC(z), \tag{5.168}$$

koji se dobije iz (5.165) dijeljenjem sa $D(z)$. Prvi član $H(z)X(z)$ je *z*-transformacija odziva pri nultim početnim uslovima, dok je drugi član $\frac{1}{D(z)}IC(z)$ *z*-transformacija odziva nepobuđenog sistema.

Uz pretpostavku da je *z*-transformacija pobude realna racionalna funkcija:

$$X(z)=\frac{N_X(z)}{D_X(z)}, \tag{5.169}$$

oba člana u (5.168) su realne racionalne funkcije, te se odziv može odrediti inverznom *z*-transformacijom, koristeći metod razvoja u parcijalne razlomke, opisan u Poglavlju 5.6.3:

$$y(n)=z^{-1}\{Y(z)\}. \tag{5.170}$$

Kompletan odziv se sastoji od odziva na pobudu, $y_e(n)$, i odziva nepobuđenog sistema, $y_a(n)$:

$$y(n)=y_e(n)+y_a(n), \tag{5.171}$$

koji se lako razdvoje, ako se odvojeno traže inverzne *z*-transformacije članova zbira u (5.168):

$$y_e(n)=z^{-1}\{H(z)X(z)\}, \tag{5.172}$$

$$y_a(n)=z^{-1}\left\{\frac{IC(z)}{D(z)}\right\}. \tag{5.173}$$

5.7.4.1 Odziv na pobudu pri nultom početnom stanju

Polinomi u brojniku i nazivniku *z*-transformacije odziva (5.168) se, pri nultom početnom stanju, mogu faktorizovati na sljedeći način:

$$Y(z)=\frac{N(z)}{D(z)}\cdot\frac{N_X(z)}{D_X(z)}, \tag{5.174}$$

$$Y(z)=K\frac{\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)\ldots\left(1-z_Mz^{-1}\right)}{\left(1-p_1z^{-1}\right)\left(1-p_2z^{-1}\right)\ldots\left(1-p_Nz^{-1}\right)}\cdot\frac{\left(1-v_1z^{-1}\right)\left(1-v_2z^{-1}\right)\ldots\left(1-v_{M_X}z^{-1}\right)}{\left(1-q_1z^{-1}\right)\left(1-q_2z^{-1}\right)\ldots\left(1-q_{N_X}z^{-1}\right)}. \tag{5.175}$$

Sa $z_i,\ i=1,2,\ldots,M$ i $p_i,\ i=1,2,\ldots,N$ su označene nule i polovi funkcije prenosa, respektivno. Sa $v_i,\ i=1,2,\ldots,M_X$ i $q_i,\ i=1,2,\ldots,N_X$ su respektivno označeni korijeni polinoma u brojniku i nazivniku *z*-transformacije pobude $X(z)$. Dodatno ćemo pretpostaviti da ne dolazi do poništavanja nula i polova funkcije prenosa sa polovima i nulama *z*-transformacije pobude, respektivno, te da je stepen polinoma u brojniku *z*-transformacije odziva $Y(z)$ manji od stepena polinoma u nazivniku.

Ako se radi o kauzalnim sistemima sa kauzalnom pobudom, uz pretpostavku da je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku i da su svi polovi jednostruki, nakon razvoja u parcijalne razlomke u obliku:

$$Y(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_iz}{z-p_i}+\sum_{i=1}^{N_X}\frac{A_i'z}{z-q_i}, \tag{5.176}$$

dobijamo odziv na pobudu pri nultom početnom stanju:

$$y(n)=\left[\sum_{i=1}^{N}A_ip_i^n+\sum_{i=1}^{N_X}A_i'q_i^n\right]u(n). \tag{5.177}$$

Primijetimo da smo na ovaj način razdvojili dijelove odziva, koji su vezani za polove funkcije prenosa p_i, od dijela odziva koji je vezan za polove q_i *z*-transformacije pobude.

U opštem slučaju se traženje inverzne z-transformacije razvojem u parcijalne razlomke usložnjava. Oblast konvergencije odziva $Y(z)$, koju ćemo zapisati sa $R^- < |z| < R^+$, je dio z-ravni u kom konvergiraju i $H(z)$ i $X(z)$. Razvojem u parcijalne razlomke se dobija:

$$\begin{aligned} Y(z) = & \sum_{i=0}^{M-N} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{Np} \frac{A_i z}{z-p_i} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{B_i z}{z-s_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{Nmp} \sum_{k=0}^{mp_i-1} \frac{C_i z}{(z-p_i)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} \frac{D_i z}{(z-s_i)^{k+1}} + \\ & + \sum_{i=0}^{M_X-N_X} c_i' z^{-i} + \sum_{i=1}^{Nq} \frac{A_i' z}{z-q_i} + \sum_{i=1}^{Nr} \frac{B_i' z}{z-r_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{Nmq} \sum_{k=0}^{mq_i-1} \frac{C_i' z}{(z-q_i)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{Nmr} \sum_{k=0}^{mr_i-1} \frac{D_i' z}{(z-r_i)^{k+1}}, \end{aligned} \tag{5.178}$$

gdje su sa p_i i s_i označeni korijeni polinoma $D(z)$, a sa q_i i r_i korijeni polinoma $D_X(z)$, takvi da je $|p_i| < R^-$ i $|q_i| < R^-$, a $|s_i| > R^+$ i $|r_i| > R^+$. Np je broj jednostrukih, a Nmp broj višestrukih korijena p_i reda mp_i. Ns je broj jednostrukih, a Nms broj višestrukih korijena s_i reda ms_i. Slično, Nq je broj jednostrukih, a Nmq broj višestrukih korijena q_i reda mq_i, dok je Nr broj jednostrukih, a Nmr broj višestrukih korijena r_i reda mr_i. Inverznom z-transformacijom dobijamo odziv sistema:

$$\begin{aligned} y(n) = & \sum_{i=0}^{M-N} c_i \delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Np} A_i p_i^n\right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Ns} B_i s_i^n\right] u(-n-1) + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{Nmp} \sum_{k=0}^{mp_i-1} C_i \binom{n}{k} p_i^{n-k}\right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} D_i \binom{n}{k} s_i^{n-k}\right] u(-n-1) + \\ & + \sum_{i=0}^{M_X-N_X} c_i' \delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Nq} A_i' q_i^n\right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nr} B_i' r_i^n\right] u(-n-1) + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{Nmq} \sum_{k=0}^{mq_i-1} C_i' \binom{n}{k} q_i^{n-k}\right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nmr} \sum_{k=0}^{mr_i-1} D_i' \binom{n}{k} r_i^{n-k}\right] u(-n-1). \end{aligned} \tag{5.179}$$

5.7.4.2 Sopstveni i prinudni odziv

Na osnovu analize u vremenskom domenu znamo da je sopstveni odziv kauzalnog LTI sistema, koji se dobije rješavanjem homogene jednačine diferencija, jednak:

$$y_s(n) = \sum_{i=1}^{N} K_i p_i^n, \; n \geq 0, \tag{5.180}$$

pod uslovom da su svi korijeni p_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ karakteristične jednačine:

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1} z + a_N = 0 \tag{5.181}$$

jednostruki. Poređenjem sa odzivom na pobudu pri nultom početnom stanju i pri jednostrukim polovima *z*-transformacije odziva (5.177), koji smo dobili primjenom *z*-transformacije, vidimo da je sopstveni odziv sadržan u (5.177), te da je generisan polovima funkcije prenosa. Pri tome je $A_i = K_i$. Preostali dio odziva u (5.177) predstavlja prinudni odziv, odnosno ustaljeno stanje. Slično razmatranje se može sprovesti i u slučajevima kada se javljaju višestruki polovi.

Kod realnih racionalnih funkcija prenosa nule i polovi dolaze u konjugovano - kompleksnim parovima. Pretpostavimo da su svi polovi jednostruki. Zavisno od rasporeda polova u kompleksnoj *z*-ravni, mogu nastupiti različiti oblici sopstvenog odziva:

1. svi polovi se nalaze unutar jediničnog kruga – sopstveni odziv eksponencijalno opada s porastom vremena,
2. pojavljuje se konjugovano kompleksni par polova na jediničnoj kružnici – sopstveni odziv je u obliku sinusnih signala,
3. postoje polovi van jediničnog kruga – sopstveni odziv eksponencijalno raste s porastom vremena.

5.7.4.3 Odziv nepobuđenog sistema

Odziv nepobuđenog sistema se dobije inverznom *z*-transformacijom člana $IC(z)/D(z)$ u (5.168). Polovi ove racionalne funkcije su jednaki polovima funkcije prenosa, te je zbog toga sopstveni odziv nepobuđenog sistema istog oblika kao sopstveni odziv na pobudu.

U prethodnom izlaganju posebno smo razmatrali odziv na pobudu kao zbir sopstvenog odziva na pobudu i prinudnog odziva, te odziv nepobuđenog sistema. Ako nas interesuje samo kompletan odziv, član $IC(z)/D(z)$ u izrazu (5.168) nije potrebno posebno izdvajati, niti je prilikom faktorizacije *z*-transformacije odziva potrebno razdvajati uticaj polova funkcije prenosa od uticaja polova *z*-transformacije pobude, već se kompletan odziv jednostavno određuje inverznom *z*-transformacijom kompletnog izraza za $Y(z)$, nekom od izloženih metoda.

5.7.5 Jednačine stanja u *z*-domenu

Opis sistema jednačinama stanja u matričnom obliku je dat sa:

$$\mathbf{x}(n+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(n)+\mathbf{B}\mathbf{e}(n), \tag{5.182}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(n+1)$ vektor promjenljivih stanja u trenutku $n+1$, $\mathbf{x}(n)$ vektor promjenljivih stanja u trenutku n, $\mathbf{e}(n)$ vektor ulaznih signala u trenutku n, matrica $\mathbf{A}$ kvadratna matrica stanja dimenzija $N \times N$ i matrica $\mathbf{B}$ pravougaona matrica koeficijenata uz ulazne signale dimenzija $N \times M$. Izlazne promjenljive sistema su određene matričnom jednačinom:

$$\mathbf{y}(n)=\mathbf{C}\mathbf{x}(n)+\mathbf{D}\mathbf{e}(n), \tag{5.183}$$

gdje su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrice koje povezuju izlazne promjenljive sa promjenljivim stanja i pobudama.

Ako postoje transformacioni parovi: $\mathbf{x}(n) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)$, $\mathbf{y}(n) \leftrightarrow \mathbf{Y}(z)$ i $\mathbf{e}(n) \leftrightarrow \mathbf{E}(z)$, pri čemu se *z*-transformacija vektora računa po komponentama, primjenjujući *z*-transformaciju na matrične jednačine (5.182) i (5.183) dobijamo:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{X}_0 = \mathbf{AX}(z) + \mathbf{BE}(z), \tag{5.184}$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{CX}(z) + \mathbf{DE}(z), \tag{5.185}$$

gdje je $\mathbf{X}_0$ vektor koji sadrži vrijednosti promjenljivih stanja u početnom trenutku posmatranja.

Rješenje za *z*-transformacije promjenljivih stanja dobije se iz (5.184):

$$\mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}_0 + (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BE}(z), \tag{5.186}$$

gdje je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica reda n. Za izlazne promjenljive *z*-transformacije su date matričnom jednačinom:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\left[z(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}_0 + (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BE}(z)\right] + \mathbf{DE}(z) = \\ &= \mathbf{C}z(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}_0 + \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{E}(z). \end{aligned} \tag{5.187}$$

Ranije smo funkciju prenosa definisali za sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom. Definiciju možemo proširiti na sisteme sa više ulaza i više izlaza. Uz nulte početne uslove, definiše se *matrična funkcija prenosa* sa:

$$\mathbf{T}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{E}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{5.188}$$

Poznavajući matričnu funkciju prenosa, izlazne promjenljive, uz nulte početne uslove, se mogu iskazati jednostavnom matričnom jednačinom:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{E}(z). \tag{5.189}$$

Sve pojedinačne funkcije prenosa jednog sistema, definisane kao količnik jedne izlazne promjenljive i jedne pobude, imaju isti polinom u nazivniku. To je karakteristični polinom koji smo već pominjali i označavali sa $D(z)$.

5.7.6 Analiza složenih sistema u *z*-domenu

Rad sa složenim sistemima pojednostavljujemo prikazujući ih preko jednostavnijih sistema u vidu kaskadne ili paralelne veze, sistema u povratnoj sprezi ili njihove kombinacije. Impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema jednak je konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n). \tag{5.190}$$

Znajući da konvoluciji u vremenskom domenu odgovara množenje u *z*-domenu, funkcija prenosa kaskadne veze dva LTI sistema jednaka je proizvodu funkcija prenosa pojedinačnih sistema:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z). \tag{5.191}$$

Za više sistema u kaskadnoj vezi, kao na Slici 5.12, vrijedi da je:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y_1(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} \cdot \frac{Y_3(z)}{Y_2(z)} \cdots \frac{Y_{n-1}(z)}{Y_{n-2}(z)} \cdot \frac{Y(z)}{Y_{n-1}(z)}, \tag{5.192}$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_n(z). \tag{5.193}$$

Kod paralelne veze LTI sistema, prikazane na Slici 5.13, isti pobudni signal se istovremeno dovodi na ulaz svih pojedinačnih sistema, a izlaz kompletnog sistema jednak je zbiru izlaznih signala pojedinačnih sistema. Zbog osobine linearnosti *z*-transformacije, jednako vrijedi i u *z*-domenu:

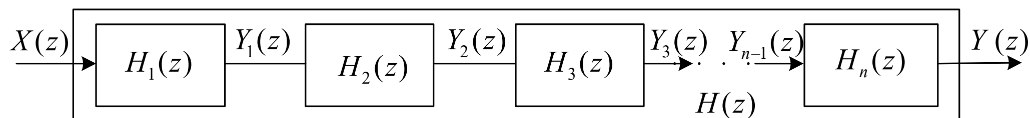
$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z) + \cdots + Y_n(z). \tag{5.194}$$

Za svaki pojedinačni sistem vrijedi da je:

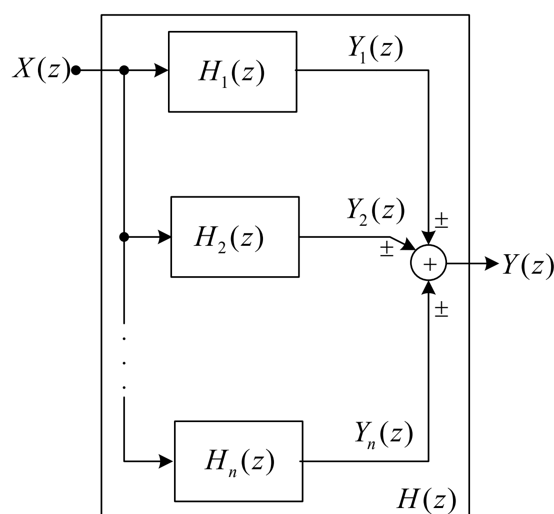
$$Y_i(z) = H_i(z) \cdot X(z), \; i = 1,2,\ldots,n, \tag{5.195}$$

tako da za funkciju prenosa paralelne veze n LTI sistema dobijamo:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z). \tag{5.196}$$



Slika 5.12 Blok šema kaskadne veze n LTI sistema u z-domenu.



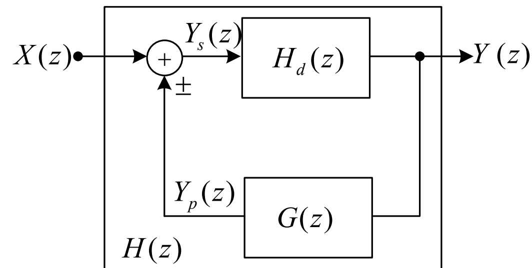
Slika 5.13 Blok šema paralelne veze n LTI sistema u z-domenu.

Posmatrajmo sada blok šemu sistema sa povratnom vezom, datu na Slici 5.14. Određivanje funkcije prenosa sistema sa povratnom vezom u z-domenu je mnogo jednostavnije nego određivanje impulsnog odziva ovakvog sistema u domenu diskretnog vremena:

$$Y_p(z) = G(z)Y(z), \tag{5.197}$$

$$Y_s(z) = X(z) \pm Y_p(z), \tag{5.198}$$

$$Y(z) = H_d(z)Y_s(z), \tag{5.199}$$



Slika 5.14 Blok šema LTI sistema sa povratnom vezom u *z*-domenu.

na osnovu čega slijedi da je:

$$Y(z) = H_d(z)\left[X(z) \pm G(z)Y(z)\right], \tag{5.200}$$

te je funkcija prenosa sistema sa povratnom vezom:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_d(z)}{1 \mp G(z)H_d(z)}. \tag{5.201}$$

Impulsni odziv sistema sa povratnom vezom se može odrediti inverznom *z*-transformacijom funkcije prenosa $H(z)$.

Glava 6

FURIJEOVA TRANSFORMACIJA DISKRETNIH SIGNALA

U mnogim slučajevima, signal se transformiše iz originalnog domena (recimo vremenskog i/ili prostornog) u neki drugi domen, sa ciljem da predstava signala u transformacionom domenu olakša obradu i analizu signala. Najčešće se signal transformiše tako da se razlaže na skup elementarnih signala, koji se jednostavno obrađuju i analiziraju. Ako se razlaganje vrši na elementarne kompleksne eksponencijalne signale različitih učestanosti, koje nazivamo *frekvencijske komponente*, govorimo o Furijeovoj analizi signala. Pri tom razlaganju svakoj frekvencijskoj komponenti se pridružuje pripadajuća amplituda i faza, te uvodimo pojmove amplitudnog i faznog spektra signala. *Amplitudni i fazni spektar signala* su funkcije učestanosti čije su vrijednosti, respektivno, jednake amplitudama i fazama elementarnih kompleksnih eksponencijalnih signala na koje se signal razlaže. Reprezentaciju signala u frekvencijskom domenu preko amplitudnog i faznog spektra zovemo jednim imenom *spektar signala*, a analizu signala zasnovanu na razlaganju signala na elementarne kompleksne eksponencijalne signale zovemo *spektralna analiza signala*. Spektralna analiza signala ima za cilj da, najčešće iz konačnog skupa odmjeraka signala, odredi ili procijeni njegov spektralni sadržaj, tj. distribuciju amplituda i faza, snage ili energije signala po njegovim frekvencijskim komponentama.

Istorijski gledano, ova oblast je uspostavljena prije više od stotinu godina, prvo za kontinualne, a zatim i za diskretne signale. Furije (Joseph Fourier) je počeo da primjenjuje ideje spektralne analize početkom devetnaestog vijeka. Njegova najpoznatija i formalna publikacija na ovu temu je "Analitička teorija toplote" ("Théorie analytique de la chaleur") iz 1822. godine. Međutim, postoje indicije da je i Gaus (Carl Friedrich Gauss) primjenjivao spektralnu analizu za modeliranje periodičnosti u diskretnim podacima i prvi rad na ovu temu, pod nazivom "Teorija kretanja nebeskih tijela u konusnim presjecima oko sunca" ("Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium") je publikovao još 1809. godine. Iako Furijeova analiza tada još nije bila formalno razvijena, Gaus je intuitivno koristio slične metode za analizu periodičnosti u astronomskim podacima.

Pristupi spektralnoj analizi se razlikuju ovisno o tipu signala, tako da postoje različite metode za analizu stacionarnih determinističkih i slučajnih signala, te nestacionarnih signala, o čemu ćemo detaljno govoriti u poglavljima koja slijede. U ovom poglavlju ćemo uvesti osnove Furijeove analize diskretnih signala.

6.1 Furijeov red diskretnih signala

Pođimo od pretpostavke da periodičan diskretan signal, čiji je osnovni period N, možemo razviti u neku vrstu Furijeovog reda. Ukoliko je diskretni signal nastao odmjeravanjem kontinualnog signala, osnovnu učestanost diskretnog signala određujemo preko veze digitalne i kontinualne učestanosti, $\omega_0 = \Omega_0 \Delta t = = (2\pi/T_0)(T_0/N)$, tako da je $\omega_0 = 2\pi/N$. U Glavi 2 smo pokazali da, za razliku od kontinualnih prostoperiodičnih funkcija, kod kojih brzina oscilacija raste sa porastom učestanosti, pa zbog toga postoji beskonačno mnogo harmonijskih komponenti, brzina oscilacija diskretnih prostoperiodičnih signala raste kad se digitalna ugaona učestanost mijenja od 0 do π, a zatim opada do 2π, da bi nastavila da se periodično ponavlja na svakom intervalu širine 2π. Zbog ove

periodičnosti u frekvencijskom domenu, signali učestanosti ω i $\omega \pm 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su identični. U Glavi 2 je takođe pokazano da postoji samo N različitih kompleksnih sinusnih signala, čije su učestanosti $\omega_k = 2k\pi/N$, $k = 0,1...N-1$, a koji su periodični sa periodom N. To znači da signal čija je osnovna digitalna učestanost $\omega_0 = 2\pi/N$ ima maksimalno N harmonijskih komponenti čije su učestanosti jednake cjelobrojnom umnošku ove osnovne učestanosti. Prema tome, Furijeova reprezentacija diskretnih periodičnih signala perioda N može da sadrži najviše N različitih harmonijskih komponenti, za razliku od razvoja kontinualnih periodičnih signala u Furijeov red, gdje, u opštem slučaju, postoji beskonačno mnogo harmonijskih komponenti. To je osnovna razlika između reprezentacije kontinualnih i diskretnih signala preko Furijeovog reda, koju ćemo sada i formalno uvesti.

Pretpostavimo da imamo periodičnu sekvencu $\tilde{x}(n)$ sa osnovnim periodom N i da Furijeova reprezentacija ovog signala sadrži N harmonijskih eksponencijalnih sekvenci oblika $e^{jk\omega_0 n}$, $\omega_0 = 2\pi/N$, $n = 0,1,...,N-1$, tako da je:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\omega_0 n}, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \ n \in \mathbb{Z} \quad . \tag{6.1}$$

Izraz (6.1) nazivamo *Furijeov red diskretnih signala* (*Discrete Time Fourier Series* – DTFS). U cilju određivanja koeficijenata c_k Furijeovog reda diskretnih signala, izvršimo množenje obe strane (6.1) sa $e^{-jl\omega_0 n}$ i sumiranje na jednom periodu, koje ćemo označiti operatorom $\sum_{n \in \mathcal{N}}$, gdje oznaka $n \in \mathcal{N}$ ukazuje na indekse iz jednog perioda signala u vremenskom domenu:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \tilde{x}(n) e^{-jl\omega_0 n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(k-l)\omega_0 n} . \tag{6.2}$$

Nakon zamjene redoslijeda sumiranja na desnoj strani (6.2) i koristeći formulu za sumu geometrijskog niza:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N, & k-l = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & inače, \end{cases} \tag{6.3}$$

dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n\in\mathcal{N}} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} c_l N, & k-l=0,\pm N,\pm 2N,\dots \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{6.4}$$

Izjednačavajući desnu stranu (6.4) sa lijevom stranom (6.2), pri čemu, samo radi dosljednosti označavanja, uvodimo smjenu $l \to k$, *koeficijente* c_k *Furijeovog reda diskretnih signala* imamo u obliku:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathcal{N}} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n},\ k\in\mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Izraz za sintezu diskretnih periodičnih signala (6.1) i izraz za njihovu analizu (6.5) ćemo radi preglednosti napisati u obliku transformacionog para Furijeovog reda diskretnih signala. Budući da se kao osnovni period signala u vremenu posmatra dio signala gdje je $n = 0,1,...,N-1$, DTFS transformacioni par se najčešće zapisuje u obliku:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N},\ n\in\mathbb{Z}, \\ c_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n},\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Moduli koeficijenata DTFS određuju amplitude, a njihovi argumenti faze elementarnih kompleksnih eksponencijalnih sekvenci $f(k,n) = e^{jk\omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, koje se u (6.1) koriste za sintezu signala.

Zbog periodičnosti sekvence $e^{-jk\omega_0 n}$ po promjenljivoj *k* sa periodom *N*:

$$e^{-jk\omega_0 n} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{-j(k+N)\omega_0 n}, \tag{6.7}$$

i koeficijenti DTFS su periodični u frekvencijskom domenu sa osnovnim periodom *N*:

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(k+N)\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n} = c_k. \tag{6.8}$$

Dakle, koeficijenti DTFS diskretne periodične sekvence, koja je periodična sa osnovnim periodom *N*, takođe čine diskretnu periodičnu sekvencu sa periodom *N* u frekvencijskom domenu. Iako se koeficijenti DTFS, c_k, mogu izračunati za svako $k \in \mathbb{Z}$, za sintezu signala su potrebne samo vrijednosti c_k za $k = 0,1,...,N-1$. Stoga se vrijednosti *amplitudnog i faznog spektra periodičnog diskretnog signala* definišu kao moduli i argumenti, respektivno, samo onih koeficijenata DTFS koji se nalaze u osnovnom opsegu, za $k = 0,1,...,N-1$.

Još jednom naglasimo da je za frekvencijsku predstavu diskretnog periodičnog signala potreban ne beskonačan (kao kod razvoja kontinualnih signala u Furijeov red), već konačan skup od *N* različitih elementarnih kompleksnih eksponencijalnih sekvenci, čije su ugaone učestanosti cjelobrojan umnožak osnovne ugaone učestanosti $2\pi/N$. Dobijeni rezultat je posljedica činjenice da su kompleksne eksponencijalne sekvence $f(k,n)$ periodične po frekvencijskoj promjenljivoj *k* sa periodom *N*. Zbog toga skup od *N* kompleksnih eksponencijalnih sekvenci $f(k,n)$, $k = 0,1,2,...,N-1$, predstavlja skup svih mogućih različitih kompleksnih eksponencijalnih sekvenci čije su učestanosti cjelobrojan umnožak osnovne učestanosti $2\pi/N$.

Primjer spektra diskretnog periodičnog signala prikazan je na Slici 6.1. Frekvencijske komponente van osnovnog opsega gledano u fizičkom smislu zapravo i ne postoje, jer su identične onima iz osnovnog opsega:

$$e^{-j(k+lN)\omega_0 n} = e^{-jk\omega_0 n}, \; l \in \mathbb{Z}, \tag{6.9}$$

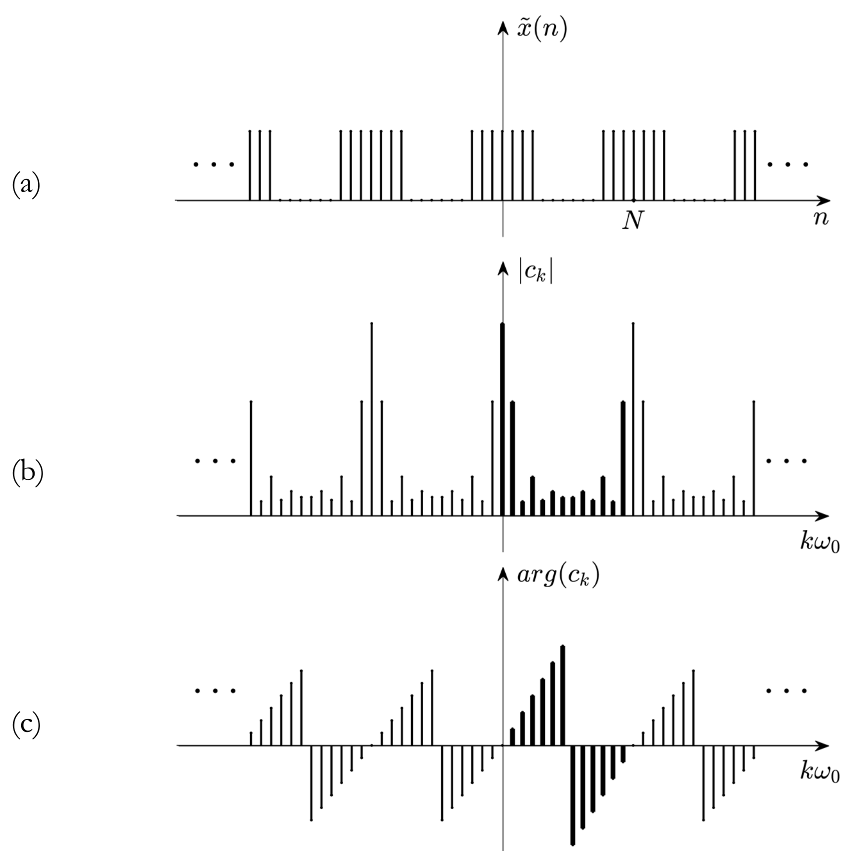
što nije slučaj kod razvoja kontinualnih signala u Furijeov red, gdje vrijednosti amplitudnog i faznog spektra signala čine moduli i argumenti svih koeficijenata Furijeovog reda kojih može biti beskonačno mnogo.

Ipak, zbog periodičnosti koeficijenata DTFS uobičajeno se kaže da je spektar diskretnog signala periodičan, ali prilikom spektralne analize signala posmatramo samo njegov osnovni period $0 \le k \le N-1$. Ukoliko je diskretni signal nastao odmjeravanjem kontinualnog signala, onda osnovni period, $0 \le k \le N-1$, odgovara frekvencijskom opsegu kontinualnog signala $0 \le F < F_s$, gdje je F_s frekvencija odmjeravanja.

(a)

(b)

(c)



Slika 6.1 Spektar diskretnog periodičnog signala: (a) diskretni periodičan signal u vremenskom domenu; (b) amplitudni spektar i (c) fazni spektar.

6.2 Spektralna gustina snage

Srednja snaga diskretnog periodičnog signala je data sa:

$$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\tilde{x}(n)\right|^2 . \tag{6.10}$$

Osim u vremenskom domenu, pokazaćemo da je srednju snagu diskretnog periodičnog signala moguće odrediti i na osnovu poznavanja koeficijenata njegovog Furijeovog reda:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{x}} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{x}^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-jk\omega_0 n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1}c_k^* c_k = \sum_{k=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2 . \end{aligned} \tag{6.11}$$

Izvedeni izraz predstavlja Parsevalovu relaciju za diskretne periodične signale:

$$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\tilde{x}(n)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2 . \tag{6.12}$$

Sekvenca $\left|c_k\right|^2$, za $k = 0,1,\ldots,N-1$, daje distribuciju snage periodičnog diskretnog signala po frekvencijskim komponentama i naziva se *spektralna gustina snage* diskretnih periodičnih signala, ili kratko *spektar snage* signala. Spektralna gustina snage signala ne sadrži informaciju o fazi signala.

6.3 Furijeova transformacija diskretnih signala

Kako bismo Furijeovu ideju razlaganja kontinualnih neperiodičnih signala na prostoperiodične komponente proširili na analizu diskretnih neperiodičnih signala, posmatrajmo šta se dešava sa koeficijentima DTFS kad period signala u

vremenu teži ka beskonačnosti. Prvo posmatrajmo neperiodičan signal $x(n)$ i formirajmo periodično proširenje dijela ovog signala sa intervala $n_1 \le n \le n_2 - 1$, sa periodom $N = n_2 - n_1$, kao na Slici 6.2 za $N = 4 - (-4) = 8$, tako da vrijedi:

$$\tilde{x}^N(n) \equiv x(n),\ n_1 \le n \le n_2 - 1, \tag{6.13}$$

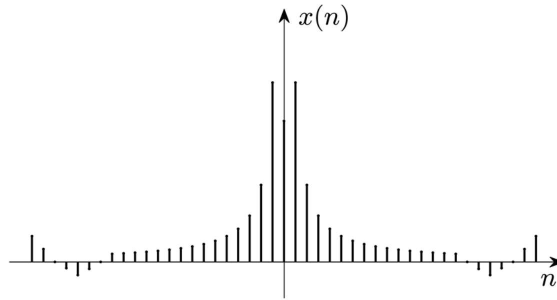
$$\tilde{x}^N(n) = \tilde{x}^N(n + mN),\ m \in \mathbb{Z}. \tag{6.14}$$

Na Slici 6.2 su debelom linijom prikazani segmenti signala na osnovu kojih se formiraju njegova periodična proširenja. DTFS tako dobijenog periodičnog signala je dat sa:

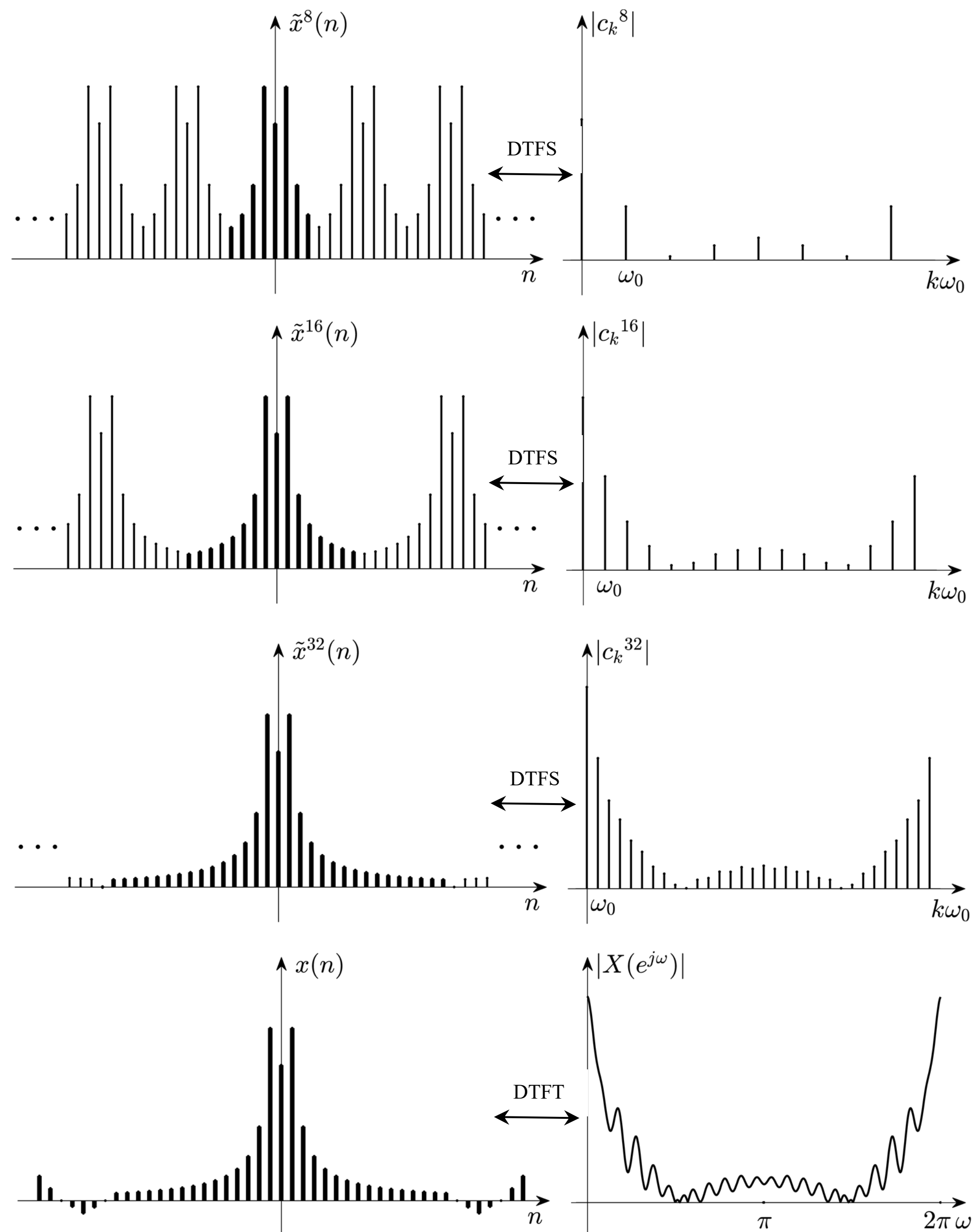
$$\tilde{x}^N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^N e^{jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{6.15}$$

gdje su koeficijenti DTFS:

$$c_k^N = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{6.16}$$



Slika 6.2 Prelazak sa DTFS na DTFT (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 6.2 Prelazak sa DTFS na DTFT (nastavak sa prethodne stranice).

Ako formiramo novo periodično proširenje sa periodom $N' > N$, $N' = n_2' - n_1'$, kao na Slici 6.2 za $N' = 16$ i $N' = 32$, dobijamo Furijeov red diskretnih signala u obliku:

$$\tilde{x}^{N'}(n) = \sum_{k=0}^{N'-1} c_k^{N'} e^{jk\omega_0' n}, \ \omega_0' = \frac{2\pi}{N'}, \tag{6.17}$$

sa koeficijentima:

$$c_k^{N'} = \frac{1}{N'} \sum_{n \in \mathcal{N}'} \tilde{x}^{N'}(n) e^{-jk\omega_0' n}, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{6.18}$$

U graničnom slučaju, kada $n_1 \to -\infty$, $n_2 \to \infty$ i $N \to \infty$, periodično proširenje signala postaje neperiodičan signal, $\omega_0 \to d\omega$ i $k\omega_0$ postaje kontinualna promjenljiva ω, te je:

$$\lim_{N\to\infty} c_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathcal{N}} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n} = \lim_{N\to\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n\in\mathcal{N}} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}. \tag{6.19}$$

U ovom graničnom slučaju koeficijenti DTFS postaju funkcija kontinualne promjenljive ω i njihove vrijednosti postaju infinitezimale. Zbog toga što koeficijenti DTFS postaju beskonačno mali, umjesto samih koeficijenata c_k posmatramo proizvod $c_k \cdot N$. U graničnom slučaju taj proizvod je jednak:

$$\lim_{N\to\infty} c_k \cdot N = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \tag{6.20}$$

što vodi definiciji *Furijeove transformacije diskretnih signala* (*Discrete Time Fourier Transform* – DTFT), koju primjenjujemo u analizi diskretnih neperiodičnih signala:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}. \tag{6.21}$$

Dovoljan uslov za egzistenciju Furijeove transformacije diskretnih signala je apsolutna sumabilnost signala:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty, \tag{6.22}$$

jer je tada:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty \,. \qquad (6.23)$$

Ovaj uslov odgovara uslovu apsolutne integrabilnosti kontinualnih signala, dok se preostali Dirihleovi uslovi egzistencije Furijeove transformacije kontinualnih signala ne primjenjuju zbog diskretne prirode signala $x(n)$.

Na osnovu (6.20) i (6.21), veza između DTFT i koeficijenata DTFS je data sa:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \lim_{N\to\infty} c_k \cdot N \,, \qquad (6.24)$$

odnosno sa:

$$\lim_{N\to\infty} c_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{d\omega}{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right). \qquad (6.25)$$

Furijeova transformacija (6.21) daje frekvencijsku predstavu diskretnog signala. Budući da je ovako definisana Furijeova transformacija diskretnog neperiodičnog signala kontinualna periodična funkcija učestanosti sa periodom 2π, kao i svaku drugu periodičnu funkciju, možemo je razviti u Furijeov red. Razlika je samo u tome što je sad originalna funkcija u frekvencijskom domenu, a koeficijenti Furijeovog reda će biti u vremenskom domenu. Tako izraz (6.21) posmatramo kao razvoj funkcije $X\left(e^{j\omega}\right)$ u Furijeov red sa koeficijentima $x(n)$, koje možemo odrediti na sljedeći način. Pomnožimo obje strane relacije (6.21) sa $e^{j\omega m}$ i integrirajmo preko jednog perioda DTFT, širine 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right] e^{j\omega m} d\omega \,. \qquad (6.26)$$

Zamjena redoslijeda sumiranja i integraljenja je moguća ako red pod integralom:

$$X_N\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n} \,, \qquad (6.27)$$

uniformno konvergira ka $X\left(e^{j\omega}\right)$ kad $N \to \infty$. Pod uniformnom konvergencijom podrazumijevamo da je za svako ω:

$$\lim_{N\to\infty} \left|X\left(e^{j\omega}\right) - X_N\left(e^{j\omega}\right)\right| = 0 \,, \qquad (6.28)$$

što je zadovoljeno ako je $x(n)$ apsolutno sumabilan signal. Nakon zamjene redoslijeda sumiranja i integriranja, vodeći računa da je:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{6.29}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x(m) & m = n, \\ 0 & m \neq n, \end{cases} \tag{6.30}$$

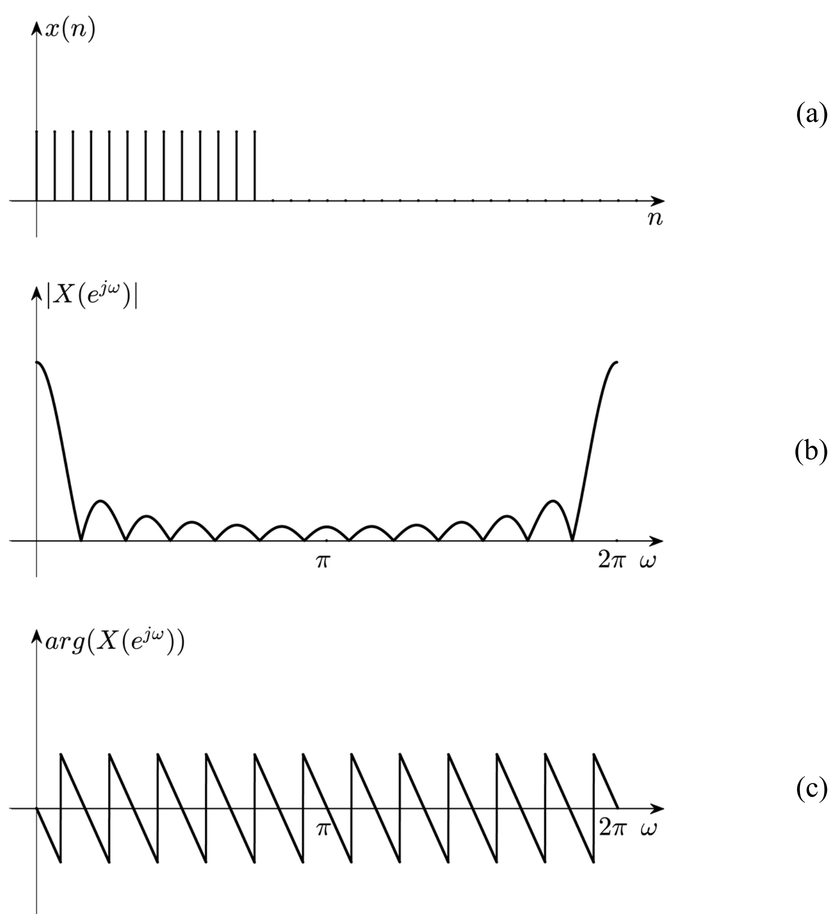
kombinujući (6.26) i (6.30) dolazimo do inverzne Furijeove transformacije diskretnih signala (IDTFT):

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \tag{6.31}$$

DTFT transformacioni par zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \\ x(n) &= \text{IDTFT}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Inverzna DTFT, data relacijom (6.31) omogućava sintezu diskretnog signala koristeći elementarne kompleksne eksponencijalne sekvence. U podintegralnim članovima $X(e^{j\omega})d\omega$ je sadržana informacija o amplitudama i fazama beskonačno mnogo elementarnih sekvenci oblika $e^{j\omega n}$ koje učestvuju u sintezi signala. Pri tome je modul Furijeove transformacije, $\left|X(e^{j\omega})\right|$, *amplitudni spektar* diskretnog neperiodičnog signala, a argument, $\arg X(e^{j\omega})$, je *fazni spektar* diskretnog neperiodičnog signala. Primijetimo da u sintezi neperiodičnog diskretnog signala na osnovu (6.31) učestvuje beskonačno mnogo prostoperiodičnih sekvenci, ali se sve njihove ugaone učestanosti nalaze u intervalu širine 2π, za razliku od sinteze kontinualnih signala Furijeovom transformacijom, gdje se ugaona učestanost elementarnih funkcija mijenja od minus beskonačno do plus beskonačno. Na Slici 6.3 grafički je prikazan primjer amplitudnog i faznog spektra diskretnog neperiodičnog signala. Napomenimo



Slika 6.3 Spektar diskretnog neperiodičnog signala: (a) diskretni signal; (b) njegov amplitudni i (c) fazni spektar.

još jednom da je Furijeova transformacija diskretnih neperiodičnih signala, data sa (6.21), periodična funkcija digitalne ugaone učestanosti, ali se prilikom sinteze signala uzimaju samo frekvencijske komponente iz osnovnog opsega širine 2π, najčešće iz opsega $[-\pi,\pi)$ ili $[0,2\pi)$.

6.4 Spektralna gustina energije

Energija diskretnog neperiodičnog signala je data sa:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 . \tag{6.33}$$

Kada vršimo analizu signala u frekvencijskom domenu, cilj nam je da znamo kako je energija signala raspoređena po frekvencijskim komponentama. Koristeći izraz (6.31) za IDTFT i njegov konjugovano kompleksni oblik:

$$x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(e^{-j\omega}\right) e^{-j\omega n} d\omega , \tag{6.34}$$

lako pokažemo da energiju signala možemo računati i u transformacionom domenu:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(e^{j\omega}\right) e^{-j\omega n} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(e^{j\omega}\right) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega . \end{aligned} \tag{6.35}$$

Dakle, vrijedi *Parsevalova relacija* za diskretne neperiodične signale, iskazana sa:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega . \tag{6.36}$$

Distribucija energije neperiodičnog diskretnog signala po frekvencijskim komponentama:

$$S_x\left(e^{j\omega}\right) = \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 , \tag{6.37}$$

naziva se *spektralna gustina energije* ili kratko *energetski spektar* signala. Primijetimo da $S_x\left(e^{j\omega}\right)$ ne sadrži nikakvu informaciju o fazi signala. Za realne signale vrijedi

da je $X\left(e^{j(-\omega)}\right)=X^{*}\left(e^{j\omega}\right)$ i $\left|X\left(e^{j(-\omega)}\right)\right|^{2}=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}$, što znači da je energetski spektar parna funkcija.

6.5 Osobine DTFT

Poznavanje osobina DTFT olakšava analizu signala u frekvencijskom domenu. U ovom poglavlju ćemo dati pregled najvažnijih osobina DTFT. Zbog široke primjenljivosti u rješavanju konkretnih problema, osobine DTFT često nazivamo pravilima.

6.5.1 Linearnost

Ako je $x_1(n)\leftrightarrow X_1\left(e^{j\omega}\right)$ i $x_2(n)\leftrightarrow X_2\left(e^{j\omega}\right)$, tada je transformacioni par linearne kombinacije signala u vremenskom domenu na isti način formirana linearna kombinacija njihovih DTFT:

$$ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right),\ \forall a,b\in\mathbb{C}\ . \tag{6.38}$$

Dokaz:

Pod uslovom da red kojim je definisana DTFT konvergira, dokaz ove osobine slijedi direktno iz osobina sabiranja i množenja konstantom članova konvergentnih redova:

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}\left\{ax_1(n)+bx_2(n)\right\}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]e^{-j\omega n}=\\&=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}=\\&=aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)\ .\end{aligned} \tag{6.39}$$

□

6.5.2 Osobine simetrije

Osobine simetrije uspostavljaju vezu između osobina realnosti i parnosti signala u vremenskom i frekvencijskom domenu. Ovdje ćemo razmotriti neke od osobina simetrije, dok ćemo detaljniju analizu ovih osobina provesti u Glavi 7, nakon što uradimo i diskretizaciju u frekvencijskom domenu. Prilikom definisanja DTFT nismo uveli nikakva ograničenja u pogledu kompleksne prirode signala. Ako pretpostavimo da je signal u vremenu kompleksan:

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n), \tag{6.40}$$

iz njegovog spektra:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_r\left(e^{j\omega}\right) + jX_i\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_r(n) + jx_i(n)\right]\left[\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)\right], \tag{6.41}$$

možemo izdvojiti realni i imaginarni dio:

$$X_r\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_r(n)\cos(\omega n) + x_i(n)\sin(\omega n)\right], \tag{6.42}$$

$$X_i\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_i(n)\cos(\omega n) - x_r(n)\sin(\omega n)\right]. \tag{6.43}$$

Ako je realni dio signala u vremenu paran, a imaginarni neparan, imaginarni dio DTFT će biti jednak nuli, jer je proizvod parnog i neparnog signala neparan signal i suma njegovih elemenata od $-\infty$ do ∞ je jednaka nuli. Slično, ako je realni dio signala u vremenu neparan, a imaginarni paran, realni dio DTFT će biti jednak nuli. Imajući to u vidu, za signale koji su realni u vremenu možemo reći da njihov parni dio daje realni dio DTFT, a neparni dio signala u vremenu daje imaginarni dio DTFT.

Kada radimo analizu kompleksnih signala u vremenskom domenu, onda je poželjno znati vezu spektra konjugovano-kompleksnog signala sa spektrom originalnog kompleksnog signala. S tim ciljem, znajući da je $x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$, pronađimo konjugovano-kompleksni spektar kompleksnog signala $x(n)$:

$$X^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{j\omega n} , \tag{6.44}$$

pa zamijenimo ω sa $-\omega$:

$$X^*\left(e^{j(-\omega)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} . \tag{6.45}$$

Dobijeni izraz je jednak DTFT konjugovano-kompleksnog signala:

$$\text{DTFT}\left\{x^*(n)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} , \tag{6.46}$$

te zaključujemo da je:

$$x^*(n)\leftrightarrow X^*\left(e^{j(-\omega)}\right). \tag{6.47}$$

Ako je signal $x(n)$, čiju DTFT tražimo, realan, konjugovano-kompleksni spektar dobijen iz:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} , \tag{6.48}$$

je oblika:

$$X^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} . \tag{6.49}$$

Budući da zamjenom ω sa $-\omega$ u (6.48) dobijamo:

$$X\left(e^{j(-\omega)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} , \tag{6.50}$$

vrijedi da je:

$$X\left(e^{j(-\omega)}\right)=X^*\left(e^{j\omega}\right), \tag{6.51}$$

$$\left|X^*\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|, \tag{6.52}$$

$$\arg X^*\left(e^{j\omega}\right)=-\arg X\left(e^{j\omega}\right). \tag{6.53}$$

Iz prethodnih relacija zaključujemo da je amplitudni spektar realnog signala parna funkcija učestanosti:

$$\left|X\left(e^{j(-\omega)}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|, \tag{6.54}$$

dok je njihov fazni spektar neparna funkcija učestanosti:

$$\arg X\left(e^{j(-\omega)}\right) = -\arg X\left(e^{j\omega}\right). \tag{6.55}$$

6.5.3 Pomak u vremenskom domenu

Ako je poznat transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$, DTFT signala $x(n-n_0)$, koji se dobija pomakom u vremenu originalnog signala $x(n)$ za n_0, se dobija množenjem DTFT originalnog signala sa $e^{-j\omega n_0}$:

$$x(n-n_0) \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right). \tag{6.56}$$

Dokaz:

Za dokaz ove osobine koristimo jednostavnu smjenu promjenljivih prilikom sumiranja:

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\left\{x(n-n_0)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0) e^{-j\omega n}\Bigg|_{k=n-n_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega n_0} e^{-j\omega k} = \\ &= e^{-j\omega n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right) . \end{aligned} \tag{6.57}$$

□

6.5.4 Pomak u frekvencijskom domenu

Množenje signala $x(n)$ u vremenskom domenu sa $e^{j\omega_0 n}$ dovodi do pomjeranja njegovog spektra po frekvencijskoj osi. Ako je poznat transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$, vrijedi da je:

$$x(n) \cdot e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right). \tag{6.58}$$

Dokaz:

Dokaz ove osobine se takođe zasniva na jednostavnim matematičkim operacijama i poređenju sa definicionim izrazom za DTFT:

$$\text{DTFT}\left\{x(n) \cdot e^{j\omega_0 n}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right). \tag{6.59}$$

□

6.5.5 Skaliranje signala

Skaliranje signala $x(n)$ sa faktorom $a \in \mathbb{R}$ u vremenskom domenu dovodi do skaliranja njegovog spektra sa faktorom $1/a$. Za $a < 1$ signal se u vremenskom domenu proširuje, a za $a > 1$ sabija. Ako se spektar signala posmatra na osnovnom periodu, možemo reći da proširivanje signala u vremenskom domenu dovodi do sabijanja spektra, dok sabijanje signala rezultuje proširivanjem spektra. Uz pretpostavku da je poznat transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$, vrijedi da je:

$$x(an) \leftrightarrow X\left(e^{j\frac{\omega}{a}}\right), \; a \in \mathbb{R}. \tag{6.60}$$

Dokaz:

Polazeći od definicionog izraza za DTFT, koristeći smjenu promjenljivih dobijamo sljedeće:

$$\text{DTFT}\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(an)e^{-j\omega n}\Bigg|_{k=an} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\frac{\omega}{a}k} = X\left(e^{j\frac{\omega}{a}}\right). \qquad (6.61)$$

□

6.5.6 Konvolucija u vremenskom domenu

Pretpostavimo da postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$. Tada konvoluciji signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ u vremenskom domenu odgovara množenje njihovih DTFT u frekvencijskom domenu:

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}). \qquad (6.62)$$

Dokaz:

Ovu osobinu dokazujemo uvrštavajući izraz za konvoluciju $x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$ u izraz za DTFT, uz korištenje smjene promjenljivih:

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_1(n) * x_2(n)\right]e^{-j\omega n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]e^{-j\omega n} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)e^{-j\omega n}\Bigg|_{m=n-k} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)e^{-j\omega(m+k)} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)e^{-j\omega m} = \\
&= X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) .
\end{aligned} \qquad (6.63)$$

□

6.5.7 Množenje u vremenskom domenu

Ova osobina DTFT, koja nam govori o tome kakve posljedice u frekvencijskom domenu izaziva množenje signala u vremenskom domenu, često se primjenjuje u analizi spektra diskretnih signala, kada se vrši uobličavanje signala množenjem sa pogodno odabranim, tzv. prozorskim, sekvencama. Ako je $x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$, tada množenju u vremenskom domenu odgovara jedna vrsta konvolucije u frekvencijskom domenu, koja se naziva *periodična konvolucija*:

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda}) X_2(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda \,. \tag{6.64}$$

Dokaz:

Ovu osobinu DTFT dokazujemo tako što u izrazu za DTFT proizvoda signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$, jedan od ta dva signala, recimo $x_1(n)$, izrazimo preko njegove IDTFT:

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot x_2(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda}) e^{j\lambda n} d\lambda \right] \cdot x_2(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j(\omega-\lambda)n} \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\lambda}) X_2(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda \,. \end{aligned} \tag{6.65}$$

□

Primijetimo da je DTFT proizvoda dva signala periodična funkcija u frekvencijskom domenu, pa otuda i potiče njen naziv periodična konvolucija. Za razliku od osnovne definicije konvolucije, koju ćemo od sada nazivati *linearna konvolucija*, prilikom računanja periodične konvolucije integraljenje se ograničava samo na jedan period.

6.5.8 Kroskorelacija i autokorelacija

Ako su poznati transformacioni parovi $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ i $y(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$, tada je transformacioni par sa kroskorelacijom signala, $r_{xy}(n) = x(n) \star y(n) = = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n+k)$, dat sa:

$$x(n) \star y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j(-\omega)}). \tag{6.66}$$

Dokaz:

Postupamo slično kao pri dokazivanju osobine konvolucije u vremenskom domenu:

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}\{x(n) \star y(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n) \star y(n)\right] e^{-j\omega n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n+k)\right] e^{-j\omega n} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+k) e^{-j\omega n} \bigg|_{m=n+k} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) e^{-j\omega(m-k)} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j(-\omega)k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) e^{-j\omega k} = \\
&= X(e^{j(-\omega)}) \cdot Y(e^{j\omega}) \ .
\end{aligned} \tag{6.67}$$

□

Vidjeli smo da nam Parsevalova teorema omogućava računanje energije signala u frekvencijskom domenu. Iz (6.66) zaključujemo da je energetski spektar realnih signala, kod kojih vrijedi da je $X(e^{j(-\omega)}) = X^*(e^{j\omega})$, preko DTFT povezan sa autokorelacijom signala:

$$r_{xx}(n) \leftrightarrow S_{xx}(e^{j\omega}). \tag{6.68}$$

Dakle, autokorelaciona sekvenca, $r_{xx}(n)$, i energetski spektar signala, $S_{xx}(e^{j\omega})$, nose istu informaciju o signalu, ali iz njih nije moguće rekonstruisati originalni signal. Inverzna DTFT izračunata za $n = 0$:

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 e^{j\omega n} d\omega\bigg|_{n=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = E_x \qquad (6.69)$$

dovodi nas do od ranije poznatog zaključka da je energija signala jednaka vrijednosti autokorelacione sekvence u nuli.

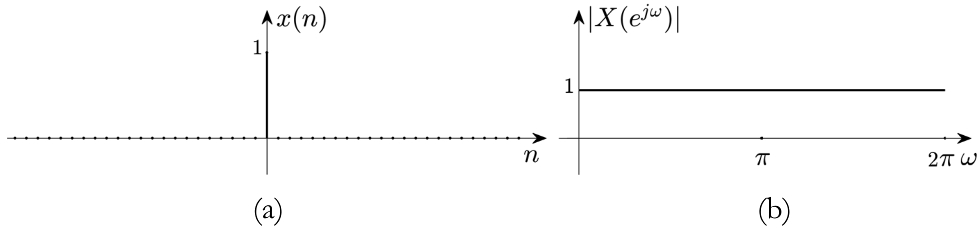
6.6 Furijeova transformacija elementarnih diskretnih signala

Poznavanje Furijeove transformacije elementarnih diskretnih signala olakšava razumijevanje složenijih koncepata digitalne obrade signala, te ćemo ovo poglavlje posvetiti upravo tome. Odredićemo Furijeovu transformaciju jediničnog impulsa, Hevisajdove sekvence, pravougaonog impulsa i sinusnih signala. Pored toga, pokazaćemo kako se Furijeva transformacija periodične sekvence jediničnih impulsa može iskoristiti za određivanje Furijeove transformacije drugih periodičnih signala. Znajući da je DTFT periodična sa periodom 2π, najčešće je dovoljno posmatrati je samo u osnovnom opsegu, $[0, 2\pi)$.

Furijeova transformacija jediničnog impulsa, $\delta(n)$, koji je jednak nuli za svaku vrijednost *n*, osim za $n = 0$, se određuje na sljedeći način:

$$\text{DTFT}\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-j\omega n} = 1. \qquad (6.70)$$

Na Slici 6.4 je prikazan jedinični impuls i njegova DTFT u osnovnom opsegu. Amplitudni spektar jediničnog impulsa je jednak jedinici, a fazni spektar je nula, na svim učestanostima.



Slika 6.4 DTFT jediničnog impulsa: (a) jedinični impuls i (b) njegova DTFT.

Koristeći osobinu pomaka u vremenskom domenu, iskazanu sa (6.56), za DTFT pomjerenog jediničnog impulsa, $\delta(n-n_0)$, dobijamo da je:

$$\text{DTFT}\{\delta(n-n_0)\} = 1 \cdot e^{-j\omega n_0}. \tag{6.71}$$

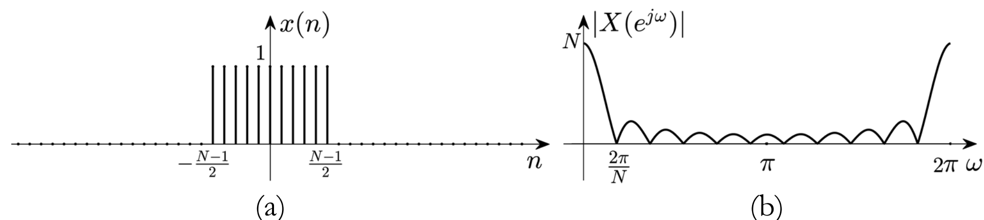
Primijetimo da se prilikom pomjeranja signala u vremenskom domenu ne mijenja njegov amplitudni, već samo fazni spektar, koji je u ovom slučaju jednak $-n_0\omega$ u osnovnom opsegu.

Za kauzalni diskretni pravougaoni impuls, $p(n)=1$ za $0 \le n \le N-1$ i $p(n)=0$ za ostale vrijednosti *n*, DTFT možemo odrediti na sljedeći način:

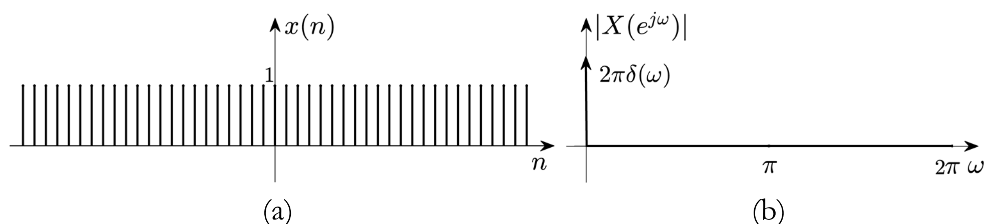
$$\text{DTFT}\{p(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}. \tag{6.72}$$

U slučaju kada je *N* neparno, koristeći pravilo pomaka u vremenskom domenu lako se odredi DTFT nekauzalnog pravougaonog impulsa, $p(n+(N+1)/2)$, množenjem $\text{DTFT}\{p(n)\}$ sa $e^{j\frac{N-1}{2}\omega}$. Fazni spektar nekauzalnog pravougaonog impulsa jednak je nuli. Na Slici 6.5 je prikazan pravougaoni impuls i njegov amplitudni spektar u osnovnom opsegu.

Odredimo sada Furijeovu transformaciju konstantnog diskretnog signala, čiji svi elementi, od $-\infty$ do ∞, imaju vrijednost jednaku jedinici. Budući da ovaj



Slika 6.5 DTFT pravougaonog impulsa: (a) pravougaoni impuls i (b) njegov amplitudni spektar.



Slika 6.6 DTFT konstantnog diskretnog signala: (a) konstantni diskretni signal i (b) njegova DTFT.

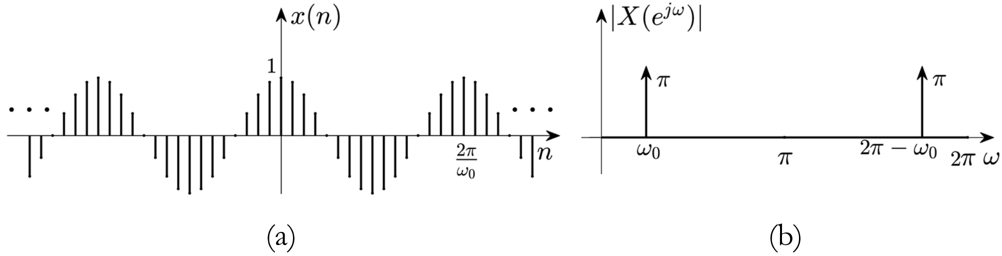
signal nije apsolutno sumabilan, te ne možemo direktnim putem odrediti njegovu DTFT, potražimo IDTFT od $X\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{IDTFT}\left\{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-2k\pi\right)\right\}= \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-2k\pi\right)\right]e^{j\omega n}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\delta\left(\omega\right)e^{j\omega n}d\omega=1,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

U osnovnom opsegu vrijedi da je:

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta\left(\omega\right),\ \omega\in\left[0,2\pi\right). \tag{6.74}$$

Ovaj transformacioni par je prikazan na Slici 6.6.



Slika 6.7 DTFT diskretnog sinusnog signala: (a) diskretna kosinusoida i (b) njena DTFT.

Dobijeni rezultat će nam poslužiti da odredimo Furijeove transformacije diskretnih kompleksnih eksponencijalnih i sinusnih signala. Na osnovu osobine pomaka u frekvencijskom domenu, iskazane sa (6.58), iz (6.74) direktno dolazimo do transformacionog para:

$$1\cdot e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right),\ \omega\in\left[0,2\pi\right). \tag{6.75}$$

Iz (6.75), koristeći Ojlerov obrazac, vodeći računa o periodičnosti DTFT, nalazimo Furijeovu transformaciju diskretne kosinusoide u osnovnom opsegu:

$$\cos\omega_0 n\leftrightarrow \pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\pi\delta\left(\omega-2\pi+\omega_0\right),\ \omega\in\left[0,2\pi\right). \tag{6.76}$$

Na Slici 6.7 je prikazana diskretna kosinusoida i njena DTFT.

Iako DTFT nije namijenjena za spektralnu analizu periodičnih signala, sa stanovišta matematičkog modeliranja nekih procesa digitalne obrade signala korisno je imati mogućnost da se ista transformacija koristi i za periodične i za neperiodične signale. U izloženim primjerima DTFT konstante i sinusnih signala vidjeli smo da DTFT možemo odrediti i za signale koji nisu apsolutno sumabilni, ali se tada u spektru signala pojavljuju Dirakovi impulsi. U (4.18) smo pokazali da konvolucijom sa sekvencom periodično ponovljenih jediničnih impulsa, $\tilde{\delta}\left(n\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(n-mN\right),\ m\in\mathbb{Z}$, možemo napraviti periodično proširenje signala

$x(n)$ sa periodom *N*, tako da je $\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN)$. Ako se $\tilde{\delta}(n)$ razvije u Furijeov red diskretnih signala, njegovi koeficijenti su dati sa:

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\delta}(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N},\ k\in\mathbb{Z}, \tag{6.77}$$

pa preko DTFS $\tilde{\delta}(n)$ možemo predstaviti na sljedeći način:

$$\tilde{\delta}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}e^{jk\omega_0 n},\ \omega_0=\frac{2\pi}{N}. \tag{6.78}$$

Pronađimo sada DTFT od ovako iskazane sekvence periodično ponovljenih jediničnih impulsa:

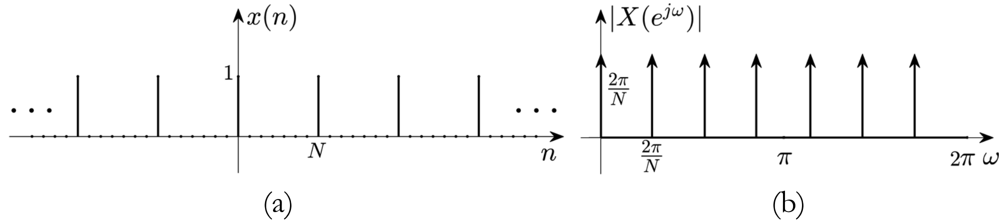
$$\begin{aligned}\text{DTFT}\left\{\tilde{\delta}(n)\right\}&=\text{DTFT}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}e^{jk\omega_0 n}\right\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\text{DTFT}\left\{e^{jk\omega_0 n}\right\}=\\&=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\delta(\omega-k\omega_0)=\tilde{\delta}(\omega),\ \omega_0=\frac{2\pi}{N}.\end{aligned} \tag{6.79}$$

Dakle, DTFT sekvence periodično ponovljenih jediničnih impulsa, sa osnovnim periodom *N*, je periodična povorka Dirakovih impulsa, čije su jačine udara $2\pi/N$, a osnovni period $\omega_0=2\pi/N$.

Sada možemo lako, koristeći osobinu konvolucije DTFT u vremenskom domenu, odrediti DTFT bilo kog periodičnog signala $\tilde{x}(n)$, ako poznajemo transformacioni par $x(n)\leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$, pri čemu je $x(n)=\tilde{x}(n)$ na osnovnom periodu:

$$\text{DTFT}\left\{\tilde{x}(n)\right\}=\text{DTFT}\left\{x(n)*\tilde{\delta}(n)\right\}=X\left(e^{j\omega}\right)\cdot\tilde{\delta}(\omega). \tag{6.80}$$

Na Slici 6.8(a) je prikazana sekvenca periodično ponovljenih jediničnih impulsa sa periodom *N*, a na Slici 6.8(b) njena DTFT, koja je jednaka periodičnoj povorci Dirakovih impulsa, osnovnog perioda $\omega_0=2\pi/N$, sa jačinama udara $2\pi/N$.



Slika 6.8 DTFT sekvence periodično ponovljenih jediničnih impulsa:
(a) sekvenca periodično ponovljenih jediničnih impulsa i
(b) njena DTFT.

6.7 Veza spektara diskretnog i kontinualnog signala

Pretpostavimo da je diskretni signal $x(n)$ odmjerena verzija kontinualnog signala $x(t)$, tako da vrijedi da je:

$$x(n) = x(t)\big|_{t=n\Delta t} = x(n\Delta t). \tag{6.81}$$

Za razliku od diskretnog signala $x(n)$, odmjereni signal $x_s(t)$, koji se dobije množenjem kontinualnog signala $x(t)$ sa povorkom Dirakovih impulsa:

$$x_s(t) = x(t)\cdot\tilde{\delta}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta t)\delta(t-n\Delta t), \tag{6.82}$$

i dalje ima kontinualnu prirodu. On zapravo predstavlja povorku Dirakovih impulsa koji se pojavljuju u trenucima odmjeravanja $t = n\Delta t$, gdje je Δt korak odmjeravanja, a *n* cio broj. Iz (6.82) vidimo da su jačine udara Dirakovih impulsa u odmjerenom signalu $x_s(t)$ jednake vrijednostima kontinualnog signala $x(t)$ u trenucima njegovog odmjeravanja. Za ostale vrijednosti vremenske nezavisne promjenljive, odmjereni signal jednak je nuli. Budući da je diskretni signal $x(n)$

odmjerena verzija kontinualnog signala $x(t)$, vrijedi i da su vrijednosti diskretnog signala $x(n)$ jednake jačinama udara Dirakovih impulsa u odmjerenom signalu $x_s(t)$.

Podsjetimo se da je Furijeov transformacioni par za kontinualne neperiodične signale dat sa:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt, \\ x(t) &= \mathscr{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega\,. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Furijeova transformacija signala koji je odmjeren sa korakom odmjeravanja Δt, odnosno čija je ugaona učestanost odmjeravanja $\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$, je data sa:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_s(\Omega) &= \mathscr{F}\{x_s(t)\} = \mathscr{F}\{x(t)\cdot\tilde{\delta}(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{x(t)\} * \mathscr{F}\{\tilde{\delta}(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\Omega - k\Omega_s). \end{aligned} \tag{6.84}$$

Primjećujemo da se spektar odmjerenog signala periodično ponavlja sa periodom koji je jednak ugaonoj učestanosti odmjeravanja Ω_s.

U prethodnim koracima smo prilikom određivanja Furijeove transformacije odmjerenog signala koristili pravilo konvolucije u frekvencijskom domenu. Alternativni izraz za Furijeovu transformaciju odmjerenog signala se može dobiti koristeći pravilo pomaka u vremenskom domenu:

$$\tilde{X}_s(\Omega) = \mathscr{F}\{x_s(t)\} = \mathscr{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)e^{-j\Omega n\Delta t}\,. \tag{6.85}$$

Ako tako postupimo, možemo jednostavno uspostaviti vezu između Furijeove transformacije diskretnih signala i Furijeove transformacije kontinualnih signala. Znajući da su digitalna učestanost ω i ugaona učestanost Ω vezane relacijom:

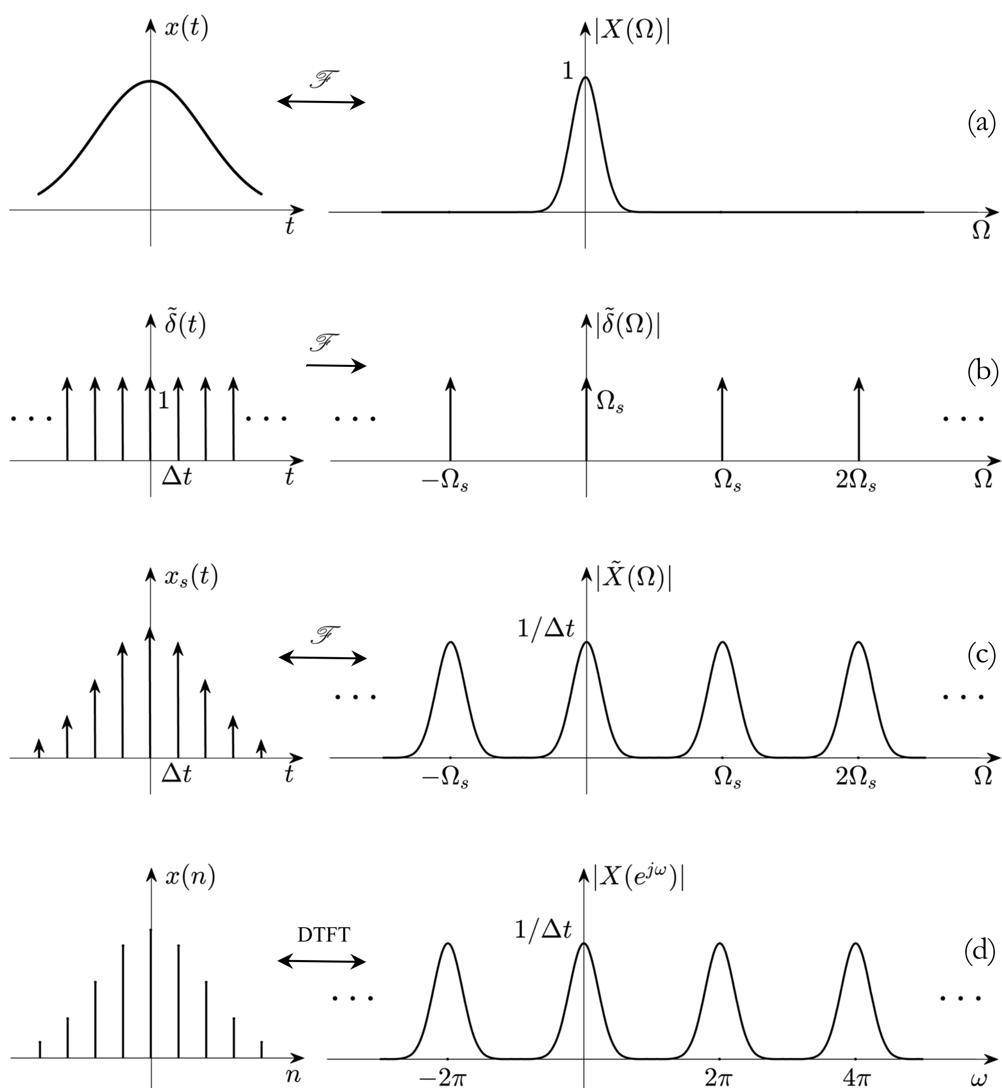
$$\omega = \Omega\Delta t\,, \tag{6.86}$$

i ako je $x(n) = x(t)\big|_{t=n\Delta t} = x(n\Delta t)$, kao što smo pretpostavili u (6.81), poredeći (6.85) sa definicionim izrazom za Furijeovu transformaciju diskretnih signala (6.21), zaključujemo da je Furijeova transformacija $X(e^{j\omega})$ diskretnog signala $x(n)$ jednaka Furijeovoj transformaciji $\tilde{X}(\Omega)$ odmjerenog signala $x_s(t)$. Izražavajući Furijeovu transformaciju odmjerenog signala preko (6.84), veza spektra diskretnog signala $X(e^{j\omega})$ i spektra kontinualnog signala $X(\Omega)$ se može zapisati u obliku:

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega\Delta t} = \tilde{X}_s(\Omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s), \qquad (6.87)$$

Na Slici 6.9 je ilustrovana veza između spektara kontinualnog, diskretizovanog i diskretnog signala. Dakle, ako je diskretni signal nastao odmjeravanjem kontinualnog signala sa korakom Δt, onda Furijeova transformacija diskretnog signala predstavlja periodično proširenje Furijeove transformacije kontinualnog signala, uz uslov da je izvršena smjena promjenljivih $\omega = \Omega\Delta t$. Još jednom naglasimo da je ovo periodično ponavljanje posljedica odmjeravanja signala u vremenskom domenu. Budući da se odmjeravanjem ne povećava energija signala, a znamo da, koristeći Parsevalovu teoremu, energiju možemo računati i u frekvencijskom domenu, faktor $1/\Delta t$ u periodičnom proširenju Furijeove transformacije kontinualnog signala osigurava očuvanje energije.

Prisjetimo se da, zbog periodičnosti u frekvencijskom domenu, koja je posljedica diskretizacije u vremenskom domenu, može doći do preklapanja prilikom ponavljanja Furijeove transformacije $X(\Omega)$ sa periodom Ω_s. Da bi bila moguća potpuna rekonstrukcija kontinualnog signala iz njegovih odmjeraka, neophodno je obezbijediti da ne dođe do navedenog preklapanja. Pod uslovom da je spektar kontinualnog signala ograničen, sa gornjom graničnom ugaonom učestanošću Ω_g, do preklapanja neće doći ako je $\Omega_s \geq 2\Omega_g$ (Nikvistov kriterij). Sada, kad znamo vezu između spektara diskretnog i kontinualnog signala, možemo reći da je iz diskretnog signala moguća idealna rekonstrukcija kontinualnog signala ukoliko je zadovoljen Nikvistov kriterij.



Slika 6.9 Veza između spektra kontinualnog i spektra diskretnog signala: (a) kontinualni signal i njegov spektar; (b) povorka Dirakovih impulsa i njena Furijeova transformacija; (c) diskretizovani signal i njegov spektar i (d) diskretni signal i spektar diskretnog signala.

6.8 Veza DTFT i *z* - transformacije

Prisjetimo se definicionog izraza za *z*-transformaciju:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\,. \tag{6.88}$$

Ukoliko *z*-transformacija signala $x(n)$ data sa (6.88) konvergira na jediničnoj kružnici kompleksne *z*-ravni, onda uvodeći smjenu $z=e^{j\omega}$ u (6.88) dobijamo izraz za DTFT:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\Bigg|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X\left(e^{j\omega}\right). \tag{6.89}$$

6.9 Veza DTFT impulsnog odziva i frekvencijske karakteristike LTI sistema

U 4.6.2 smo definisali frekvencijsku karakteristiku LTI sistema sa:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}\,, \tag{6.90}$$

gdje je $h(n)$ impulsni odziv sistema. Nakon uvođenja DTFT, kao metode za frekvencijsku analizu signala, zaključujemo da je frekvencijska karakteristika LTI sistema jednaka DTFT impulsnog odziva $h(n)$.

Glava 7

DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

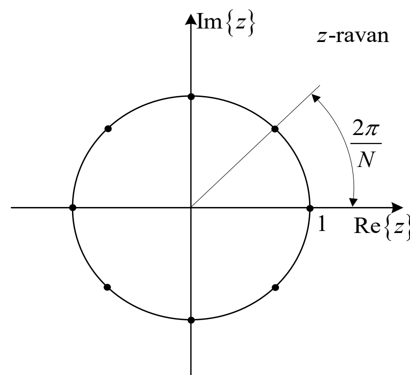
Gledano sa praktičnog stanovišta, koristeći digitalni hardver i softver, izračunavanje kontinualnog spektra diskretnog signala preko DTFT, sumiranjem reda (6.21) od $-\infty$ do ∞, je moguće samo u konačnom broju tačaka. Stoga se postavlja pitanje da li možemo iz konačnog broja odmjeraka Furijeove transformacije diskretnog neperiodičnog signala sa osnovnog perioda širine 2π rekonstruisati spektar signala za svaku vrijednost kontinualne frekvencijske ose. Ako jeste, onda možemo rekonstruisati i originalni diskretni signal, te su odmjerci spektra dovoljni za reprezentaciju neperiodičnog signala u frekvencijskom domenu. U ovom poglavlju ćemo pokazati da je diskretan signal, konačnog trajanja $L \leq N$, moguće rekonstruisati na osnovu N odmjeraka njegove DTFT, koji su izračunati u ravnomjerno raspoređenim tačkama na osnovnom periodu frekvencijske ose. To će nas dovesti do definicije *Diskretne Furijeove transformacije* (eng. *Discrete Fourier Transform* – DFT). Pokazaćemo da je DFT invertibilna transformacija, pa je zbog mogućnosti jednoznačne rekonstrukcije originalnog signala pogodna za primjene u kojima je bitno sačuvati sve informacije o signalu.

7.1 Diskretizacija u frekvencijskom domenu

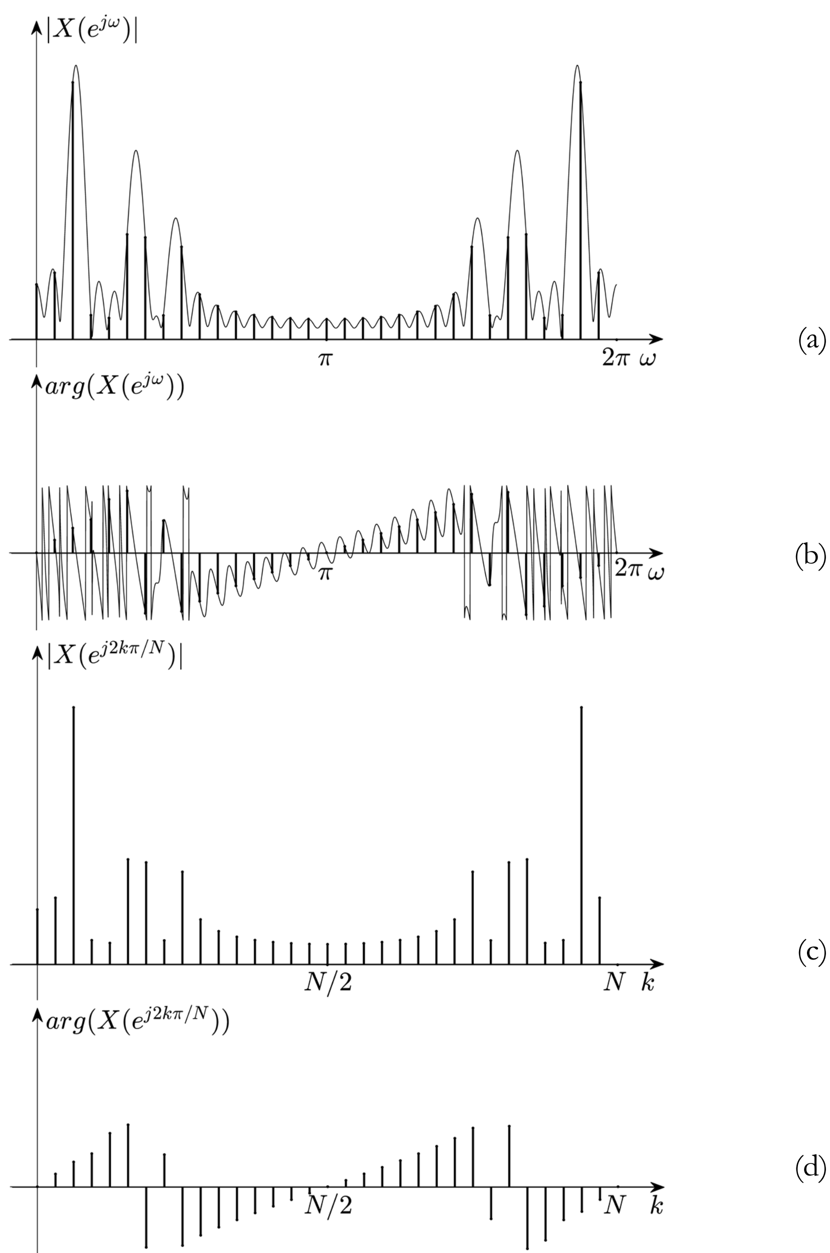
Definišimo signal konačnog trajanja kao signal sa konačnim domenom definisanosti. Dakle, kažemo da je signal konačnog trajanja ukoliko poznajemo vrijednosti signala samo na konačnom intervalu $n = 0,1,\ldots,L-1$. Za signal konačnog trajanja, od *L* elemenata, koji ćemo označiti sa $\overline{x}^L(n)$, nije moguće odrediti DTFT, jer se sumiranje u (6.21) izvodi od $-\infty$ do ∞, a signal $\overline{x}^L(n)$ je definisan samo za $n = 0,1,\ldots,L-1$. Stoga dopunjavanjem signala $\overline{x}^L(n)$ elementima nultih vrijednosti formiramo signal beskonačnog trajanja:

$$x(n) = \begin{cases} \overline{x}^L(n), & n = 0,1,2,\ldots,L-1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{7.1}$$

za koji možemo da odredimo DTFT. Posmatrajmo *N* ekvidistantnih odmjeraka DTFT na učestanostima $\omega = k(2\pi/N),\ k = 0,1,\ldots,N-1$ osnovnog perioda $[0,2\pi)$. Znajući da je DTFT nekog signala jednaka njegovoj *z*-transformaciji na jediničnoj kružnici, način odabira *N* ekvidistantnih tačaka digitalne ugaone učestanosti je prikazan na Slici 7.1. Primjeri modula i argumenta ovako odmjerene DTFT su prikazani na Slici 7.2.



Slika 7.1 Odabiranje diskretnih vrijednosti digitalne ugaone učestanosti.



Slika 7.2 Primjer odmjeravanja modula i argumenta DTFT: (a) amplitudni spektar i njegovi odmjerci; (b) fazni spektar i njegovi odmjerci; (c-d) vrijednosti odmjeraka amplitudnog i faznog spektra, respektivno, na *k* osi.

Odmjerci DTFT$\{x(n)\}$, u tačkama $\omega = k\frac{2\pi}{N}$, $k = 0,1,2,...,N-1$, su dati sa:

$$X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.2}$$

Suma (7.2), koja ima beskonačno mnogo elemenata, može da se prikaže preko beskonačno mnogo parcijalnih suma, od kojih svaka sadrži po *N* elemenata:

$$\begin{aligned} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) &= ... + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + ... = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{-\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0,1,2,...,N-1. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Nakon smjene $n \to n - lN$ i promjene redoslijeda sumiranja:

$$X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0,1,2,...,N-1, \tag{7.4}$$

vidljivo je da unutrašnja suma u (7.4) predstavlja periodičan diskretan signal:

$$\tilde{x}^N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN), \tag{7.5}$$

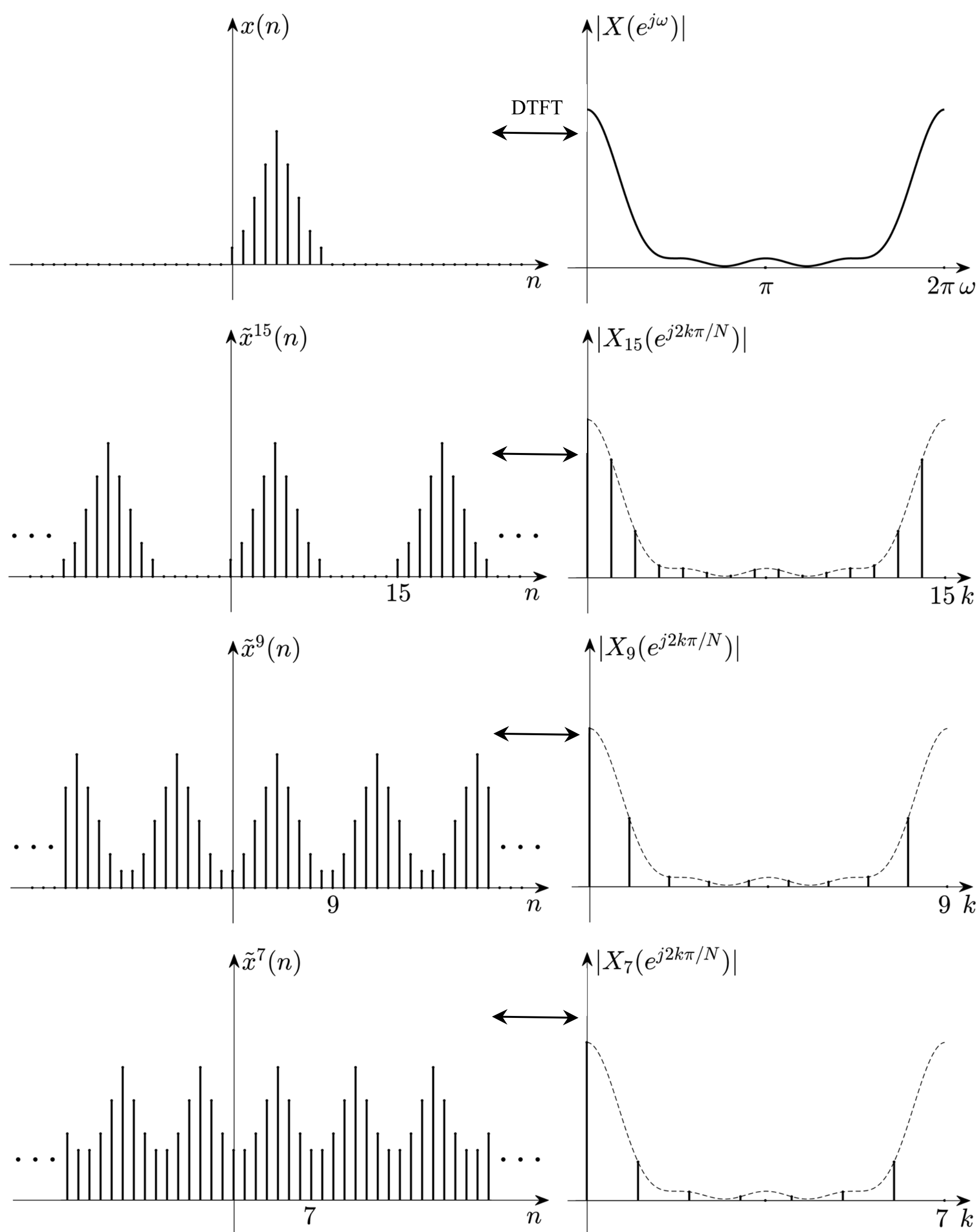
nastao periodičnim ponavljanjem signala $x(n)$ sa periodom *N*, te možemo pisati da je:

$$X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.6}$$

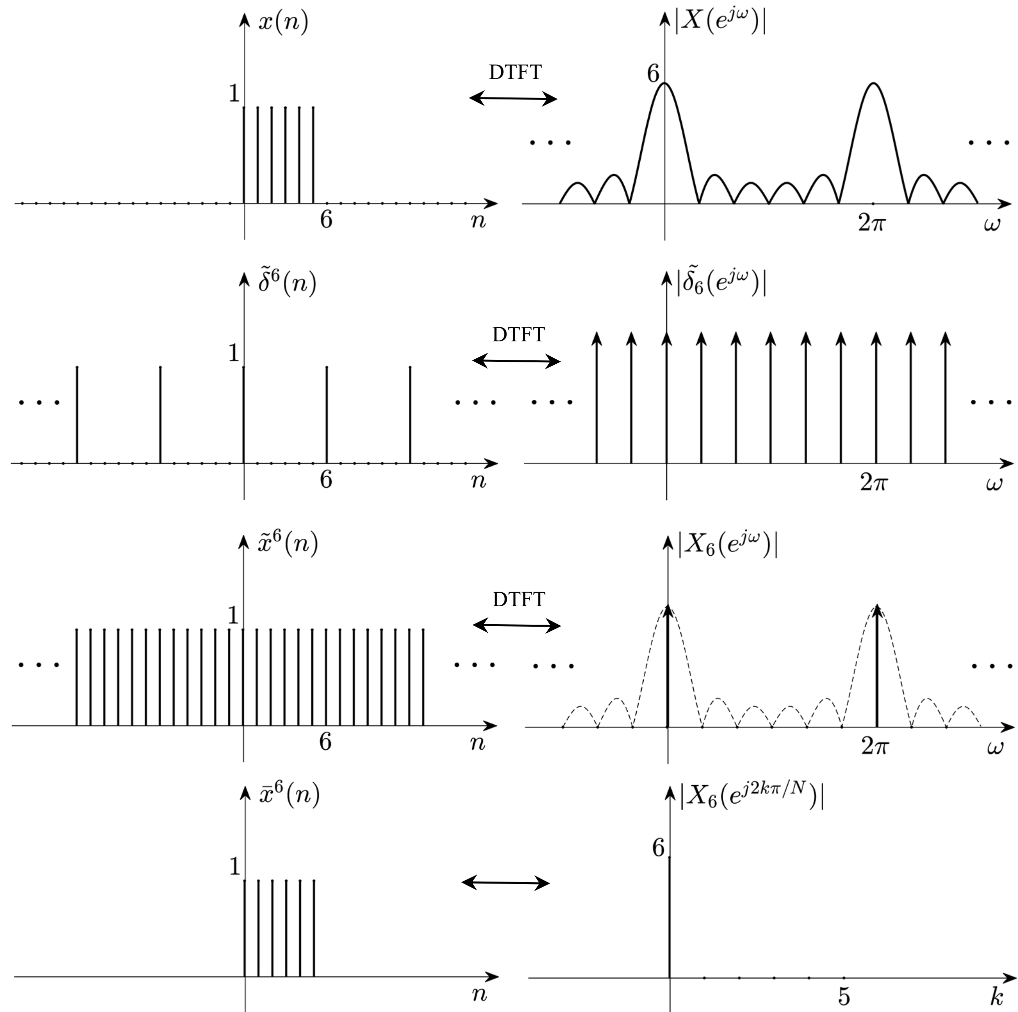
U izrazu (7.2) sumiranje se vrši preko svih elemenata diskretnog signala, dok se sumiranje u izrazu (7.6) odvija samo na intervalu $[0, N-1]$, ali se umjesto elemenata signala $x(n)$ u (7.2), ovdje sumiraju elementi njegovog periodičnog proširenja. Oba izraza su jednako važeća, ali nam (7.6) ukazuje da diskretizacija spektra dovodi do periodičnog proširenja signala u vremenskom domenu i omogućava da uradimo rekonstrukciju periodičnog proširenja signala na osnovu odmjeraka iz jednog perioda njegovog spektra, što ćemo uskoro i pokazati.

Nastali periodičan signal $\tilde{x}^N(n)$ ima osnovni period *N*. Prisjetimo se da je *N* broj tačaka u kojima smo izvršili odmjeravanje spektra signala $x(n)$, što znači da pri gušćem odmjeravanju formiramo periodično proširenje signala sa većim periodom i obrnuto. Pretpostavimo da u signalu $x(n)$ postoji segment $\overline{x}^L(n)$, konačne dužine *L*, van koga su sve vrijednosti signala jednake nuli, kao što je definisano sa (7.1). Ovisno o dužini trajanja $\overline{x}^L(n)$, prilikom periodičnog proširenja signala $x(n)$ može, ali ne mora doći do preklapanja replika $\overline{x}^L(n)$. To se lako zaključuje posmatrajući periodično proširenje signala $x(n)$ ilustrovano na Slici 7.3. Do preklapanja replika $\overline{x}^L(n)$ u periodičnom proširenju signala $x(n)$ neće doći ukoliko je $N \geq L$. Tada je, izdvajanjem osnovnog perioda signala $\tilde{x}^N(n)$, moguće rekonstruisati signal $\overline{x}^L(n)$, dopunjen nulama do dužine *N*. Međutim, ako je $L > N$ prilikom periodičnog proširenja signala $x(n)$ dolazi do preklapanja replika $\overline{x}^L(n)$, sa vrijednostima elementa različitim od nule, pa iz rezultujuće sekvence, date sa (7.5), nije moguće rekontruisati signal $x(n)$.

Za ilustraciju uticaja odmjeravanja DTFT na periodičnost signala u vremenskom domenu korisno je modelirati proces odmjeravanja DTFT množenjem nizom Dirakovih impulsa u frekvencijskom domenu, kao što je prikazano na Slici 7.4. Jačine udara Dirakovih impulsa u odmjerenom spektru signala jednake su vrijednostima DTFT signala u tačkama odmjeravanja. Zbog množenja sa nizom Dirakovih impulsa, čiji je period $2\pi/N$, u frekvencijskom domenu, dolazi do linearne konvolucije originalnog signala sa periodičnim delta nizom, čiji je period *N* u vremenskom domenu. Konvolucija sa jediničnim impulsima u vremenskom domenu dovodi do ponavljanja originalnog signala u svakom trenutku kad djeluje jedinični impuls, te tako nastaje periodičan signal sa periodom *N*. U primjeru datom na Slici 7.4 je $N = L = 6$, te je iz periodičnog proširenja $\tilde{x}^6(n)$, a prema tome i iz odmjeraka spektra u 6 tačaka, moguće rekonstruisati sekvencu konačnog trajanja $\overline{x}^6(n)$.



Slika 7.3 Periodično proširenje signala u vremenskom domenu, kao posljedica odmjeravanja DTFT.



Slika 7.4 Odmjeravanje spektra diskretnog signala.

7.2 Rekonstrukcija signala na osnovu odmjeraka u frekvencijskom domenu

Ranije smo pokazali da, koristeći izraz (6.31) za inverznu DTFT, iz spektra diskretnog signala određenog sa $X\left(e^{j\omega}\right)$, možemo rekonstruisati originalni signal $x(n)$ za svako $-\infty < n < \infty$. Razmotrimo sada da li je rekonstrukcija originalnog signala $x(n)$ moguća samo na osnovu odmjeraka spektra na osnovnom periodu, tj. poznavajući $X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)$ za $k = 0,1,2,...,N-1$. Prvo ćemo pokazati da je iz odmjeraka spektra diskretnog neperiodičnog signala $x(n)$ moguće rekonstruisati periodičan signal $\tilde{x}^N(n)$. Množeći relaciju (7.6) sa obje strane sa $\frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi}{N}kr}$, pa sumirajući po *k* od 0 do $N-1$, dobijamo:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}^N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}e^{j\frac{2\pi}{N}kr}. \tag{7.7}$$

Nakon promjene redoslijeda sumiranja:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}^N(n)\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-r)}, \tag{7.8}$$

znajući da je:

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-r)} = \begin{cases} N, & \text{za } n-r=mN,\ m \text{ cio broj}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{7.9}$$

dolazimo do izraza:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \tilde{x}^N(r+mN). \tag{7.10}$$

Zbog periodičnosti $\tilde{x}^N(n)$ sa periodom *N*, vrijedi da je $\tilde{x}^N(r+mN) = \tilde{x}^N(r)$ za *m* cio broj, pa nakon smjene $r \to n$ u (7.10) dobijamo konačan izraz za

rekonstrukciju periodičnog signala $\tilde{x}^N(n)$ na osnovu *N* odmjeraka iz osnovnog perioda DTFT diskretnog neperiodičnog signala $x(n)$:

$$\tilde{x}^N(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad -\infty < n < \infty. \tag{7.11}$$

Izraz (7.11) za rekonstrukciju periodičnog proširenja originalnog signala iz odmjeraka njegove DTFT, uz $\omega_0 = 2\pi/N$ predstavlja razvoj periodičnog signala $\tilde{x}^N(n)$ u Diskretni Furijeov red. Poredeći (7.11) sa definicionim izrazom za DTFS (6.1) zaključujemo da postoji sljedeća veza između odmjeraka DTFT signala konačnog trajanja i koeficijenata c_k Diskretnog Furijeovog reda njegovog periodičnog proširenja:

$$X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) = N \cdot c_k, \quad k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.12}$$

7.3 Diskretna Furijeova transformacija

U dosadašnjem razmatranju smo zaključili da je, na osnovu relacije (7.11), iz *N* ravnomjerno raspoređenih odmjeraka DTFT originalnog signala $x(n)$, uzetih na osnovnom periodu, moguće rekonstruisati periodično proširenje $\tilde{x}_N(n)$. Sada ćemo pokazati da je, u slučaju signala $\overline{x}^L(n)$ konačnog trajanja, moguća i rekonstrukcija tog signala iz odmjeraka DTFT signala $x(n)$. Već smo vidjeli da prilikom odmjeravanja DTFT signala $x(n)$ neće doći do preklapanja pri periodičnom proširivanju signala u vremenskom domenu, ukoliko su vrijednosti signala $x(n)$ jednake nuli van intervala $0 \le n < L$, $L \le N$. Za signal $\tilde{x}^N(n)$ vrijedi da je na osnovnom periodu jednak signalu $x(n)$, dok je veza sa $\overline{x}^L(n)$ data sa:

$$\tilde{x}^N(n) = \begin{cases} \bar{x}^L\langle n\rangle_N, & \langle n\rangle_N = 0,1,...,L-1\ , \\ 0, & \langle n\rangle_N = L, L+1,\dots N-1\ . \end{cases} \tag{7.13}$$

Operacija $\langle\cdot\rangle_N$ označava računanje ostatka po modulu *N*. Iz (7.13) vidimo da, pod uslovom da je $L \le N$, iz $\tilde{x}^N(n)$ možemo izdvojiti signal $\bar{x}^L(n)$ dopunjen nulama do dužine *N*, izjednačavajući $\bar{x}^L(n)$ sa $\tilde{x}^N(n)$ na jednom periodu. Stoga je moguća rekonstrukcija ne samo periodičnog proširenja $\tilde{x}^N(n)$, već i diskretnog signala $\bar{x}^L(n)$ konačnog trajanja, iz *N* ekvidistantnih odmjeraka DTFT signala $x(n)$. Pri tome se odmjerci DTFT uzimaju na osnovnom periodu i trajanje signala *L* je manje ili jednako od broja tačaka *N* u kojima se uzimaju odmjerci DTFT, tj. $L \le N$. Kada je navedeni uslov zadovoljen, izraz (7.6) se može zapisati u obliku:

$$X\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}^L(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.14}$$

Zbog veze signala konačnog trajanja $\bar{x}^L(n)$ i periodičnog proširenja $\tilde{x}^N(n)$ date sa (7.13), u slučaju kada je $N > L$, prilikom računanja (7.14) uzima se da su nepoznate vrijednosti signala $\bar{x}^L(n)$ za $n = L, L+1,\dots N-1$ jednake nuli. Radi jednostavnosti ćemo u nastavku izlaganja signal konačnog trajanja, dopunjen nulama do dužine *N*, ukoliko mu je originalno trajanje kraće, umjesto sa $\bar{x}^L(n)$ označavati sa $x(n)$, u skladu sa (7.1).

Tako dolazimo do definicionog izraza za *Diskretnu Furijeovu transformaciju* (DFT) u *N* tačaka signala $x(n)$ konačnog trajanja ne većeg od *N*:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.15}$$

Diskretnom Furijeovom transformacijom se diskretan signal $x(n)$ konačnog trajanja iz domena diskretnog vremena transformiše u diskretnu sekvencu $X(k)$ konačnog trajanja u frekvencijskom domenu. Elementi sekvence $X(k)$ nisu

ništa drugo do odmjerci DTFT signala $x(n)$ konačnog trajanja, koji je dopunjen nultim vrijednostima do beskonačnosti, uzeti u *N* ekvidistantnih tačaka na osnovnom periodu.

Ako zadovoljimo uslov da broj tačaka *N* u kojima se izvodi računanje DFT signala konačnog trajanja bude veći ili jednak od trajanja signala, onda je iz DFT, na osnovu (7.11) i (7.13) moguće rekonstruisati originalni signal konačnog trajanja u domenu diskretnog vremena:

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\ n=0,1,2,...,N-1. \tag{7.16}$$

Izraz (7.16) za rekonstrukciju signala $x(n)$ se naziva *Inverzna diskretna Furijeova transformacija* (eng. *Inverse Discrete Fourier Transform* – IDFT). Rekonstruisana sekvenca je dužine *N*. Minimalan broj tačaka *N* u kojima se računa DFT je određen dužinom originalnog signala *L*, tako da je dovoljno ispuniti uslov da je $N=L$. Neki algoritmi za brzo računanje DFT, o kojima će kasnije biti riječi, postavljaju dodatne uslove za broj tačaka u kojima se računa DFT, tako da to može biti razlog da se koristi $N>L$. Ako se DFT računa u većem broju tačaka nego što je trajanje signala u vremenu, prije računanja transformacije vrši se dopunjavanje originalnog signala nulama, tako da je $x(n)=0$ za $L\le n\le N-1$. U tom slučaju i rekonstruisani signal će biti duži od originalnog, s tim da se dobija, na osnovu (7.16) , da je $x(n)=0,\ L\le n\le N-1$.

DFT transformacioni par zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} X(k)&=\mathrm{DFT_N}\left\{x(n)\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k=0,1,2,...,N-1,\\ x(n)&=\mathrm{IDFT_N}\left\{X(k)\right\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\ n=0,1,2,...,N-1. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Radi kraćeg pisanja i jednostavnije grafičke predstave DFT uvodimo oznaku:

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \tag{7.18}$$

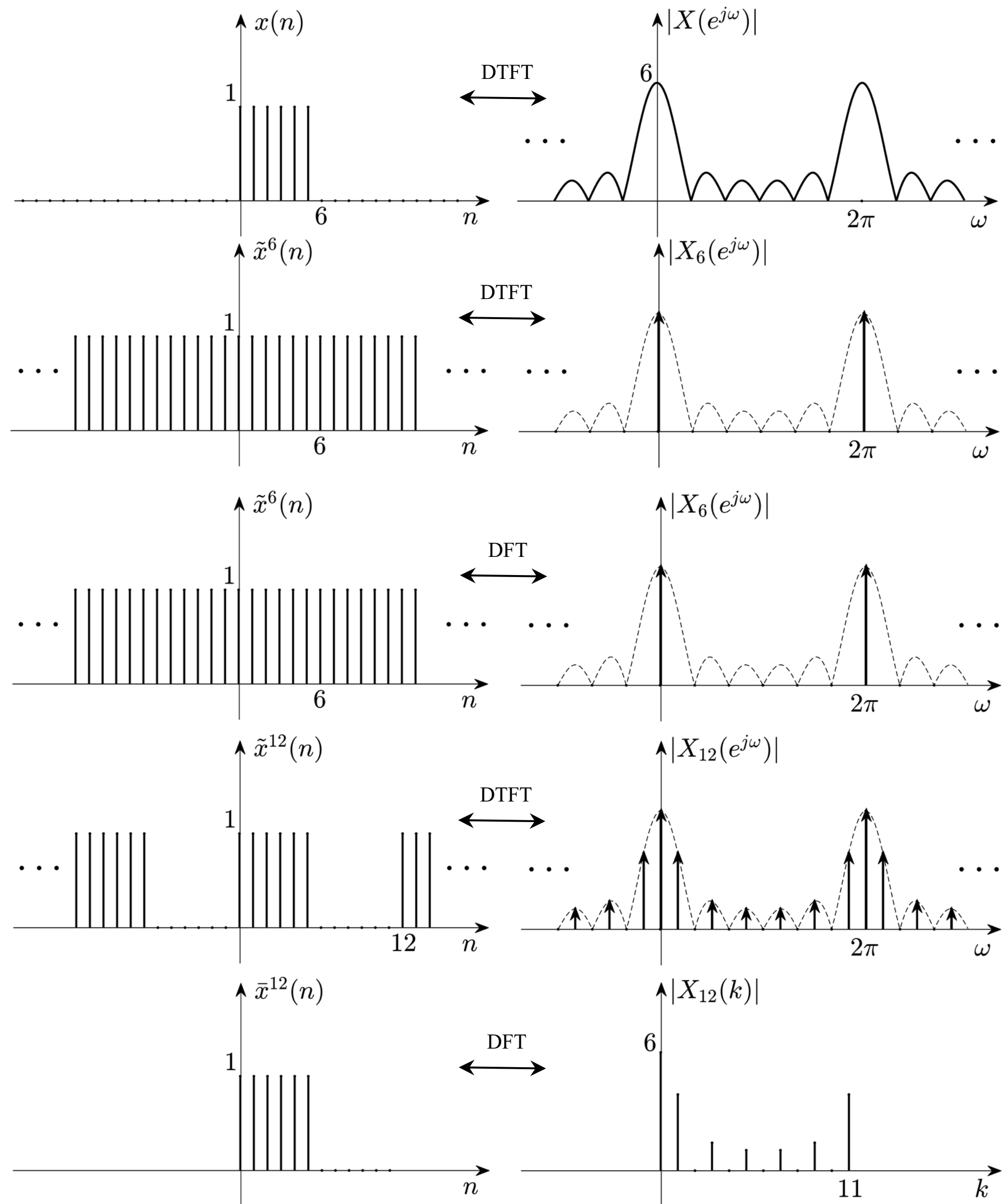
pa DFT transformacioni par poprima sljedeći oblik:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\ k=0,1,2,...,N-1,$$
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\ n=0,1,2,...,N-1\ . \tag{7.19}$$

Gledano sa stanovišta sinteze signala po (7.16), komponente DFT određuju amplitude i faze N elementarnih kompleksnih eksponencijalnih sekvenci $e_k(n)=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, čijom konačnom sumom je predstavljen diskretni signal konačne dužine, dakle njegov *amplitudni* i *fazni spektar*, respektivno. Iz (7.12) znamo da su komponente DFT signala konačnog trajanja, kada se podijele sa N, jednake koeficijentima DTFS njegovog periodičnog proširenja. To znači da su odmjerci spektra signala jednaki spektru njegovog periodičnog proširenja. Ovu činjenicu ćemo koristiti kasnije pri objašnjenju nekih propratnih pojava, koje nastaju prilikom procjene spektra korištenjem DFT.

Razmotrimo ponovo proces odmjeravanja DTFT prikazan na Slici 7.4, pri kome je zadovoljen uslov da je $N \geq L$. Ako promijenimo vrijednost za N, odnosno izvršimo odmjeravanje DTFT u nekim drugim tačkama frekvencijske ose i dalje poštujući uslov $N \geq L$, vrijednosti DFT će se značajno razlikovati od prethodno dobijenih. Kao ilustracija, na Slici 7.5 su prikazani slučajevi za $N=12$ i $N=6$, pri $L=6$. Zaključujemo da spektar signala konačnog trajanja L može da poprimi različite oblike, ovisno o izboru broja tačaka u kojima se računa DFT.

Prilikom vizualizacije kontinualnog spektra signala najčešće se koristi linearna interpolacija između njegovih odmjeraka. Stoga je, sa stanovišta vizualizacije, bolje računati DFT u većem broju tačaka. Međutim, kada je riječ o skladištenju i prenosu podataka o spektru signala, to nije potrebno, jer smo, samim ispunjavanjem uslova $N \geq L$, u mogućnosti da iz odmjeraka spektra rekonstruišemo originalni signal, te korištenjem izraza za DTFT izračunamo vrijednost spektra za proizvoljno odabranu vrijednost učestanosti. Kasnije ćemo pokazati da je rekonstrukcija spektra iz njegovih odmjeraka moguća i direktno u frekvencijskom domenu, bez rekonstrukcije signala u vremenskom domenu.



Slika 7.5 DFT signala konačnog trajanja.

7.4 Matrični oblik DFT

Ako DFT transformacioni par (7.19) napišemo u razvijenom obliku, nakon uvođenja oznaka za sljedeće vektore i transformacionu matricu:

$$\mathbf{x}_N = \left[x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-1) \right]^{\mathrm{T}}, \tag{7.20}$$

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{x}_N = \left[X(0) \quad X(1) \quad \cdots \quad X(N-1) \right]^{\mathrm{T}}, \tag{7.21}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \tag{7.22}$$

DFT transformacioni par možemo pisati kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_N &= \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N, \\ \mathbf{x}_N &= \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Iz prve relacije u (7.23) slijedi:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N, \tag{7.24}$$

te vrijedi da je:

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*, \tag{7.25}$$

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N, \tag{7.26}$$

na osnovu čega zaključujemo da je DFT ortogonalna transformacija. Veza inverzne i konjugovano kompleksne transformacione matrice data sa (7.26) značajno olakšava određivanje inverzne DFT, jer nema potrebe za inverzijom matrica.

7.5 Osobine DFT

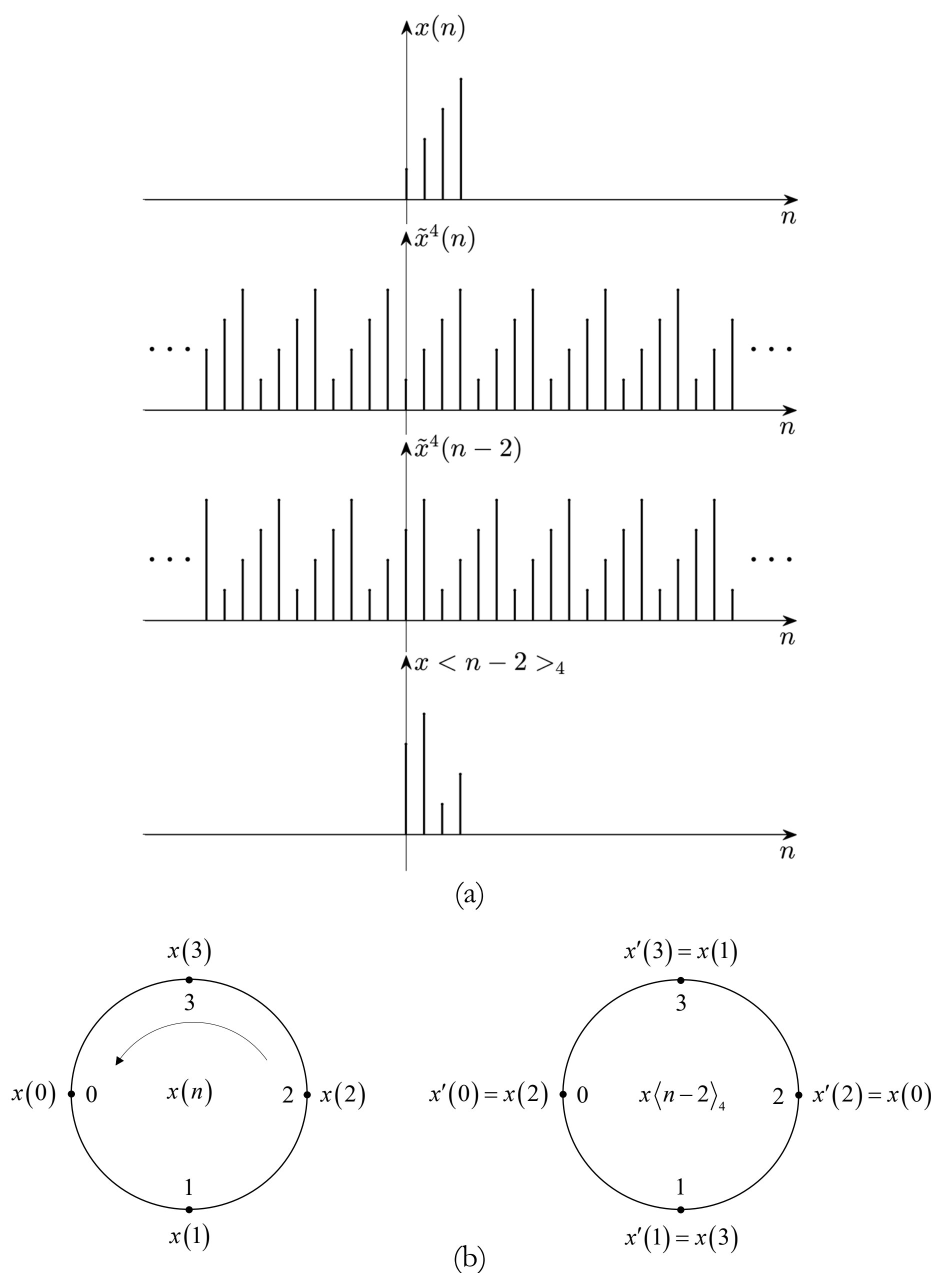
Iz definicionih izraza za direktnu i inverznu DFT (7.17), u ovom dijelu ćemo izvesti i dokazati osnovne osobine ove transformacije. Vidjećemo da su neke od osobina vezane za tzv. cirkularni pomak sekvence, pa ćemo prvo razjasniti šta se podrazumijeva pod tim pojmom.

7.5.1 Cirkularni pomak

Pretpostavimo da posmatramo signal $x(n)$ konačnog trajanja od *N* elemenata. Neka je $\tilde{x}^N(n)$ periodičan signal koji se dobije periodičnim proširenjem signala $x(n)$ sa periodom *N*. Izvršimo linearni pomak signala $\tilde{x}^N(n)$, tako da dobijemo $\tilde{x}^N(n-m)$, pa formirajmo signal $x'(n)$ izdvajajući jedan period ovog linearno pomjerenog signala. Ovaj postupak je ilustrovan na Slici 7.6.(a), za $N=4$ i $m=2$. Očito je da signal $x'(n)$ ne odgovara linearnom pomaku signala $x(n)$.

Zamislimo sada da su elementi signala $x(n)$ ravnomjerno raspoređeni po obodu cilindra u *N* tačaka, kao na lijevom dijelu Slike 7.6.(b). Stalnim obilaženjem cilindra u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu i zapisivanjem vrijednosti elemenata na koje nailazimo, dobijamo periodičan signal $\tilde{x}^N(n)$. Ako u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu zarotiramo elemente signala po obodu cilindra za *k* pozicija, kao na desnom dijelu Slike 7.6(b) pri $k=2$, ponovnim obilaženjem bismo generisali, za *k* mjesta linearno pomjereno, periodično proširenje, $\tilde{x}^N(n-k)$. Ovakav rotacioni pomak signala konačnog trajanja naziva se *cirkularni pomak*. Cirkularno pomjeren signal ćemo označavati sa $x\langle n-k\rangle_N$, jer za periodično proširenje signala $x(n)$ vrijedi da je:

$$\tilde{x}^N(n)=x\langle n\rangle_N, \tag{7.27}$$



Slika 7.6 Linearni i cirkularni pomak signala: (a) izdvajanje jednog perioda linearno pomjerenog periodičnog proširenja signala i (b) cirkularni pomak signala konačnog trajanja.

pa koristeći istu notaciju, pišemo da linearnom pomaku periodične sekvence odgovara cirkularni pomak sekvence konačnog trajanja:

$$\tilde{x}^N(n-k) = x\langle n-k \rangle_N . \tag{7.28}$$

Prema tome, signal $x'(n)$ se, umjesto linearnim pomakom periodičnog proširenja signala $x(n)$, može dobiti cirkularnim pomakom tog signala konačnog trajanja. U primjeru datom na Slici 7.6(a), signal $x'(n)$ je formiran tako što je signal $x(n)$ periodično proširen sa periodom $N=4$, linearno pomjeren za $k=2$, a zatim je izdvojen jedan period tako dobijenog signala, za $n=0,1,2,3$. Umjesto toga, $x'(n)$ možemo dobiti računanjem cirkularnog pomaka po modulu $N=4$:

$$x'(0) = x\langle 0-2 \rangle_4 = x\langle -2 \rangle_4 = x\langle 4-2 \rangle_4 = x\langle 2 \rangle_4 = x(2),$$

$$x'(1) = x\langle 1-2 \rangle_4 = x\langle -1 \rangle_4 = x\langle 4-1 \rangle_4 = x\langle 3 \rangle_4 = x(3),$$

$$x'(2) = x\langle 2-2 \rangle_4 = x\langle 0 \rangle_4 = x\langle 4-0 \rangle_4 = x\langle 4 \rangle_4 = x(0),$$

$$x'(3) = x\langle 3-2 \rangle_4 = x\langle 1 \rangle_4 = x(1).$$

Signal konačnog trajanja može biti cirkularno paran, ili cirkularno neparan. Signal je *cirkularno paran*:

$$x\langle n \rangle_N = x\langle N-n \rangle_N , \tag{7.29}$$

ako je njegovo periodično proširenje paran signal:

$$\tilde{x}^N(n) = \tilde{x}^N(-n) = \tilde{x}^N(N-n). \tag{7.30}$$

Signal je *cirkularno neparan*:

$$x\langle n \rangle_N = -x\langle N-n \rangle_N , \tag{7.31}$$

ako je njegovo periodično proširenje neparan signal:

$$\tilde{x}^N(n) = -\tilde{x}^N(-n) = -\tilde{x}^N(N-n). \tag{7.32}$$

7.5.2 Linearnost

Ako je $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$, tada linearnoj kombinaciji signala u vremenskom domenu odgovara linearna kombinacija njihovih DFT:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(k) + bX_2(k), \ \forall a,b \in \mathbb{C} . \tag{7.33}$$

Dokaz:

Dokaz ove osobine slijedi direktno iz osobina sabiranja i množenja:

$$\begin{aligned} \mathrm{DFT}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= a\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + b\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= aX_1(k) + bX_2(k) \ . \end{aligned} \tag{7.34}$$

□

7.5.3 Osobine simetrije

Realni cirkularno parni i imaginarni cirkularno neparni dijelovi sekvence u jednom domenu generišu realni dio sekvence u drugom domenu, dok realni cirkularno neparni i imaginarni cirkularno parni dijelovi sekvence u jednom domenu generišu imaginarni dio sekvence u drugom domenu.

Dokaz:

Posmatrajmo kompleksni signal u vremenu:

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n), \ 0 \le n \le N-1 , \tag{7.35}$$

gdje su $x_R(n)$ i $x_I(n)$ realna i imaginarna komponenta signala $x(n)$, respektivno. Njegova DFT je:

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k),\ 0 \le k \le N-1. \tag{7.36}$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela direktne DFT ($X_R(k)$ i $X_I(k)$, respektivno) i inverzne DFT ($x_R(n)$ i $x_I(n)$, respektivno) imamo:

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk + x_I(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk\right],\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.37}$$

$$X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk - x_I(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk\right],\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.38}$$

$$x_R(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\cos\frac{2\pi}{N}nk - X_I(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk\right],\ 0 \le n \le N-1, \tag{7.39}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_R(k)\sin\frac{2\pi}{N}nk + X_I(k)\cos\frac{2\pi}{N}nk\right],\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.40}$$

Zapišimo realni i imaginarni dio signala $x(n)$ preko zbira njihovih cirkularno parnih ($x_R^p(n)$ i $x_I^p(n)$) i cirkularno neparnih ($x_R^n(n)$ i $x_I^n(n)$) komponenti:

$$x_R(n) = x_R^p(n) + x_R^n(n), \tag{7.41}$$

$$x_I(n) = x_I^p(n) + x_I^n(n). \tag{7.42}$$

Posmatrajući (7.37), vidimo da cirkularno neparni realni dio signala $x_R^n(n)$, kao ni cirkularno parni imaginarni dio signala $x_I^p(n)$ nemaju uticaja na vrijednosti realnog dijela DFT. Ovi dijelovi signala se množe cirkularno parnim, odnosno cirkularno neparnim trigonometrijskim signalima, respektivno, generišući cirkularno neparne signale čija je suma elemenata u (7.37) jednaka nuli. Stoga možemo reći da samo cirkularno parni realni i cirkularno neparni imaginarni dio signala generišu realni dio njegove DFT. Slična razmatranja se mogu provesti posmatrajući (7.38-7.40), što ćemo slikovito prikazati na sljedeći način:

$$x(n) = x_R^p(n) + x_R^n(n) + jx_I^n(n) + jx_I^p(n)$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) \tag{7.43}$$

$$X(n) = X_R^p(k) + X_R^n(k) + jX_I^n(k) + jX_I^p(k)$$

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \tag{7.44}$$

□

DFT realnih signala

Za realne signale vrijedi da odmjerci amplitudnog spektra čine paran, a odmjerci faznog spektra neparan signal:

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k), \tag{7.45}$$

$$\left|X(N-k)\right| = \left|X(k)\right|, \tag{7.46}$$

$$\arg X(N-k) = -\arg X(k). \tag{7.47}$$

Inverzna DFT realnih signala može da se odredi na osnovu (7.39).

DFT realnih i cirkularno parnih signala

Kod cirkularno parnih signala je:

$$x(n) = x(N-n),\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.48}$$

Za realne i cirkularno parne signale (7.38) je jednako nuli, tako da imamo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.49}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.50}$$

DFT realnih i cirkularno neparnih signala

Kod cirkularno neparnih signala je:

$$x(n) = -x(N-n),\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.51}$$

Za realne i cirkularno neparne signale (7.37) je jednako nuli, pa je:

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.52}$$

$$x(n) = -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.53}$$

DFT imaginarnih signala

Za imaginarne signale vrijedi da je:

$$X(N-k) = -X^*(k) = -X(-k), \tag{7.54}$$

$$\left|X(N-k)\right| = \left|X(k)\right|, \tag{7.55}$$

$$\arg X(N-k) = \pi - \arg X(k). \tag{7.56}$$

Inverzna DFT može da se odredi iz (7.40).

DFT imaginarnih i cirkularno parnih signala

Za cirkularno parne signale vrijedi da je:

$$x(n) = x(N-n),\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.57}$$

Ako je signal imaginaran i cirkularno paran, onda je (7.37) jednako nuli, te dobijamo:

$$X(k) = j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.58}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi}{N}nk,\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.59}$$

DFT imaginarnih i cirkularno neparnih signala

Kod cirkularno neparnih signala je:

$$x(n) = -x(N-n),\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.60}$$

Ako je uz to signal čisto imaginaran, (7.38) je jednako nuli, pa je:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N} nk,\ 0 \le k \le N-1, \tag{7.61}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi}{N} nk,\ 0 \le n \le N-1. \tag{7.62}$$

DFT konjugovano kompleksnih signala

Ako je $\mathrm{DFT_N}\{x(n)\} = X(k)$, za konjugovano kompleksni signal vrijedi da je:

$$\mathrm{DFT_N}\{x^*(n)\} = X^* \langle -k \rangle_N. \tag{7.63}$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza, DFT konjugovano kompleksnog signala je data sa:

$$\mathrm{DFT_N}\{x^*(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k = 0,1,2,...,N-1. \tag{7.64}$$

Ako pronađemo konjugovano kompleksnu DFT signala $x(n)$ i zamijenimo k sa $\langle -k \rangle_N$, dobijamo:

$$\begin{aligned} X^* \langle -k \rangle_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\frac{2\pi}{N}n\langle -k \rangle_N} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\frac{2\pi}{N}n\langle N-k \rangle_N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\frac{2\pi}{N}n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k = 0,1,2,...,N-1, \end{aligned} \tag{7.65}$$

što je DFT konjugovano kompleksnog signala, čime je dokaz završen.

□

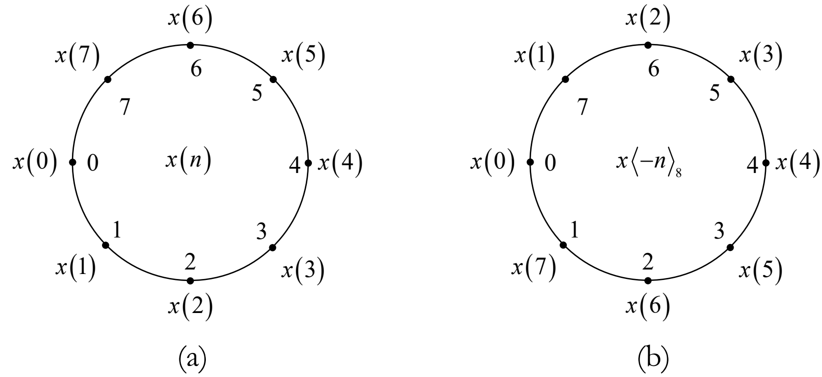
7.5.4 DFT cirkularno reflektovanog signala

Ako je $\mathrm{DFT_N}\left\{x(n)\right\} = X(k)$, tada vrijedi da je:

$$\mathrm{DFT_N}\left\{x\langle -n\rangle_N\right\} = X\langle -k\rangle_N . \tag{7.66}$$

Dokaz:

Na Slici 7.7 prikazan je cirkularno reflektovan signal, koji se dobije očitavanjem vrijednosti elemenata originalnog signala, poredanih po obodima cilindra, u smjeru kretanja kazaljke na satu.



Slika 7.7 Cirkularna refleksija: (a) originalni i (b) cirkularno reflektovan signal.

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT_N}\left\{x\langle -n\rangle_N\right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x\langle -n\rangle_N \, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = x(0) + \sum_{n=1}^{N-1} x\langle -n\rangle_N \, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\Bigg|_{-n=-N+m} = \\ &= x(0) + \sum_{m=N-1}^{1} x(m) e^{j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)m} = X(-k).\end{aligned} \tag{7.67}$$

Za $0 \le k \le N-1$ vrijedi da je:

$$X(-k) = X(N-k) = X\langle N-k\rangle_N = X\langle -k\rangle_N . \tag{7.68}$$

□

7.5.5 Cirkularni pomak u vremenskom domenu

Ako je $\mathrm{DFT_N}\left\{x(n)\right\} = X(k)$, tada vrijedi:

$$\mathrm{DFT_N}\left\{x\langle n-l\rangle_N\right\} = X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}lk}. \tag{7.69}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT_N}\left\{x\langle n-l\rangle_N\right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x\langle n-l\rangle_N\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} x(N+n-l)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=l}^{N-1} x(n-l)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \sum_{m=N-l}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+l)k} + \sum_{m=0}^{N-1-l} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+l)k} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+l)k} = X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}.\end{aligned} \tag{7.70}$$

□

7.5.7 Cirkularna konvolucija

Neka je $\mathrm{DFT_N}\left\{x_1(n)\right\} = X_1(k)$, $\mathrm{DFT_N}\left\{x_2(n)\right\} = X_2(k)$ i $\mathrm{DFT_N}\left\{x_3(n)\right\} = X_3(k)$. Ako su dužine sekvenci $x_1(n)$ i $x_2(n)$ jednake *N*, tada vrijedi da je:

$$\mathrm{DFT_N}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2\langle n-m\rangle_N\right\} = \mathrm{DFT_N}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x_1\langle n-m\rangle_N\, x_2(m)\right\} = \frac{1}{N}X_1(k)X_2(k). \tag{7.72}$$

Dokaz:

Posmatrajmo proizvod:

$$X_3(k) = X_1(k)\cdot X_2(k), \tag{7.73}$$

i odredimo inverznu $\mathrm{DFT_N}$ iz $X_3(k)$:

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) X_2(k) W_N^{-nk} = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk}\right]\left[\sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) W_N^{rk}\right] W_N^{-nk} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(n-m-r)k}\right], \; n = 0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \tag{7.74}$$

Na osnovu:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m-r)} = \begin{cases} N, & \text{za } r = n-m+qN, \; q \text{ cio broj}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{7.75}$$

znajući da zbog (7.74) r mora biti iz opsega $[0, N-1]$, treća suma će biti različita od nule samo kada je $r = \langle n-m \rangle_N$, pa slijedi da je:

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2 \langle n-m \rangle_N, \; n = 0,1,\dots,N-1. \tag{7.76}$$

Jednostavno je, smjenom promjenljivih, doći do alternativnog izraza:

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1 \langle n-m \rangle_N \, x_2(m), \; n = 0,1,\dots,N-1. \tag{7.77}$$

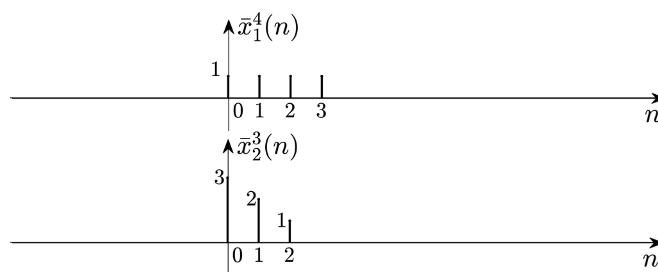
□

Izrazi (7.76) i (7.77) imaju formu konvolucione sume, ali se sumiranje izvodi samo na intervalu $[0, N-1]$. Pored toga, jedan od signala se nakon reflektovanja cirkularno pomjera po modulu N, te ovaj tip konvolucije nazivamo *cirkularna konvolucija* u N tačaka. Za ovaj tip konvolucije ćemo koristiti oznaku $\circ^N$:

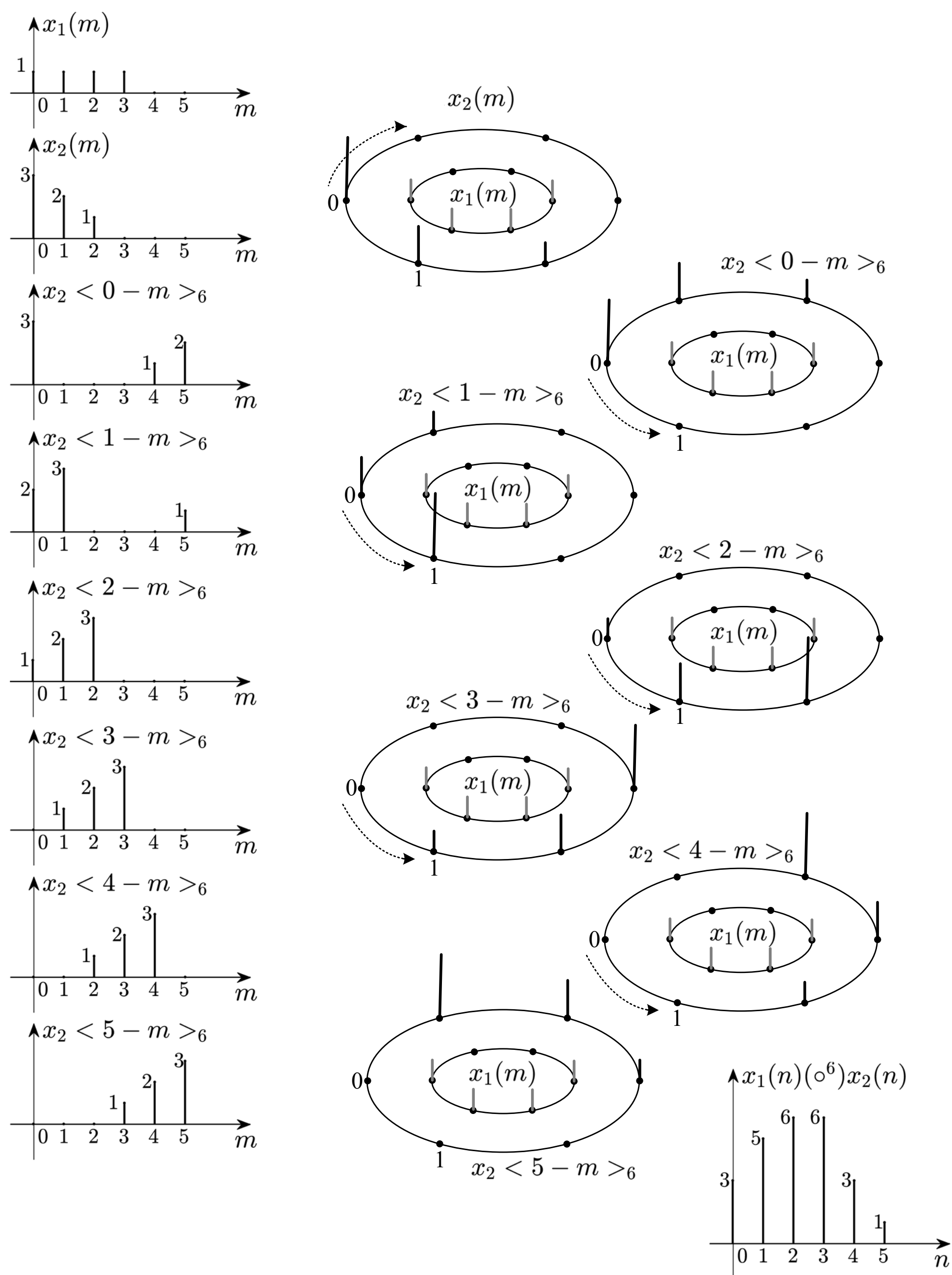
$$x_3(n) = x_1(n) \circ^N x_2(n). \tag{7.78}$$

Postupak grafičkog rješavanja cirkularne konvolucije veoma je sličan grafičkom rješavanju linearne konvolucije. Ilustrovaćemo to na Slici 7.8, na primjeru računanja cirkularne konvolucije u $N = 6$ tačaka signala $\overline{x}_1^K(n)$ i $\overline{x}_2^L(n)$

konačnih trajanja $K = 4$ i $L = 3$, manjih od N. Dopunjavanjem ovih signala elementima nultih vrijednosti formiramo signale $x_1(n)$ i $x_2(n)$ sa N elemenata i predstavimo ih na m-osi. Zatim zamislimo da su ovi signali poredani po obodima dva koncentrična cilindra, u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, kao na Slici 7.8 gore, desno. Kao uvodni korak u računanje cirkularne konvolucije potrebno je uraditi cirkularno reflektovanje jednog od signala, recimo $x_2(n)$, očitavanjem elemenata signala poredanih po obodu cilindra u smjeru kretanja kazaljke na satu. Na taj način dobijamo signal $x_2\langle -m\rangle_N$. Zatim se taj signal cirkularno pomjera (Slika 7.8, lijevo), što odgovara rotaciji cilindra u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu (Slika 7.8, desno) $N-1$ puta, svaki put za jednu jedinicu diskretnog vremena, dok signal $x_1(m)$ miruje. Pri svakom cirkularnom pomaku, suma umnožaka elemenata signala $x_1(m)$ i $x_2\langle n-m\rangle_N$, za $m = 0,1,\ldots,N-1$, daje vrijednost cirkularne konvolucije $x_1(n) \circ^6 x_2(n)$ u tački n, koja odgovara iznosu cirkularnog pomaka. Kao rezultat cirkularne konvolucije u N tačaka uvijek nastaje signal od N elemenata.



Slika 7.8 Grafičko rješavanje cirkularne konvolucije (nastavak na sljedećoj stranici);

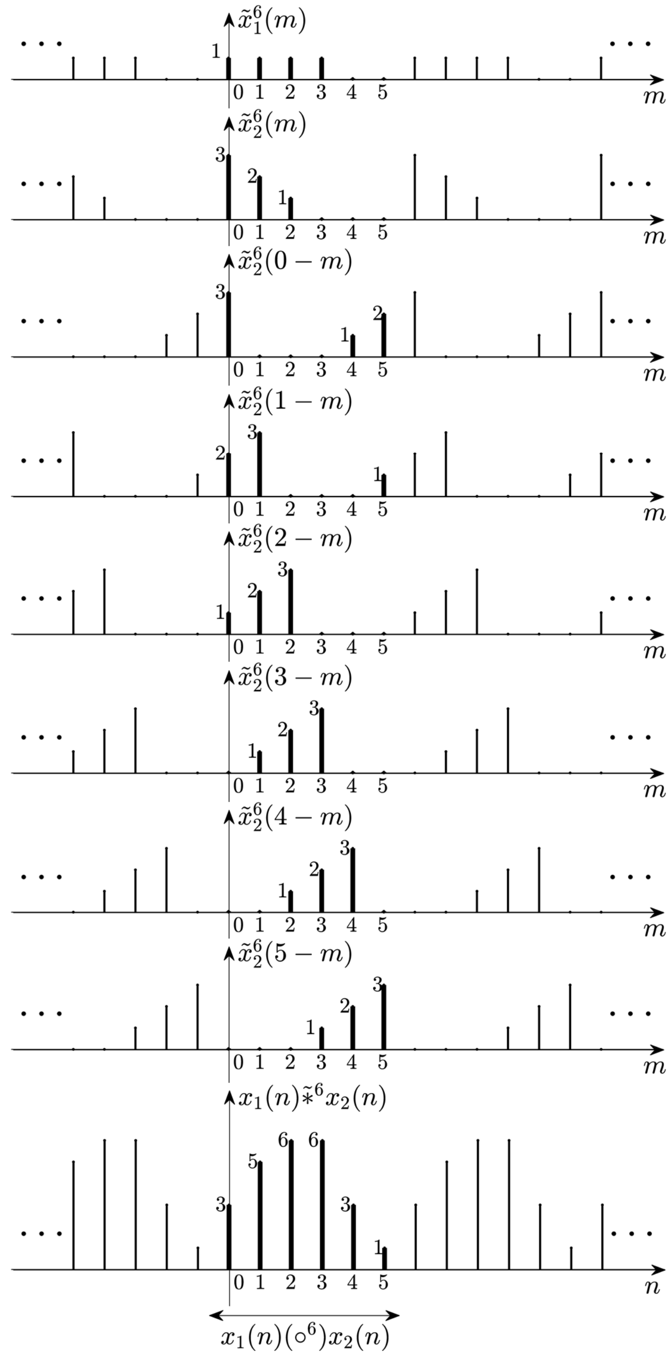


Slika 7.8 Grafičko rješavanje cirkularne konvolucije (nastavak sa prethodne stranice).

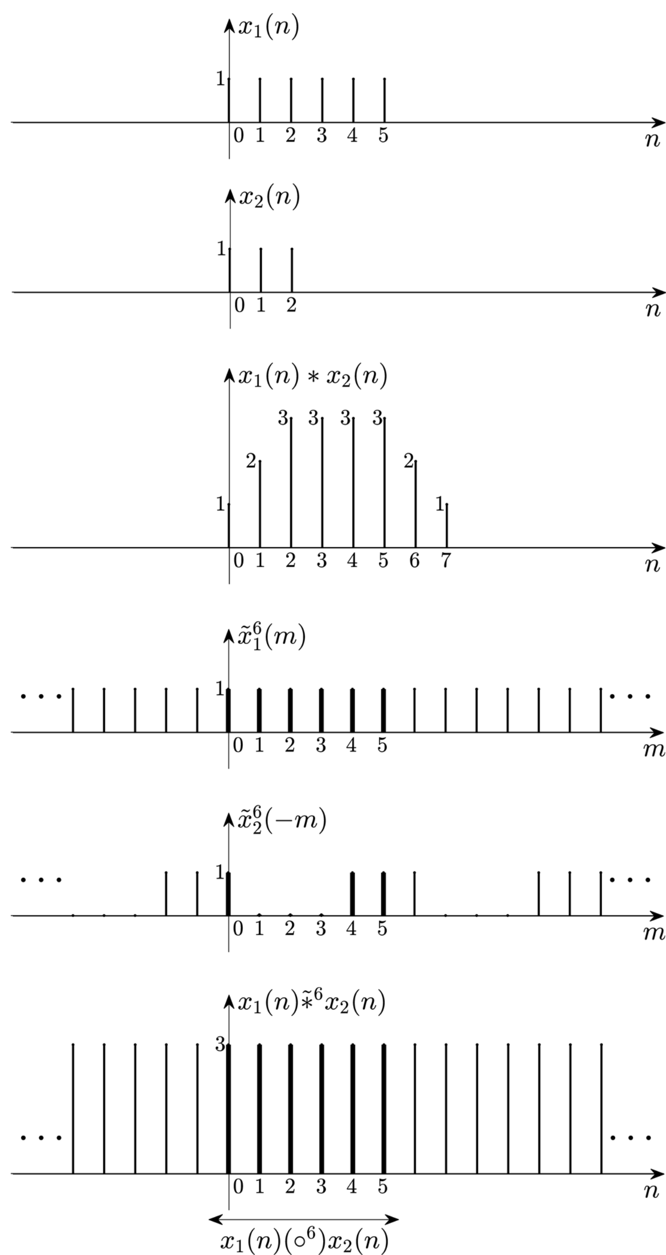
Pretpostavimo sada da računamo periodičnu konvoluciju dva signala konačnih trajanja, jedan sa K i drugi sa L elemenata, oba dopunjena nultim vrijednostima do dužine N, kao na Slici 7.9. Kad se posmatra na intervalu $[0, N-1]$, cirkularni pomak signala $x_2\langle n-m\rangle_N$ odgovara linearnom pomaku njegovog periodičnog proširenja $\tilde{x}_2^N(n-m)$ sa periodom N. Stoga se cirkularna konvolucija može računati i kao periodična konvolucija, sumiranjem član po član umnožaka $x_1(m)$ i $\tilde{x}_2^N(n-m)$ na intervalu $m = 0,1,\ldots,N-1$, za pomake $n = 0,1,\ldots,N-1$, i zadržavanjem samo osnovnog perioda, kao što je prikazano na Slici 7.9, gdje smo za periodičnu konvoluciju u N tačaka koristili oznaku $\tilde{*}^N$.

Periodična konvolucija dva signala je zapravo linearna konvolucija njihovih periodičnih proširenja, s tim da se sumiranje vrši samo na jednom periodu. Ukoliko su signali dopunjeni dovoljnim brojem nultih elemenata, tako da su periodi njihovih periodičnih proširenja veći ili jednaki trajanju linearne konvolucije tih signala, onda će rezultat periodične konvolucije na jednom periodu zavisiti samo od elemenata signala $\tilde{x}_1^N(n)$ i $\tilde{x}_2^N(n)$ iz tog perioda, te je jedan period periodične konvolucije jednak linearnoj konvoluciji. Ukoliko to nije slučaj, prilikom računanja periodične konvolucije, sa elementima signala $\tilde{x}_1^N(n)$ iz osnovnog perioda koji su različiti od nule preklapaju se ne samo elementi signala $\tilde{x}_2^N(n)$ iz osnovnog perioda, već i iz njegovih replika. Sa primjera na Slici 7.10 vidimo da rezultat cirkularne konvolucije signala od šest i tri elementa, ako se računa u šest tačaka nije, a u osam tačaka jeste jednak linearnoj konvoluciji datih signala. Da bi rezultat cirkularne konvolucije ovih signala bio jednak njihovoj linearnoj konvoluciji, cirkularna konvolucija treba da se računa u najmanje osam tačaka. U opštem slučaju, cirkularna konvolucija će biti jednaka linearnoj konvoluciji samo ako se računa u broju tačaka koji je veći ili jednak od trajanja linearne konvolucije, tj. ako je $N \geq K + L - 1$.

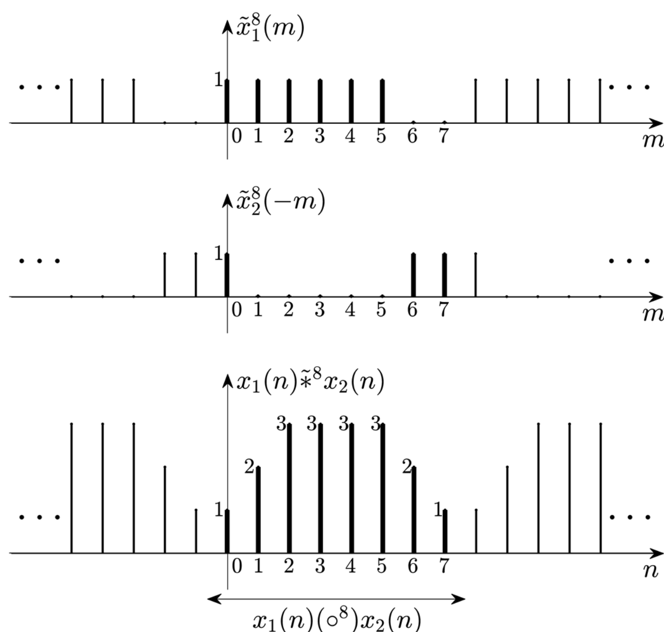
Računanje linearne konvolucije preko cirkularne konvolucije je značajno jer cirkularnu konvoluciju dva signala konačnog trajanja možemo dobiti množenjem njihovih DFT i na taj način, kao što ćemo uskoro vidjeti, znatno smanjiti broj potrebnih operacija za računanje odziva diskretnog sistema.



Slika 7.9 Veza cirkularne i periodične konvolucije.



Slika 7.10 Veza linearne, periodične i cirkularne konvolucije (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 7.10 Veza linearne, periodične i cirkularne konvolucije (nastavak sa prethodne stranice).

Još jednom naglasimo da će linearna konvolucija biti jednaka cirkularnoj, odnosno inverznoj DFT od proizvoda DFT-a dva signala, samo ako je broj tačaka u kojima se računaju DFT i inverzna DFT veći ili jednak od trajanja linearne konvolucije datih signala.

□

7.5.8 Množenje u vremenskom domenu

Ako je $\mathrm{DFT_N}\{x_1(n)\} = X_1(k)$ i $\mathrm{DFT_N}\{x_2(n)\} = X_2(k)$, vrijedi da je:

$$\mathrm{DFT_N}\{x_1(n)\cdot x_2(n)\} = \frac{1}{N} X_1(k) \circ^N X_2(k). \qquad (7.79)$$

Dokaz:

Dokaz se jednostavno izvodi kao kod prethodnog pravila, tako što se zamijene uloge vremenskog i frekvencijskog domena.

□

7.5.6 Cirkularni pomak u frekvencijskom domenu

Ako je $\text{DFT}_\text{N}\{x(n)\} = X(k)$, tada vrijedi da je:

$$\text{DFT}_\text{N}\left\{x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}ln}\right\} = X\langle k-l\rangle_N . \tag{7.71}$$

Dokaz:

Dokazuje se na veoma sličan način kao prethodno pravilo, koristeći izraz za inverznu DFT.

□

7.5.9 Cirkularna korelacija

Ako je $\text{DFT}_\text{N}\{x(n)\} = X(k)$ i $\text{DFT}_\text{N}\{y(n)\} = Y(k)$, vrijedi da je:

$$\text{DFT}_\text{N}\{r_{xy}^N(n)\} = R_{xy}(k) = X(k)\cdot Y^*(k), \tag{7.80}$$

gdje je cirkularna kroskorelacija signala $x(n)$ i $y(n)$ u N tačaka definisana sa:

$$r_{xy}^N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y^*\langle m-n\rangle_N . \tag{7.81}$$

Dokaz:

Cirkularnu kroskorelaciju $r_{xy}^N(n)$ možemo zapisati kao cirkularnu konvoluciju $x(n)$ i $y^*(-n)$:

$$r_{xy}^{N}(n)=x(n)\circ^{N} y^{*}\langle -n\rangle_{N}, \tag{7.82}$$

pa koristeći (7.63) i (7.66) dobijamo da je:

$$\mathrm{DFT_N}\left\{r_{xy}^{N}(n)\right\}=R_{xy}(k)=X(k)\cdot Y^{*}(k). \tag{7.83}$$

U specijalnom slučaju kada je $y(n)=x(n)$, za DFT cirkularne autokorelacije dobijamo:

$$\mathrm{DFT_N}\left\{r_{xx}^{N}(n)\right\}=R_{xx}(k)=X(k)\cdot X^{*}(k)=\left|X(k)\right|^{2}. \tag{7.84}$$

što su odmjerci spektralne gustine energije $S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)$ definisane u (6.37).

□

7.5.10 Parsevalova relacija

Ako je $\mathrm{DFT_N}\left\{x(n)\right\}=X(k)$ i $\mathrm{DFT_N}\left\{y(n)\right\}=Y(k)$, vrijedi da je:

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^{*}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^{*}(k). \tag{7.85}$$

Dokaz:

Dokaz slijedi direktno iz (7.80) i (7.81), uvrštavajući da je $n=0$:

$$r_{xy}^{N}(0)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y^{*}(m)=\mathrm{IDFT}_{N}\left\{X(k)Y^{*}(k)\right\}\Big|_{n=0}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^{*}(k). \tag{7.86}$$

Izraz (7.86) je opšti oblik Parsevalove teoreme, koji se u posebnom slučaju, kad je $y(n)=x(n)$, svodi na izraz koji omogućava računanje energije signala konačnog trajanja u domenu DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^{2}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^{2}. \tag{7.87}$$

□

7.6 Algoritmi za brzo računanje DFT

Za računanje DFT u N tačaka, pri čemu je N stepen broja dva, postoje dva veoma efikasna algoritma, koji su jednim imenom označeni kao *algoritmi brze Furijeove transformacije* (eng. *Fast Fourier Transform* – FFT), ili kratko *FFT algoritmi*. Prvi algoritam se zasniva na formiranju dvije nove sekvence od polaznog signala, tako da se u te posebne sekvence razdvajaju elementi signala sa parnim i neparnim indeksima. Novonastale sekvence su prorijeđene u vremenskom domenu, te se ovaj postupak naziva *FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu*. Drugi algoritam vrši podjelu signala na dvije nove sekvence podjednake dužine, tako da prvu sekvencu čine elementi sa manjim, a drugu sa većim vrijednostima indeksa, što dovodi do generisanja prorijeđenog spektra ta dva odvojena signala, te je ovaj postupak označen kao *FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji*.

7.6.1 FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu

Razdvojimo signal čiju DFT tražimo na dva signala, od kojih jedan sadrži elemente sa parnim, a drugi sa neparnim indeksima. Uz pretpostavku da je N stepen broja dva, možemo pisati:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}, \ k = 0,1,\dots,N-1 \ , \end{aligned} \tag{7.88}$$

gdje smo koristili identitet:

$$W_{N/2} = W_N^2 . \tag{7.89}$$

Poslednje dvije sume su, za $k = 0,1,\dots,N/2-1$, ekvivalentne DFT u $N/2$ tačaka, signala formiranih od elemenata signala sa parnim i neparnim indeksima:

$$x_1(n) = x(2n), \ n = 0,1,\cdots,N/2-1 , \tag{7.90}$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \ n = 0,1,\cdots,N/2-1 , \tag{7.91}$$

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_{N/2}^{nk},\ k=0,1,...,N/2-1, \tag{7.92}$$

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_{N/2}^{nk},\ k=0,1,...,N/2-1. \tag{7.93}$$

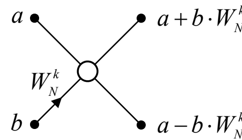
Kako je:

$$W_N^{k+N/2}=-W_N^k,\ k=0,1,...,\frac{N}{2}-1, \tag{7.94}$$

vodeći računa da je DFT u $N/2$ tačaka periodična sa periodom $N/2$, možemo pisati:

$$X(k)=X_1(k)+W_N^k X_2(k),\ k=0,1,...,N/2-1, \tag{7.95}$$

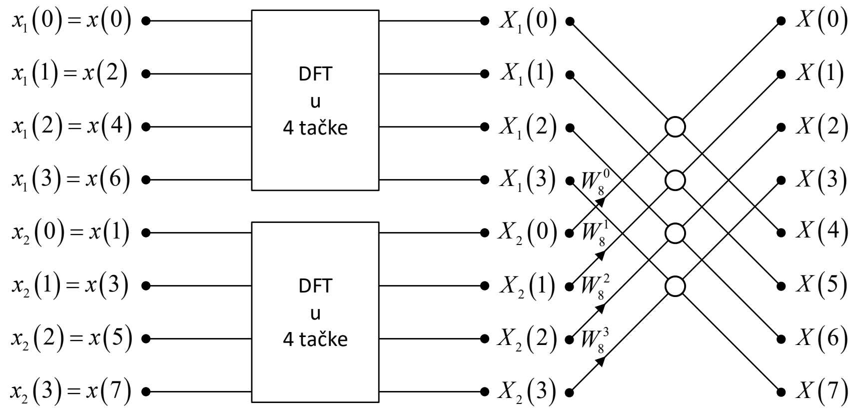
$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_1(k)-W_N^k X_2(k),\ k=0,1,...,N/2-1. \tag{7.96}$$



Slika 7.11 Grafički prikaz leptir operacije FFT algoritma sa prorjeđivanjem u vremenu.

Na ovaj način se računanje DFT u N tačaka svodi na dva računanja DFT u $N/2$ tačaka.

Osnovna operacija algoritma, data sa (7.95) i (7.96) se često naziva *leptir operacija* i grafički se predstavlja kao na Slici 7.11. Na primjeru računanja DFT u 8 tačaka, FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu je ilustrovan na Slici 7.12. Postupak se nastavlja tako što se novonastali signali u vremenskom domenu dalje razdvajaju na po dva nova signala, formirana od njihovih elemenata sa parnim i neparnim indeksima. Razdvajanje signala se zaustavlja kada se dođe do



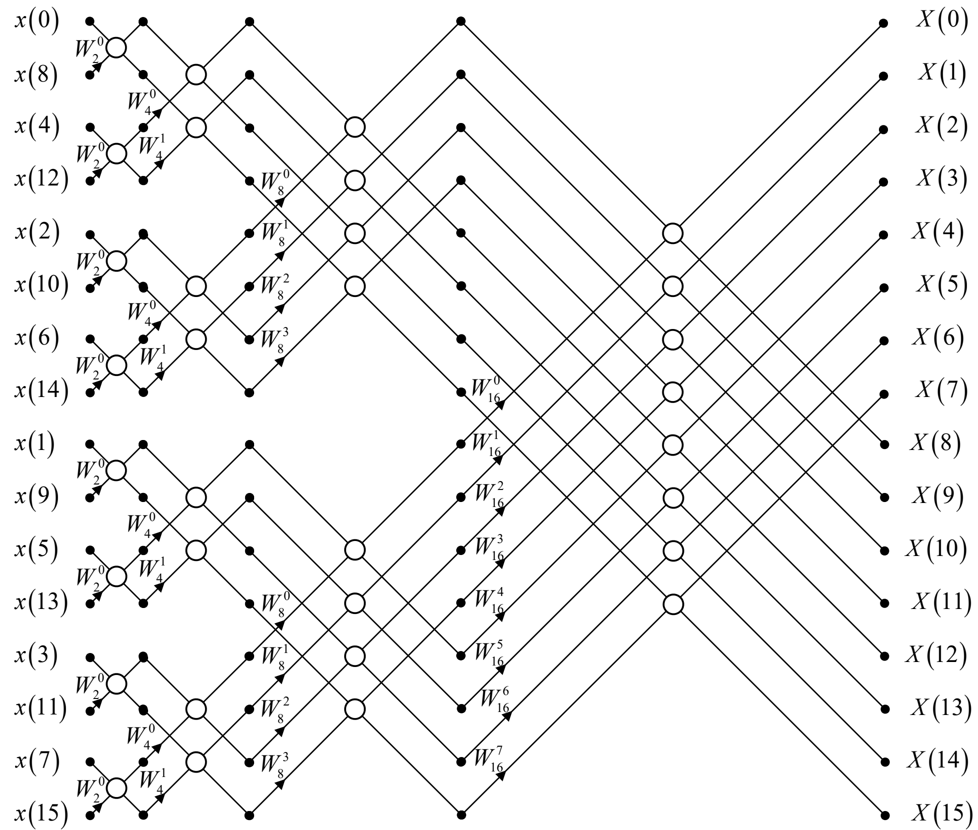
Slika 7.12 FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu u 8 tačaka.

sekvenci od dva elementa. Računanje DFT sekvence od dva elementa je veoma jednostavno:

$$X(0)=x(0)+x(1), \tag{7.97}$$

$$X(1)=x(0)+e^{-j\frac{2\pi}{2}}x(1)=x(0)-x(1). \tag{7.98}$$

Poznavajući DFT u dvije tačke, na osnovu (7.95) i (7.96) odredimo DFT u četiri tačke. Koristeći iste izraze, nastavljamo da određujemo DFT u dvostruko većem broju tačaka, sve dok ne dođemo do polaznog broja tačaka *N*. Na Slici 7.13 je detaljno ilustrovan postupak računanja DFT u šesnaest tačaka koristeći FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu.



Slika 7.13 Detaljan prikaz FFT algoritma sa prorjeđivanjem u vremenu u 16 tačaka.

Indeksi originalne sekvence	Binarni indeksi originalne sekvence	Binarni indeksi nakon 1. razdvajanja	Binarni indeksi nakon 2. razdvajanja	Binarni indeksi nakon 3. razdvajanja
0	0000	0000	0000	0000
1	0001	0010	0100	1000
2	0010	0100	1000	0100
3	0011	0110	1100	1100
4	0100	1000	0010	0010
5	0101	1010	0110	1010
6	0110	1100	1010	0110
7	0111	1110	1110	1110
8	1000	0001	0001	0001
9	1001	0011	0101	1001
10	1010	0101	1001	0101
11	1011	0111	1101	1101
12	1100	1001	0011	0011
13	1101	1011	0111	1011
14	1110	1101	1011	0111
15	1111	1111	1111	1111

Slika 7.14 Bit reverzni poredak ulazne sekvence.

Razdvajanjem elemenata signala $x(n)$ sa parnim i neparnim indeksima radimo prorjeđivanje signala u vremenu, pa otuda i potiče naziv ovog algoritma. Treba primijetiti da ulazni elementi, nakon što se polazni signal prorijedi više puta, sve dok se ne dobiju signali od po dva elementa, dolaze u tzv. *bit-reverznom poretku*, što je ilustrovano na Slici 7.14. Prilikom prvog prorjeđivanja polazne sekvence razdvajaju se elementi sa parnim i neparnim indeksima, tj. sa indeksima koji imaju bit najmanje težine jednak nuli od onih kod kojih je taj bit jednak jedinici, respektivno. Indeksi novoformiranih sekvenci dobiju se kad se indeksi sekvence od koje su nastali pomjere za jedan bit udesno. Zatim razdvajamo elemente novoformiranih sekvenci sa parnim i neparnim indeksima, tj. one sa nulom i jedinicom na najnižoj poziciji novoformiranih indeksa, što znači one sa

nulom i jedinicom na drugoj poziciji s desne strane gledano u binarnom zapisu polaznih indeksa. U sljedećem koraku je parnost i neparnost indeksa određena bitom na trećoj poziciji s desne strane u polaznim binarnim indeksima, itd... Na kraju dobijemo indekse od kojih prva polovina ima najniži bit jednak nuli, a druga polovina jedinici. Prva i treća četvrtina imaj drugi bit s desne strane jednak nuli, a druga i četvrta četvrtina jedinici, itd... Suprotno normalnom poretku, ovdje se najsporije mijenja bit najmanje težine, a najbrže onaj sa najvećom težinom, te se radi o bit-reverznom poretku. Budući da je, prije računanja DFT za sekvence od po dva elementa, potrebno preurediti polaznu sekvencu, tj. poredati njene elemente koristeći bit-reverzni poredak, ovaj algoritam se naziva i FFT algoritam sa preuređivanjem u vremenu.

Zbog sukcesivnog dijeljenja dužina sekvenci sa dva, imamo $\log_2 N$ etapa u kojima kombinujemo DFT u manjem broju tačaka, kako bismo dobili DFT u dvostruko većem broju tačaka. U svakoj od tih etapa imamo $N/2$ leptir operacija, a u svakoj leptir operaciji jedno kompleksno množenje i dva kompleksna sabiranja. Tako dolazimo do zaključka da se ukupan broj operacija sa N^2 kompleksnih množenja i sabiranja, koji je potreban pri direktnom računanju DFT, smanjuje na $N\log_2 N$ kompleksnih sabiranja i $(N/2)\log_2 N$ kompleksnih množenja pri korištenju FFT algoritma. Lako se pokaže da se uštede u broju potrebnih operacija postižu za $N > 32$. Na primjer, za DFT u 1024 tačke, potrebno je 1048576 kompleksnih množenja, a koristeći FFT algoritme samo 5120, dakle oko 200 puta manje.

7.6.2 FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji

Sličan prethodno opisanom je i algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji, koji polazi od istih zahtjeva da je N stepen broja dva i postiže iste uštede u računanju. Vidjećemo da je kod ovog algoritma ulazni niz u normalnom, a izlazni u bit-reverznom poretku. Zamislimo da polazni signal prepolovimo, tako da posmatramo prvu polovinu $x(n)$ i drugu polovinu $x(N/2+n)$, uz $n = 0,1,...,N/2-1$. Odredimo DFT signala $x(n)$ u N tačaka:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(N/2+n)W_N^{(N/2+n)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(N/2+n)W_N^{nk}W_N^{(N/2)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + e^{j\pi k}x(N/2+n)\right]W_N^{nk},\ k = 0,1,...,N-1. \end{aligned} \tag{7.99}$$

Za parne indekse dobijamo:

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x(N/2+n)\right]\left(W_N^2\right)^{nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x(N/2+n)\right]W_{N/2}^{nk},\ k = 0,1,...,N/2-1\ , \end{aligned} \tag{7.100}$$

a za neparne:

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x(N/2+n)\right]W_N^n W_{N/2}^{nk},\ k = 0,1,...,N/2-1\,. \tag{7.101}$$

Zatim formirajmo nizove:

$$x_1(n) = x(n) + x(N/2+n),\ n = 0,1,...,N/2-1\,, \tag{7.102}$$

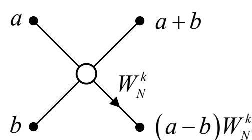
$$x_2(n) = \left[x(n) - x(N/2+n)\right]W_N^n,\ n = 0,1,...,N/2-1\,. \tag{7.103}$$

Sada se $X(k)$ računa kao dvije DFT u dvostruko manjem broju tačaka: za parne indekse se $X(k)$ računa kao DFT signala $x_1(n)$, a za neparne indekse kao DFT signala $x_2(n)$:

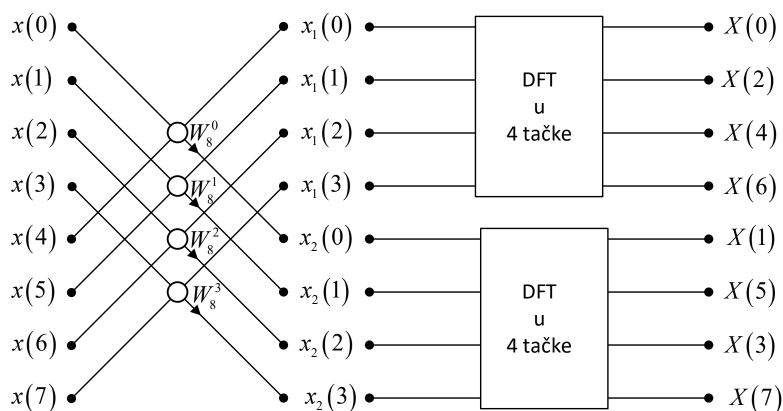
$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_{N/2}^{nk} = X_1(k),\ k = 0,1,...,N/2-1\,, \tag{7.104}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_{N/2}^{nk} = X_2(k),\ k = 0,1,...,N/2-1\,. \tag{7.105}$$

Osnovna leptir operacija se predstavlja kao na Slici 7.15, a FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji u osam tačaka je grafički prikazan na Slici 7.16.

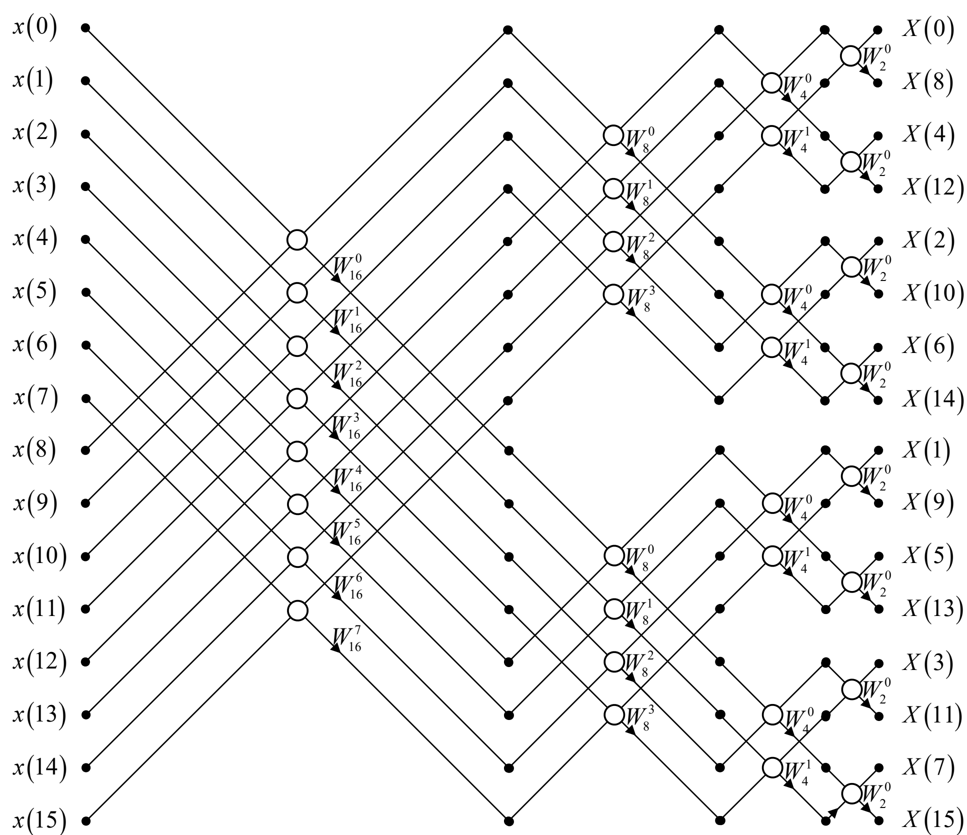


Slika 7.15 Grafički prikaz leptir operacije FFT algoritma sa prorjeđivanjem u frekvenciji.



Slika 7.16 FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji u 8 tačaka.

Postupak se nastavlja tako što se svaka novonastala sekvenca polovi i od te dvije polovine leptir operacijom formiraju dvije nove sekvence sa dvostruko manjim brojem elemenata. Tek nakon što se na ovaj način u vremenskom domenu formiraju sekvence od dva elementa, vrši se računanje njihovih DFT koristeći samo jednu leptir operaciju, čime se u frekvencijskom domenu dobijaju elementi DFT originalne sekvence u bit-reverznom poretku. Zbog toga se ovaj algoritam ponekad naziva i FFT algoritam sa preuređivanjem u frekvenciji. Grafički prikaz postupka računanja DFT u 16 tačaka, koristeći FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji, je dat na Slici 7.17.



Slika 7.17 Detaljan prikaz FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji u 16 tačaka.

7.7 Goertzelov algoritam za računanje DFT

Ako nije neophodno računanje DFT u cijelom frekvencijskom opsegu, već nas zanimaju vrijednosti DFT u malom broju tačaka, korištenje FFT algoritama nema opravdanja u smislu računske složenosti. Tada bolje performanse ima Goertzelov algoritam, koji koristi periodičnost operatora W_N^k kako bi iskazao DFT u vidu konvolucije. Budući da je $W_N^{-kN}=1$, možemo pisati:

$$X(k)=W_N^{-kN}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-k(N-m)},\ k=0,1,2,...,N-1. \quad (7.106)$$

Definišemo N signala preko konvolucionih suma:

$$y_k(n)=\sum_{m=0}^{n-1}x(m)W_N^{-k(n-m)},\ k=0,1,2,...,N-1. \quad (7.107)$$

Svaki signal $y_k(n)$, definisan sa (7.107), u trenutku $n=N$ daje vrijednost k-te frekvencijske komponente DFT:

$$X(k)=y_k(N),\ k=0,1,2,...,N-1, \quad (7.108)$$

što se lako uoči ako se uporede izrazi (7.106) i (7.107).

Relacija (7.107) je niz linearnih konvolucija kauzalne sekvence $x(n)$ i impulsnih odziva beskonačnih trajanja datih sa:

$$h_k(n)=W_N^{-kn}u(n-1),\ k=0,1,2,...,N-1, \quad (7.109)$$

te funkcijama prenosa oblika:

$$H_k(z)=\frac{Y_k(z)}{X(z)}=\frac{W_N^{-k}z^{-1}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}. \quad (7.110)$$

Umjesto računanja vrijednosti ovih N konvolucija za $n=N$ prema relaciji (7.107), vrijednosti $y_k(N)$ se mogu dobiti i preko jednačina diferencija koje opisuju navedene sisteme:

$$y_k(n) = W_N^{-k}\left[y_k(n-1) + x(n-1)\right],\ y_k(-1) = x(-1) = 0,\ k = 0,1,2,...,N-1, \tag{7.111}$$

tako da se izračunaju vrijednosti $y_k(N)$ za $k = 0,1,2,...,N-1$.

Jednačina diferencija (7.111) se dobije inverznom *z*-transformacijom izraza (7.110).

Računanje se može ubrzati ako se unaprijed izračunaju i memorišu vrijednosti faktora W_N^{-k}, ali broj potrebnih matematičkih operacija nije smanjen u odnosu na direktno računanje DFT. Kako bismo smanjili broj operacija potrebnih za izračunavanje DFT, razdvojimo jednačinu diferencija na rekurzivni i nerekurzivni dio, tako da u rekurzivnom dijelu umjesto množenja sa kompleksnim konstantama imamo množenja sa realnim brojevima. U tu svrhu pomnožimo i podijelimo funkciju prenosa sa $1 - W_N^k z^{-1}$:

$$H_k(z) = \frac{W_N^{-k} z^{-1}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \cdot \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - W_N^k z^{-1}} = \frac{W_N^{-k} z^{-1} - z^{-2}}{1 - 2\cos k\frac{2\pi}{N} z^{-1} + z^{-2}}, \tag{7.112}$$

pa je razdvojimo na rekurzivni i nerekurzivni dio:

$$H_k(z) = \frac{Y_k(z)}{X(z)} = \frac{Y_k(z)}{V_k(z)} \cdot \frac{V_k(z)}{X(z)}, \tag{7.113}$$

$$\frac{V_k(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2\cos k\frac{2\pi}{N} z^{-1} + z^{-2}}, \tag{7.114}$$

$$\frac{Y_k(z)}{V_k(z)} = W_N^{-k} z^{-1} - z^{-2}. \tag{7.115}$$

Množenjem sa $1 - W_N^k z^{-1}$ postižemo realne koeficijente u nazivnicima rekurzivnih funkcija prenosa (7.113), tako da pri računanju $v_k(N)$ za jednu vrijednost *k* preko rekurzivne jednačine diferencija ($n = 0,1,\ldots,N-1$):

$$v_k(n) = x(n) + 2\cos k\frac{2\pi}{N} v_k(n-1) - v_k(n-2),\ y_k(-1) = y_k(-2) = 0, \tag{7.116}$$

trebamo *N* množenja sa realnom konstantom $2\cos k\frac{2\pi}{N}$, uz jedno dodatno množenje kompleksnim faktorom u nerekurzivnoj jednačini diferencija, jer se ona računa samo za $n=N$:

$$y_k\left(n\right)=W_N^{-k}v_k\left(n-1\right)-v_k\left(n-2\right),\; n=N\,, \tag{7.117}$$

umjesto *N* množenja sa kompleksnim konstantama pri direktnom računanju jednog elementa DFT. Goertzelov algoritam je od posebnog interesa kada se računa DFT u malom broju tačaka, manjem od $\log_2 N$. Ako je potrebno izračunati vrijednosti DFT za svako $k=0,1,2,...,N-1$, onda su FFT algoritmi mnogo efikasniji.

7.8 Veza DFT i *z*-transformacije

Posmatrajmo *z*-transformaciju sekvence $x\left(n\right)$ konačnog trajanja, sa *N* ili manje elemenata, datu sa:

$$X\left(z\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x\left(n\right)z^{-n}\,. \tag{7.118}$$

ima oblast konvergencije koja obuhvata jediničnu kružnicu. Ako je trajanje posmatrane sekvence kraće od *N* elemenata, sekvenca $x\left(n\right)$ se dopunjava nultim vrijednostima do dužine *N*. Odmjeravanjem $X\left(z\right)$ u kompleksnoj z-ravni, u ravnomjerno raspoređenim tačkama na jediničnoj kružnici, tako da je $z_k=e^{jk\frac{2\pi}{N}}$, iz definicionog izraza za *z*-transformaciju dobijamo DFT signala $x\left(n\right)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1}x\left(n\right)z^{-n}\bigg|_{z_k=e^{jk\frac{2\pi}{N}}}=\sum_{n=0}^{N-1}x\left(n\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\,. \tag{7.119}$$

Dakle, vrijedi da je:

$$X(k) = X(z)\Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} . \tag{7.120}$$

Obrnuto, iz DFT u *N* tačaka, moguće je inverznom DFT rekonstruisati sekvencu konačnog trajanja maksimalne dužine *N*. Interpretirajući $x(n)$ preko njene IDFT (7.16), dolazimo do izraza koji nam omogućava da iz DFT konačne sekvence rekonstruišemo njenu *z*-transformaciju u kompletnoj z-ravni:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right) z^{-n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1} \right)^n = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1} \right)^N}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1}} = \frac{\left(1 - z^{-N}\right)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1}} . \end{aligned} \tag{7.121}$$

Interesantno je primijetiti da, kad se posmatra na jediničnoj kružnici, (7.121) predstavlja Lagranžovu polinomijalnu interpolacionu formulu:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\left(1 - e^{-j\omega N}\right)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)}} , \tag{7.122}$$

kojom se rekonstruiše spektar signala, $X\left(e^{j\omega}\right)$, iz njegove DFT, o čemu ćemo detaljnije govoriti u Glavi 8.

7.9 Čirp z – transformacija

Čirp z - transformacija predstavlja generalizaciju DFT u smislu da omogućava efikasno računanje z - transformacije, ne samo u ravnomjerno raspoređenim tačkama na jediničnoj kružnici, već i u logaritamski raspoređenim tačkama proizvoljno odabranog spiralnog luka u z-ravni. Ovaj algoritam je posebno efikasan ako je potrebno izračunati spektar signala u uskom frekvencijskom opsegu. Pretpostavimo da želimo da izračunamo z-transformaciju signala $x(n)$ konačnog trajanja *N*, u tačkama z_k, $k = 0,1,\ldots,L-1$:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \; k = 0,1,...,L-1. \tag{7.123}$$

U slučaju da su tačke u kojima računamo z - transformaciju ravnomjerno raspoređene na kružnici poluprečnika *r*, tako da je $z_k = re^{jk\frac{2\pi}{N}}$, $k = 0,1,\ldots,L-1$, imamo da je:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) r^{-n} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \; k = 0,1,...,L-1, \tag{7.124}$$

pa se u slučaju da je $L \le N$ za računanje z-transformacije može koristiti FFT algoritam nad modifikovanom ulaznom sekvencom, koja treba da bude jednaka $x(n)r^{-n}$.

Kao mnogo opštiji slučaj, pretpostavimo da tačke z_k, kojih može biti i više nego što je trajanje signala *N*, leže na luku spirale koja počinje u tački $z_0 = r_0 e^{j\varphi_0}$:

$$z_k = r_0 e^{j\varphi_0} \left(R_0 e^{j\Phi_0} \right)^k, \; k = 0,1,...,L-1. \tag{7.125}$$

Ako je $R_0 < 1$, spirala se kreće ka ishodištu, a ako je $R_0 > 1$, od ishodišta. Za $R_0 = 1$ spirala postaje kružnica poluprečnika r_0, a ako je pri tome i $r_0 = 1$ onda se tačke u kojima se računa z-transformacija nalaze na luku jedinične kružnice, čija je dužina određena sa Φ_0 i L. Za $R_0 = r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $\Phi_0 = 2\pi/N$ i $L = N$, tačke

z_k su ravnomjerno raspoređene na jediničnoj kružnici, pa su vrijednosti z-transformacije u tim tačkama jednake vrijednostima DFT. Nekoliko slučajeva rasporeda tačaka z_k, za različite vrijednosti navedenih parametara, je prikazano na Slici 7.18.

Pretpostavimo da nas zanima spektralni sadržaj signala samo u uskom frekvencijskom opsegu, ali da želimo da spektar signala u tom opsegu izračunamo u velikom broju tačaka *L*. FFT algoritmi računaju istovremeno spektar signala u cijelom frekvencijskom opsegu, pa ako želimo da pomoću FFT algoritama izračunamo vrijednosti spektra u gusto raspoređenim tačkama, moramo dopuniti signal jako velikim brojem nula, što značajno utiče na povećanje broja operacija FFT algoritma. Ukoliko pronađemo efikasan algoritam za računanje z - transformacije u tačkama z_k na luku jedinične kružnice, to će nam omogućiti da odredimo spektralni sadržaj signala u *L* tačaka koje, ovisno o izboru Φ_0, mogu da budu gusto raspoređene na kratkom luku, tj. u uskom frekvencijskom opsegu.

Uvedimo oznaku:

$$V = R_0 e^{j\Phi_0}, \tag{7.126}$$

tako da možemo pisati da je:

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(r_0 e^{j\varphi_0}\right)^{-n} V^{-nk},\ k = 0,1,\ldots,L-1. \tag{7.127}$$

Koristeći identitet:

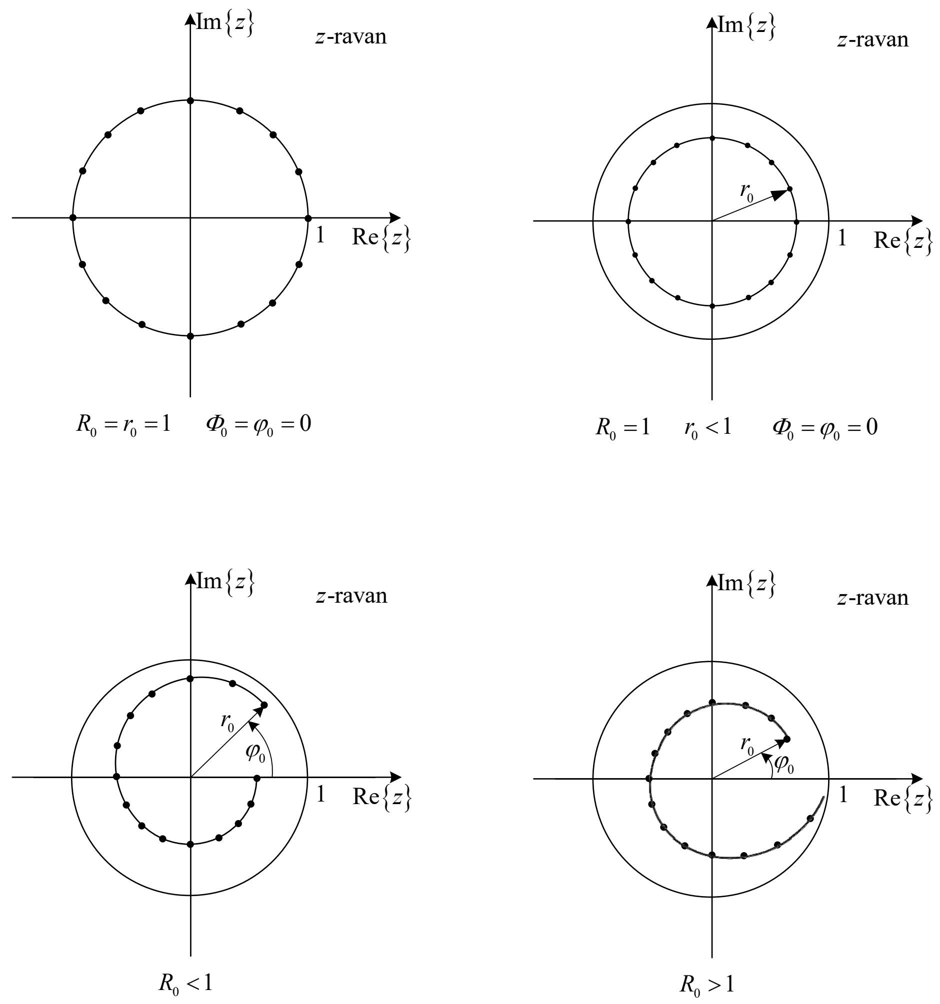
$$nk = \frac{1}{2}\left[n^2 + k^2 - (k-n)^2\right], \tag{7.128}$$

dobijamo:

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)\left(r_0 e^{j\varphi_0}\right)^{-n} V^{-n^2/2}\right] V^{(k-n)^2/2},\ k = 0,1,\ldots,L-1. \tag{7.129}$$

Uvedimo sada novi signal:

$$g(n) = x(n)\left(r_0 e^{j\varphi_0}\right)^{-n} V^{-n^2/2}, \tag{7.130}$$



Slika 7.18 Primjeri kontura na kojima se računa Čirp z-transformacija.

pa dobijamo da je:

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) V^{(k-n)^2/2}, \; k = 0,1,\ldots,L-1. \tag{7.131}$$

Suma u (7.131) predstavlja konvoluciju:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \; k = 0,1,\ldots,L-1, \tag{7.132}$$

gdje je impulsni odziv dat sa:

$$h(n) = V^{n^2/2}. \tag{7.133}$$

Sada možemo z-transformaciju u tačkama z_k zapisati kao:

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} y(k), \; k = 0,1,\ldots,L-1, \tag{7.134}$$

odnosno:

$$X(z_k) = \frac{y(k)}{h(k)}, \; k = 0,1,\ldots,L-1. \tag{7.135}$$

Dakle, za računanje z-transformacije u tačkama z_k potrebno je odrediti konvoluciju kompleksnih signala $g(n)$, konačnog trajanja *N*, i impulsnog odziva $h(n)$, beskonačnog trajanja, koji, uz $R_0 = 1$, ima oblik kompleksnog eksponencijalnog signala:

$$h(n) = e^{j\Phi_0 n^2/2} = e^{j(\Phi_0 n/2)n}, \tag{7.136}$$

čija učestanost $\omega = n\Phi_0/2$ linearno raste sa vremenom. Ovakvi signali, koji se često koriste u radarskim sistemima, se nazivaju *čirp* (eng. *Chirp*) signali, pa se stoga i transformacija data sa (7.131), u vidu konvolucije sa ovakvim signalom, naziva Č*irp* z*-transformacija*. Na kraju još treba pomnožiti član po član rezultat konvolucije sa $V^{-k^2/2}$, odnosno sa recipročnim impulsnim odzivom, prema (7.135).

Čirp z-transformacija je značajno efikasnija od FFT algoritama kada se koristi za računanje spektra signala konačnog trajanja u velikom broju tačaka uskog frekvencijskog opsega. Pretpostavimo da je trajanje signala $N = 64$ i da računamo spektar na luku dužine $\pi/32$ u $L = 1024$ tačke. FFT algoritmi podrazumijevano računaju DFT na cijelom frekvencijskom opsegu, pa budući da u intervalu $[0, 2\pi)$ imamo 64 luka dužine $\pi/32$, broj tačaka pri korištenju FFT algoritama bi bio $64L$, za što je potrebno $32L\log_2(64L) = 2^{19}$ kompleksnih množenja. Ako koristimo Čirp z - transformaciju, za (7.130) nam treba N kompleksnih množenja, zatim ako računamo direktnim putem konvoluciju (7.132) još $N \cdot L$ kompleksnih množenja, te na kraju L množenja za (7.135), što za slučaj da je broj tačaka u kojima računamo spektar signala mnogo veći od njegovog trajanja, $L \gg N$, približno iznosi $(N+1)L = 2^{16} + 2^{10} < 2^{17}$ kompleksnih množenja. U ovom konkretnom slučaju to je više od četiri puta efikasnije nego primjena FFT algoritama.

Računska efikasnost ovog algoritma se može još više povećati ako se za računanje konvolucije (7.132) koriste FFT algoritmi. Iako je signal $h(n)$ beskonačnog trajanja, zbog konačnosti signala $g(n)$ pri računanju konvolucije (7.132), koriste se samo vrijednosti signala $h(n)$ iz opsega $-(N-1) \le n \le L-1$. Kako bismo za računanje konvolucije mogli da koristimo FFT algoritme, definišimo signal $h_1(n)$ trajanja $M = L + N - 1$, tako da bude jednak dijelu signala $h(n)$ koji se koristi pri računanju konvolucije:

$$h_1(n) = h(n - N + 1),\ n = 0, 1, \ldots, M - 1. \tag{7.137}$$

Signal $g(n)$ dopunimo nulama do dužine M i primjenom FFT algoritama izračunamo cirkularnu konvoluciju $y_1(n)$, na osnovu signala $h_1(n)$ i $g(n)$. U cirkularnoj konvoluciji $y_1(n)$ u prvih $N-1$ tačaka dolazi do preklapanja dijelova linearne konvolucije $y(n)$, što je dopustivo jer je cirkularna konvolucija za $N-1 \le n \le M-1$ jednaka linearnoj konvoluciji za $0 \le n \le L-1$:

$$y(n) = y_1(n + N - 1),\ n = 0, 1, \ldots, L - 1. \tag{7.138}$$

Računska složenost ovog algoritma koji koristi Čirp z-transformaciju za računanje DFT je reda $M \log_2 M$ kompleksnih množenja, gdje je $M = L + N - 1$, dok je za direktno računanje z-transformacije u L tačaka signala čije je trajanje N potrebno $N \cdot L$ kompleksnih množenja, te se uštede postižu pri velikim vrijednostima L.

Čirp z-transformacija se može koristiti i za računanje DFT u kompletnom frekvencijskom opsegu, birajući $R_0 = r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $\Phi_0 = 2\pi/N$ i $L = N$. Tada je, za slučaj realnih signala $x(n)$:

$$g(n) = x(n)V^{-\frac{n^2}{2}} = x(n)e^{-j\frac{\pi n^2}{N}} = x(n)\cos\frac{\pi n^2}{N} - jx(n)\sin\frac{\pi n^2}{N}. \qquad (7.139)$$

$$h(n) = V^{\frac{n^2}{2}} = \cos\frac{\pi n^2}{N} + j\sin\frac{\pi n^2}{N} = h_R(n) + jh_I(n). \qquad (7.140)$$

Budući da je, sa ovako odabranim parametrima, $\left|V^{-k^2/2}\right| = 1$, u slučaju da je potrebno odrediti samo amplitudni spektar signala, nije potrebno množenje nakon računanja konvolucije, pa je:

$$\left|X(z_k)\right| = \left|y(k)\right|, \; k = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (7.141)$$

7.10 Diskretna kosinusna transformacija

Zbog svoje kompleksne prirode DFT nije pogodna za mnoge primjene, te se umjesto nje koristi realna *Diskretna kosinusna transformacija* (eng. *Discrete Cosine Transform* – DCT). Iako postoji više verzija DCT, mi ćemo se zadržati na najšire prihvaćenoj i u praksi korištenoj definiciji DCT tipa II u *N* tačaka:

$$X_{COS}(k)=\mathrm{DCT_N}\{x(n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k,\ 0\le k\le N-1. \qquad (7.142)$$

Kao i svaka druga transformacija Furijeovog tipa, DCT razlaže signal na elementarne, ali za razliku od DFT, samo kosinusne signale različitih amplituda i faza. Međutim, iza ove očigledne razlike u odnosu na DFT krije se mnogo dublja razlika, koja se odnosi na granične uslove, što čini ovu transformaciju široko upotrebljivom, posebno u kompresiji signala.

Postoji direktna veza DCT signala $x(n)$ i DFT signala $y(n)$ koji se dobije tako što se signal $x(n)$ proširi dva puta (bez interpolacije, ubacujući nulte vrijednosti između svaka dva elementa polaznog signala), a zatim dopuni sa svojom cirkularno reflektovanom verzijom:

$$\begin{aligned}&y(2n)=0\wedge y(2n+1)=x(n),\ 0\le n\le N-1,\\&y(2N)=0\wedge y(4N-n)=y(n),\ 0<n<2N.\end{aligned} \qquad (7.143)$$

Na taj način se formira cirkularno paran signal $y(n)$ trajanja $4N$ čija je DFT u $4N$ tačaka realna, i jednaka dvostrukoj vrijednosti DCT signala $x(n)$ u *N* tačaka, za $0\le k\le N-1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT_{4N}}\{y(n)\}&=\sum_{n=0}^{4N-1}y(n)e^{-j\frac{2\pi}{4N}nk}=\sum_{n=0}^{4N-1}y(n)\cos\frac{2\pi}{4N}nk=\\&=\sum_{n=0}^{2N-1}y(2n+1)\cos\frac{2\pi}{4N}(2n+1)k=\\&=2\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k=2\mathrm{DCT_N}\{x(n)\}.\end{aligned} \qquad (7.144)$$

Neki autori vrše normalizaciju DCT tako što je množe sa faktorom $\alpha(k)$:

$$X_{COS}(k) = \mathrm{DCT_N}\{x(n)\} = \alpha(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2})k,\ 0 \le k \le N-1, \quad (7.145)$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & k = 0, \\ \sqrt{2/N}, & 1 \le k \le N-1, \end{cases} \quad (7.146)$$

kako bi dobili ortonormalnu transformaciju, ali se pri tome gubi direktna veza sa DFT. U slučaju normalizovane DCT, inverzna DCT je data sa:

$$x(n) = \mathrm{IDCT_N}\{X_{COS}(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1}\alpha(k) X_{COS}(k)\cos\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2})k,\ 0 \le n \le N-1 \,.(7.147)$$

Kod DFT diskretizacija u frekvencijskom domenu dovodi do periodičnog ponavljanja signala konačnog trajanja u vremenskom domenu, pri čemu zbog različitih vrijednosti na početku i kraju signala konačnog trajanja nastaju diskontinuiteti na rubovima perioda njegovog periodičnog proširenja. Slično se dešava i kod DCT, samo što je kod DCT, zbog realnosti u frekvencijskom domenu, to periodično proširenje uvijek parno, pa se ne pojavljuju diskontinuiteti kao kod periodičnih proširenja prilikom primjene DFT. Diskretna Furijeova transformacija i diskretni Furijeov red su povezani relacijom (7.12), tako da je $X(k) = N \cdot c_k$, a direktna proporcionalnost postoji i između DCT i koeficijenata DFS. Razvoj u Furijeov red signala koji su više "glatki", tj. kod kojih u vremenskom domenu nisu izražene brze promjene, energiju signala koncentriše u manjem broju frekvencijskih komponenti nego kod signala koji se u vremenu naglo mijenjaju. Ova na prvi pogled skrivena, suptilnija razlika između DCT i DFT, čini DCT veoma pogodnom za kompresiju slike i zvuka, kao i za brojne druge primjene u nauci i inženjerstvu. DCT je široko korištena tehnika transformacije u kompresiji signala i ugrađena je u mnoge standarde za kompresiju slike (JPEG), videa (MPEG i H.26x), zvuka (Dolby Digital, MP3 i AAC), u digitalnoj televiziji (SDTV i HDTV) i kodovanju govora.

Glava 8

FREKVENCIJSKA ANALIZA SIGNALA POMOĆU DFT

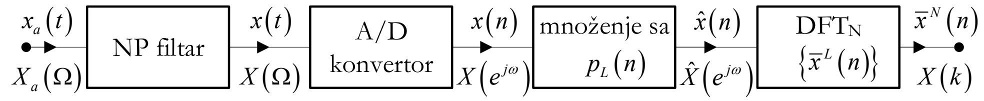
Frekvencijska analiza signala podrazumijeva određivanje amplituda i faza frekvencijskih komponenti sadržanih u posmatranom signalu. Za određivanje spektra signala kojeg poznajemo od $-\infty$ do ∞ koristimo DTFT, dok je DFT pogodan alat za digitalnu frekvencijsku analizu signala konačnog trajanja. Ova transformacija, kojom računamo odmjerke spektra signala, može da poprimi različite oblike ovisno o tome u koliko tačaka se računa. Posljedica je to činjenice da je normalizovana DFT signala konačnog trajanja, kada se podijeli sa N, jednaka koeficijentima DTFS njegovog periodičnog proširenja sa periodom N, a oblik tog peroidičnog proširenja, pa samim tim i koeficijenti DTFS i DFT, variraju sa promjenom N zbog dopunjavanja signala nultim vrijednostima prije njegovog periodičnog proširivanja. Odmjerci spektra postaju gušći kako se povećava broj tačaka u kojima računamo DFT i, u graničnom slučaju, ako signal dopunimo nultim vrijednostima do beskonačnosti, spektar postaje kontinualan.

Računanje DFT u velikom broju tačaka ima smisla radi bolje vizualizacije i procjene spektra signala u gusto raspoređenim tačkama frekvencijske ose, dok je kompletna informacija o frekvencijskom sadržaju signala sadržana u DFT koja je izračunata u broju tačaka koji je jednak ili veći od trajanja signala u vremenu.

Iz DFT u N tačaka možemo rekonstruisati signal u vremenskom domenu ako je trajanje signala $L \leq N$. Stoga je moguća i direktna rekonstrukcija spektra iz njegovih odmjeraka, što ćemo i pokazati u ovom poglavlju. Vidjećemo kako iz isječka signala možemo izvršiti procjenu njegovog spektra, te kako DFT možemo koristiti za frekvencijsku analizu kontinualnih signala.

8.1 Procjena spektra signala primjenom DFT

Kada radimo analizu bilo kontinualnih ili diskretnih signala, gotovo uvijek imamo informaciju o signalima samo u konačnom vremenskom intervalu njegovog posmatranja. Budući da nam pri računanju Furijeove transformacije kontinualnih signala kao i DTFT trebaju podaci o signalima beskonačnog trajanja, najčešće pretpostavljamo da su vrijednosti signala van intervala posmatranja jednake nuli. Obje navedene transformacije su funkcije kontinualnih promjenljivih, dok spektralnu analizu signala konačnog trajanja u digitalnom domenu radimo koristeći DFT. Iz praktičnih razloga, ako signal poznajemo u relativno dugom vremenskom intervalu, DFT se ne računa u broju tačaka koji je jednak trajanju signala, već se signal dijeli u blokove i određuju DFT-e pojedinačnih blokova. Više je razloga za ovakav pristup, a jedan od osnovnih je računska složenost. Međutim, suštinski razlog za ovakav pristup je vezan za prirodu signala. Kod većine signala koje susrećemo u praksi spektar signala se mijenja u toku vremena. Takve signale zovemo *nestacionarnim signalima* i njihovoj analizi ćemo posvetiti posebno poglavlje. Ovdje ćemo se skoncentrisati na frekvencijsku analizu *stacionarnih signala*, tj. onih signala za koje znamo (ili pretpostavljamo) da se njihov spektar ne mijenja u toku vremena.



Slika 8.1 Procjena spektra signala pomoću DFT.

Pretpostavimo da želimo da procijenimo spektar signala beskonačnog trajanja računajući DFT jednog njegovog isječka konačne dužine *L*. Pri frekvencijskoj analizi kontinualnih signala pomoću DFT, blokovski prikazanoj na Slici 8.1, neophodno je izvršiti odmjeravanje kontinualnog signala $x_a(t)$ u vremenskom domenu sa korakom Δt. Kako bismo bili sigurni da prilikom odmjeravanja signala ne dolazi do preklapanja u frekvencijskom domenu, prije samog odmjeravanja signal se filtrira niskopropusnim analognim filtrom čija je granična ugaona učestanost propusnog opsega jednaka $\Omega_g = \Omega_s/2 = \pi/\Delta t$, odnosno vrši se izdvajanje samo dijela spektra $X_a(\Omega)$ polaznog signala:

$$X(\Omega) = \begin{cases} X_a(\Omega), & |\Omega| \leq \Omega_g, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_g. \end{cases} \tag{8.1}$$

U praksi se uzima nešto manja granična učestanost propusnog opsega zbog nemogućnosti idealnog razdvajanja propusnog i nepropusnog opsega pri realizaciji filtara. Na taj način dobijamo signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ koji je teorijski jednak nuli za $|\Omega| > \Omega_g$. Ukoliko je signal po prirodi diskretan, ovaj korak se preskače. Za diskretne signale koji nastaju odmjeravanjem kontinualnih signala postoji veza (izvedena u Glavi 6) između spektra $X(e^{j\omega})$ diskretnog i spektra $X(\Omega)$ kontinualnog signala:

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s). \tag{8.2}$$

Budući da je prije odmjeravanja signal propušten kroz idealni niskopropusni filtar, nema preklapanja u frekvencijskom domenu, pa vrijedi:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}X\left(\Omega\right)=\frac{1}{\Delta t}X\left(\frac{\omega}{\Delta t}\right),\ l\pi\le\omega<\left(l+2\right)\pi\ , \tag{8.3}$$

gdje je l cio broj.

Zatim se izdvaja konačan broj odmjeraka diskretnog signala množenjem sa prozorskom sekvencom $p_L\left(n\right)$, čije su vrijednosti različite od nule samo na segmentu trajanja L:

$$\hat{x}\left(n\right)=x\left(n\right)\cdot p_L\left(n\right). \tag{8.4}$$

Za sada ćemo pretpostaviti da je prozorska sekvenca pravougaonog oblika. Na taj način dobijamo signal $\hat{x}\left(n\right)$, koji je jednak nuli van posmatranog intervala, ali je i dalje beskonačnog trajanja pa za njega možemo odrediti DTFT:

$$\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=\text{DTFT}\left\{\hat{x}\left(n\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\lambda}\right)P_L\left(e^{j\left(\omega-\lambda\right)}\right)d\lambda\,, \tag{8.5}$$

kao periodičnu konvoluciju spektra $X\left(e^{j\omega}\right)$ sa $P_L\left(e^{j\omega}\right)$, što je DTFT prozorske sekvence $p_L\left(n\right)$. Spektar $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$ predstavlja procjenu spektra signala $x\left(n\right)$.

U svrhu procjene odmjeraka spektra pomoću DFT formiramo signal konačnog trajanja, tako što isječak signala $x\left(n\right)$ na posmatranom intervalu $n=0,1,\cdots,L-1$ izdvojimo i označimo sa $\overline{x}^L\left(n\right)$. Procjenu spektra radimo samo na osnovu odabranog isječka signala, pa smatramo da nam vrijednosti signala $\overline{x}^L\left(n\right)$ van ovog intervala nisu poznate. Jasno je da su vrijednosti $\overline{x}^L\left(n\right)$ i $\hat{x}\left(n\right)$ jednake za $n=0,1,\cdots,L-1$. Ukoliko je trajanje signala $\overline{x}^L\left(n\right)$ manje od broja tačaka u kom računamo DFT, vrši se dopuna signala nulama do dužine N i na taj način se formira sekvenca $\overline{x}^N\left(n\right)$. Vrijednosti DFT su jednake vrijednostima odmjeraka u N tačaka spektra signala $\hat{x}\left(n\right)$ koji smo izračunali preko DTFT:

$$X\left(k\right)=\text{DFT}_\text{N}\left\{\overline{x}^L\left(n\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\lambda}\right)P_L\left(e^{j\left(\omega-\lambda\right)}\right)d\lambda\Bigg|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}\ ,\ k=0,1,\ldots N-1\,. \tag{8.6}$$

Dakle, koristeći DFT smo u mogućnosti da procijenimo odmjerke spektra kontinualnog signala čija je gornja granična učestanost Ω_g, koja zavisi od odabrane frekvencije odmjeravanja.

Ako u kontinualnom signalu postoje frekvencijske komponente na učestanostima većim od Ω_g, one se uklanjaju niskopropusnim filtrom u analognom domenu. Pored toga, zbog množenja signala u domenu diskretnog vremena sa prozorskom sekvencom, postoji beskonačno mnogo različitih signala $x(n)$ koji su na intervalu $[0, L-1]$ jednaki signalu $\hat{x}(n)$. Stoga spektar signala $\hat{x}(n)$ možemo posmatrati samo kao procjenu spektra signala $x(n)$. U cilju bolje procjene spektra mogu se koristiti prozorske sekvence drugačijih oblika od pravougaonog, o čemu će kasnije biti više riječi.

8.2 Rekonstrukcija spektra signala iz DFT

Pokazali smo da su odmjerci spektra signala konačnog trajanja *L* izračunati preko DFT u N tačaka jednaki DTFS njegovog periodičnog proširenja sa periodom N, ako je $N \geq L$. Posmatrajmo sada isječak signala $x(n)$, ili bilo koji drugi signal konačnog trajanja *L*, koji ćemo označiti sa $\overline{x}^L(n)$, i dopunimo ga elementima nultih vrijednosti van poznatog intervala širine *L*, sve do beskonačnosti. Spektar tako formiranog neperiodičnog signala $\hat{x}(n)$ je kontinualan i definisan preko DTFT. Postavlja se pitanje da li je moguće rekonstruisati spektar signala $\hat{x}(n)$ iz odmjeraka njegovog spektra, tj. iz DFT u $N \geq L$ tačaka signala $\overline{x}^L(n)$ konačnog trajanja. Odgovor je jednostavan: ako je inverznom DFT moguće rekonstruisati originalni signal $\overline{x}^L(n)$ iz njegove DFT, onda je jednostavno izračunati i DTFT tog signala dopunjenog nulama do beskonačnosti, tj. $\hat{x}(n)$.

Rekonstrukcija spektra signala $\hat{x}(n)$ moguća je i direktno u frekvencijskom domenu. Koristeći IDFT$\{X(k)\}$ u N tačaka za zapis $\overline{x}^L(n)$, možemo pisati:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} \overline{x}^L(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] \cdot e^{-j\omega n}, \tag{8.7}$$

što nakon promjene redoslijeda sumiranja daje:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)n} \right]. \tag{8.8}$$

U (8.7) granice sumiranja sa $[0, L-1]$ smo mogli proširiti na $[0, N-1]$ jer se prilikom predstavljanja signala $\overline{x}^L(n)$ preko njegove inverzne DFT u N tačaka dobijaju nulte vrijednosti signala $\overline{x}^L(n)$ za $n = L, L+1, \ldots, N-1$. Izraz (8.8) za rekonstrukciju spektra nalaže da se interpolaciona funkcija:

$$P_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}, \tag{8.9}$$

koja po obliku podsjeća na sinc funkciju, pomnožena sa vrijednošću odgovarajuće komponente DFT $\hat{X}(k)$, pomjeri na mjesto svake komponente DFT, te se izvrši sabiranje svih pomjerenih interpolacionih funkcija:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) P_N\left(e^{j\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)} \right). \tag{8.10}$$

Sa (8.10) je dat izraz za idealnu rekonstrukciju spektra $\hat{X}(e^{j\omega})$ na osnovu poznate DFT posmatranog signala $\hat{x}(n)$. Primjetimo da je interpolaciona funkcija $P_N(e^{j\omega})$ DTFT pravougaone prozorske sekvence $p_N(n)$ oblika:

$$p_N(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots N-1, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{8.11}$$

Vidimo da je iz DFT signala konačnog trajanja moguće rekonstruisati njegov spektar $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$, ali ne treba izgubiti iz vida da je spektar $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$ signala $\hat{x}(n)$ samo približan oblik spektra $X\left(e^{j\omega}\right)$ signala $x(n)$.

8.3 Curenje spektra

Pretpostavimo da pomoću DFT u N tačaka želimo da procijenimo spektar diskretnog sinusnog signala:

$$x(n) = \cos \omega_1 n, \tag{8.12}$$

beskonačnog trajanja na osnovu jednog njegovog isječka konačne dužine L. Za početak pretpostavimo da je $L = N$ i da je digitalna učestanost kosinusoide takva da se trajanje signala $\overline{x}^L(n)$ poklapa sa cjelobrojnim umnoškom perioda kosinusoide, kao na Slici 8.2(a), što će se desiti ako je $\omega_1 = 2l\pi/N$, l cio broj. Budući da je $L = N$, nema potrebe za dopunjavanjem nulama prije računanja DFT, te je:

$$\overline{x}^N(n) = \cos \omega_1 n,\ \omega_1 = l\frac{2\pi}{N},\ n = 0,1,\ldots,N-1. \tag{8.13}$$

Prilikom računanja DFT, zbog diskretizacije u frekvencijskom domenu, dolazi do periodičnog proširenja signala u vremenskom domenu. Zbog toga što je trajanje, L, signala $\overline{x}^L(n)$ jednako cjelobrojnom umnošku njegovog perioda, njegovim periodičnim proširivanjem sa periodom $N = L$ generišemo diskretnu kosinusoidu $\tilde{x}^N(n)$ iste učestanosti kao signal $\overline{x}^L(n)$, ali sa beskonačnim trajanjem, kao na Slici 8.2(b). U ovom specijalnom slučaju vrijedi da je:

$$\tilde{x}^N(n) = x(n). \tag{8.14}$$

Podsjetimo se da postoji sljedeća veza DFT u N tačaka signala konačnog trajanja $\overline{x}^L(n)$, $L \leq N$ i DTFS njegovog periodičnog proširenja $\tilde{x}^N(n)$:

$$X(k) = N \cdot c_k \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{8.15}$$

zbog koje DFT možemo koristiti za predstavu spektra periodičnih signala (spektar periodičnih signala smo definisali preko koeficijenata DTFS).

Odredimo prvo DTFS signala $\tilde{x}^N(n) = \cos\omega_1 n,\ \omega_1 = l\frac{2\pi}{N}$ beskonačnog trajanja. Iz Ojlerovog obrasca:

$$\tilde{x}^N(n) = \frac{e^{jl\frac{2\pi}{N}n} + e^{-jl\frac{2\pi}{N}n}}{2} = \frac{e^{jl\frac{2\pi}{N}n} + e^{j(N-l)\frac{2\pi}{N}n}}{2} \tag{8.16}$$

zaključujemo da za predstavu diskretne kosinusoide preko DTFS trebamo samo dva elementarna eksponencijalna signala čije su učestanosti jednake $l\frac{2\pi}{N}$ i $(N-l)\frac{2\pi}{N}$. Zbog toga su vrijednosti koeficijenata c_k DTFS:

$$\tilde{x}^N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{8.17}$$

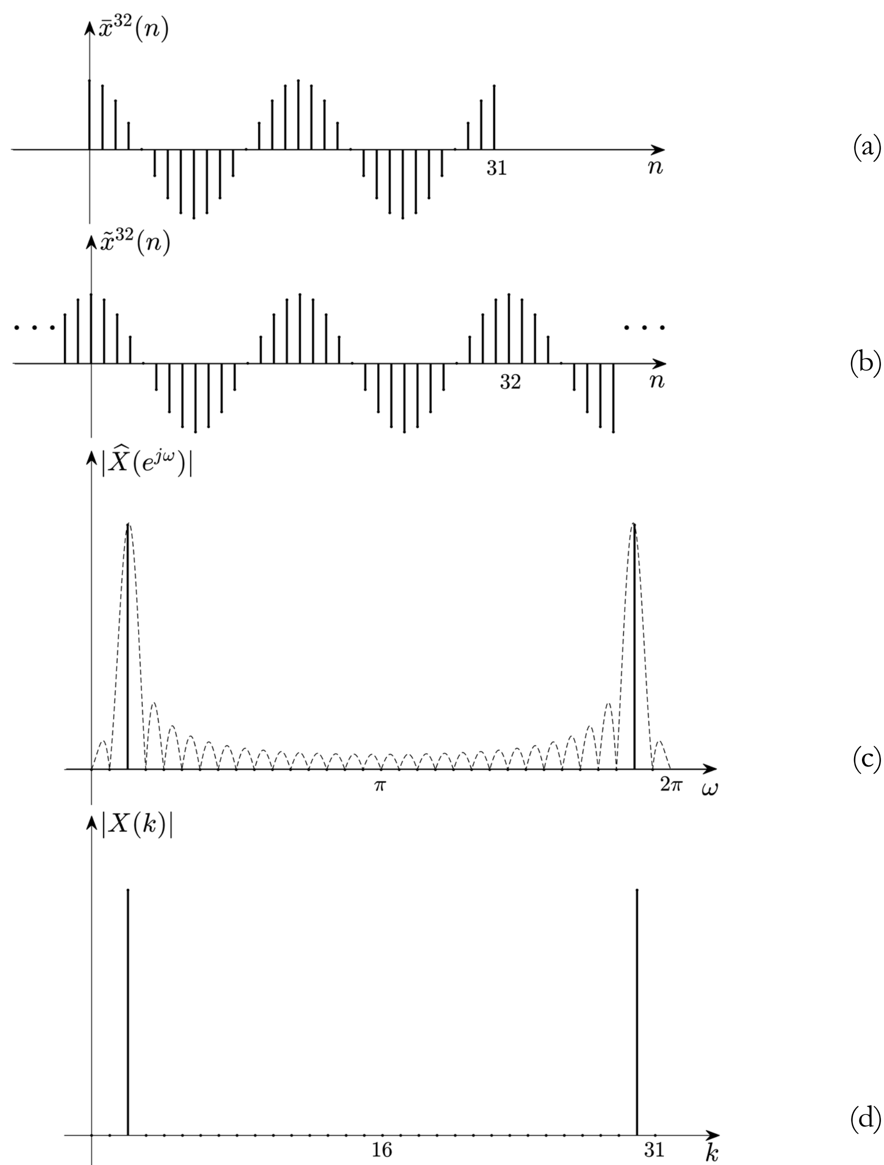
date sa:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = l \wedge k = N-l, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{8.18}$$

Na osnovu $X(k) = N \cdot c_k \quad k = 0,1,\ldots,N-1$,(8.15), DFT signala $\overline{x}^N(n)$ je:

$$X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = l \wedge k = N-l, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{8.19}$$

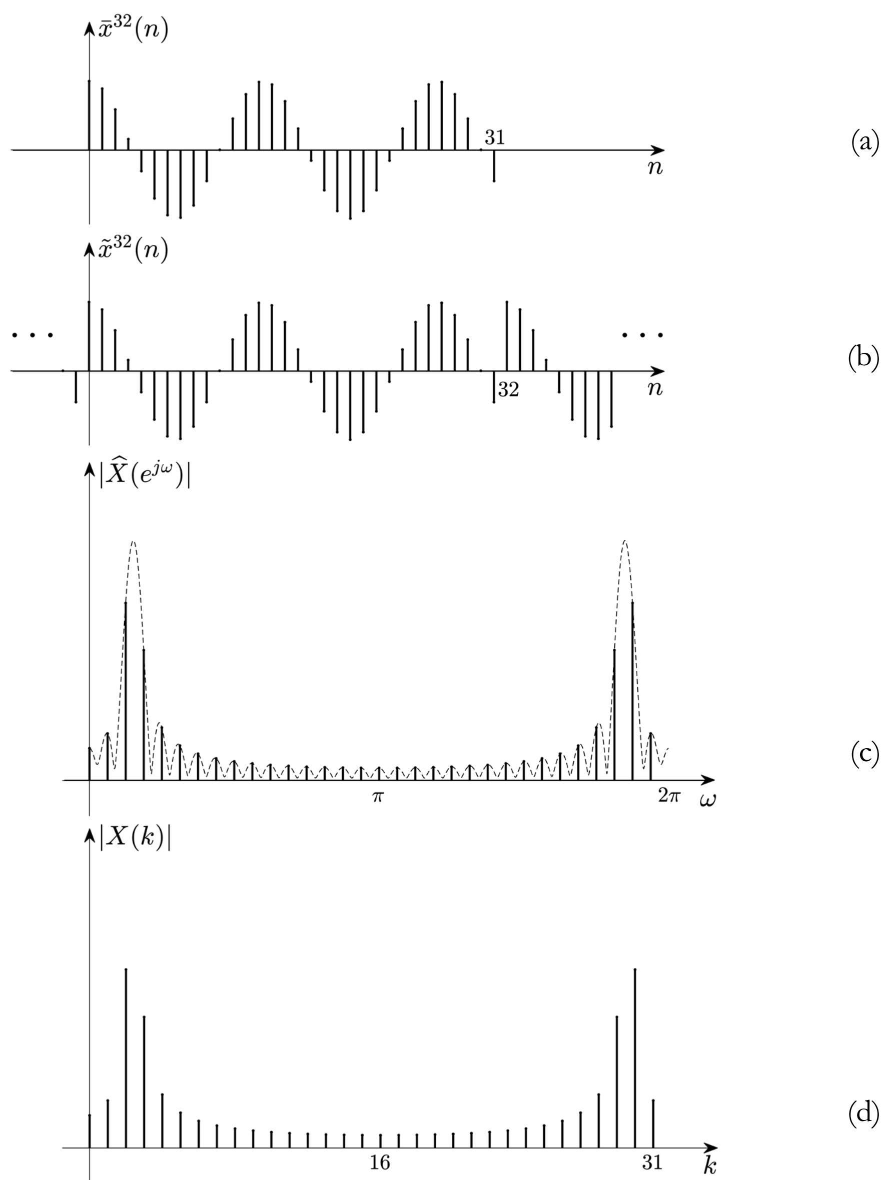
Normalizovani amplitudni spektar posmatranog isječka signala dopunjenog elementima nultih vrijednosti do beskonačnosti $\hat{x}(n) = x(n) \cdot p_N(n)$ prikazan je na Slici 8.2(c) crtkanom linijom.



Slika 8.2 Curenje spektra: (a) Isječak kosinusoide učestanosti $2\cdot 2\pi/32$ i trajanja $L=32$; (b) periodično proširen signal $\bar{x}^{32}(n)$ sa periodom $N=32$; (c) amplitudni spektar (crtkana linija) i odmjerci amplitudnog spektra (puna linija) signala $\hat{x}^{32}(n)$ i (d) $\mathrm{DFT}_{32}\left\{\bar{x}^{32}(n)\right\}$.

Signal je u vremenskom domenu realan, pa je njegov amplituduni spektar cirkularno paran. Odmjeravanjem spektra (pune linije na Slici 8.2(c)) dobijamo samo dvije komponente DFT koje su različite od nule, za $k=l$ i $k=N-l$ i koje odgovaraju digitalnim učestanostima $\omega = l\frac{2\pi}{N}$ i $\omega = (N-l)\frac{2\pi}{N}$. Budući da je pri periodičnom proširenju signala konačnog trajanja nastao signal $\tilde{x}^N(n)$ koji je jednak signalu $x(n)$, traženi spektar signala $x(n)$ je jednak spektru signala $\tilde{x}^N(n)$, tj. njegovim koeficijentima DTFS, odnosno normalizovanoj DFT signala $\overline{x}^N(n)$ računatoj u N tačaka, prikazanoj na Slici 8.2(d).

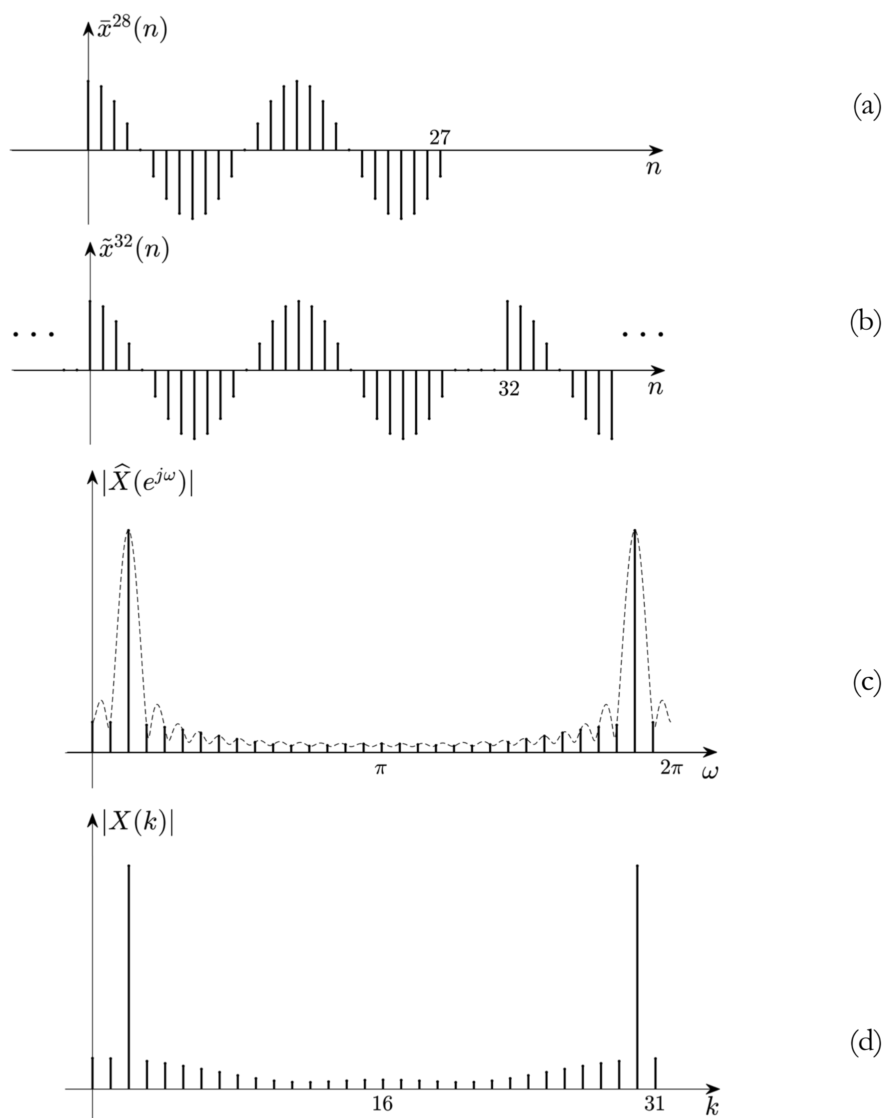
Neka je sada učestanost kosinusoide posmatranog signala takva da se trajanje isječka L tog signala ne poklapa sa cjelobrojnim umnoškom perioda kosinusoide, kao na Slici 8.3(a). Signal $\tilde{x}^N(n)$ koji nastaje periodičnim proširivanjem signala konačnog trajanja $\overline{x}^N(n)$ više nije jednak signalu $x(n)$, kao što se vidi na Slici 8.3(b), pa nisu jednaki ni njihovi spektri. Stoga je spektar signala $\tilde{x}^N(n)$ dat na Slici 8.3(d), koji možemo odrediti pomoću DFT signala $\overline{x}^N(n)$ samo približan oblik spektra signala $x(n)$ na osnovu konačnog broja njegovih elemenata. Periodično proširenje $\tilde{x}^N(n)$ nije više prostoperiodičan signal kao u prethodnoj analizi, pa se u njegovom spektru javljaju i druge komponente osim onih za $k=l$ i $k=N-l$. Ova pojava raspršivanja energije signala preko spektralnih komponenti se naziva *curenje spektra*.



Slika 8.3 Curenje spektra: (a) Isječak kosinusoide učestanosti $2,4\cdot 2\pi/32$ i trajanja $L=32$; (b) periodično proširen signal $\overline{x}^{32}(n)$ sa periodom $N=32$; (c) amplitudni spektar (crtkana linija) i odmjerci amplitudnog spektra (puna linija) signala $\hat{x}^{32}(n)$ i (d) $\mathrm{DFT}_{32}\left\{\overline{x}^{32}(n)\right\}$.

Ako je trajanje L posmatrane konačne sekvence $\overline{x}^L(n)$ koja nam služi za određivanje spektra kosinusoide $x(n)$ manje od broja tačaka N u kojima se računa DFT, kao na Slici 8.4(a), pri periodičnom proširivanju sa periodom $N > L$, neovisno o učestanosti signala $x(n)$, dobijeni periodičan signal $\tilde{x}^N(n)$ prikazan na Slici 8.4(b) nije prostoperiodičan, jer je prije periodičnog proširenja signal $\overline{x}^L(n)$ dopunjen nultim vrijednostima do dužine N. Stoga i u ovom slučaju spektar signala $\tilde{x}^N(n)$ curi preko svih komponenti DFT, kao na Slici 8.4(d). Iako se radi o signalu koji je jednak vrijednostima diskretne kosinusoide na posmatranom periodu, čak i kada se učestanost tog signala poklapa sa jednom od učestanosti na kojima se računa DFT, njegova spektralna predstava preko DFT je različita od spektralne predstave kosinusoide, što je posljedica dopunjavanja nulama pri računanju DFT u većem broju tačaka nego što je trajanje signala.

Curenje spektra se neće javiti samo kada je signal $\tilde{x}^N(n)$ prostoperiodičan. Periodično proširenje $\tilde{x}^N(n)$ isječka $\overline{x}^L(n)$ prostoperiodičnog signala $x(n)$ je prostoperiodično samo u slučaju kada je trajanje signala $\overline{x}^L(n)$ jednako cjelobrojnom umnošku osnovnog perioda signala $x(n)$ i kada se periodično proširenje radi sa periodom koji je jednak cjelobrojnom umnošku osnovnog perioda signala $x(n)$ i bez dopune signala $\overline{x}^L(n)$ nultim vrijednostima do dužine N. Zbog dodatnog ograničenja $N \geq L$ vezanog za računanje DFT slijedi da mora biti $N = L$. Da bi trajanje L signala $\overline{x}^L(n)$ bilo jednako cjelobrojnom umnošku osnovnog perioda signala ugaona učestanost signala mora biti cjelobrojan umnožak osnovne učestanosti $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$, što nas, uz već navedeni uslov da je $N = L$, dovodi do zaključka da curenja spektra neće biti ako se učestanost signala $x(n)$ poklapa sa nekom od učestanosti $\omega_k = k\frac{2\pi}{N},\ k = 0,1,\ldots,N-1$ na kojima se računa DFT.



Slika 8.4 Curenje spektra: (a) Isječak kosinusoide učestanosti $2 \cdot 2\pi/32$ i trajanja $L = 28$; (b) periodično proširen signal $\overline{x}^{28}(n)$ uz dopunu nulama sa periodom $N = 32$; (c) amplitudni spektar (crtkana linija) i odmjerci amplitudnog spektra (puna linija) signala $\hat{x}^{32}(n)$ i (d) $\text{DFT}_{32}\left\{\overline{x}^{32}(n)\right\}$.

Dakle, ako se DFT računa u istom broju tačaka koliko iznosi trajanje signala i ako se pri tome učestanost signala poklapa sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT nema curenja spektra i normalizovana DFT signala $\bar{x}^N(n)$ je jednaka traženom spektru kosinusoide $x(n)$. U svim drugim slučajevima periodično proširenje $\tilde{x}^N(n)$ signala je složenoperiodičan signal i javlja se curenje spektra, pa je spektar izračunat pomoću DFT na osnovu isječka $\bar{x}^L(n)$ samo približan oblik spektra signala $x(n)$. U signalu $\tilde{x}^N(n)$ se uočavaju nagli prelazi zbog prekida kosinusoide prije navršavanja pune periode, što u spektru dobijenog složenoperiodičnog proširenja $\tilde{x}^N(n)$ rezultuje pojavljivanjem visokofrekvencijskih komponenti. To nas navodi na ideju da se curenje spektra donekle može ublažiti izborom prozorske sekvence drugačijeg oblika od pravougaonog koja bi umanjila uticaj ovih naglih prelaza u vremenskom domenu na spektar signala.

Zadatak frekvencijske analize u praktičnim primjenama je određivanje spektra signala njegovim posmatranjem u konačnom vremenskom intervalu. Čak i u najjednostavnijem slučaju, kada se radi o prostoperiodičnim signalima, frekvencija signala nije poznata, već je predmet analize, te se ne može podesiti dužina trajanja snimanja signala i broj tačaka DFT da bi se izbjeglo curenje spektra. Iako se može primijetiti da na slikama 8.3(d) i 8.4(d) dominiraju komponente DFT koje su bliske učestanostima signala $x(n)$, zbog curenja spektra nije moguće tačno odrediti vrijednosti spektra signala $x(n)$.

Do sada smo curenje spektra kod sinusnih signala objašnjavali posmatranjem spektra periodičnog proširenja kosinusoide konačnog trajanja, datog preko DTFS. Budući da je curenje spektra posljedica ograničavanja trajanja signala u vremenskom domenu, posmatrajmo sada istu pojavu sa stanovišta množenja signala beskonačnog trajanja prozorskim signalima, što će nam omogućiti da izvedemo dodatne zaključke o pojavi curenja spektra. Pretpostavimo da je signal konačnog trajanja jednak isječku sinusnog signala $x(n)$ učestanosti ω_1:

$$\bar{x}^L(n) = 2\cos\omega_1 n = e^{j\omega_1 n} + e^{-j\omega_1 n},\ n = 0,1,2,...,L-1. \qquad (8.20)$$

Za $n=0,1,2,...,L-1$ signal $\overline{x}^L(n)$ je jednak signalu $\hat{x}(n)$, odnosno proizvodu signala $x(n)$ čiju frekvencijsku analizu radimo i pravougaone prozorske sekvence $p_L(n)$.

Spektar signala $\hat{x}(n)$ je dat preko njegove DTFT:

$$\begin{aligned}\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)&=\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{j\omega_1 n}+e^{-j\omega_1 n}\right)\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j(\omega-\omega_1)L}}{1-e^{-j(\omega-\omega_1)}}+\frac{1-e^{-j(\omega+\omega_1)L}}{1-e^{-j(\omega+\omega_1)}}=\\&=\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega-\omega_1)}+\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega+\omega_1)},\end{aligned} \tag{8.21}$$

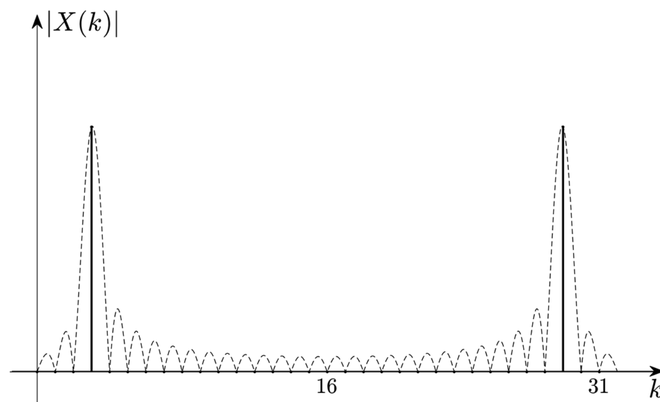
što odgovara spektru prozorske sekvence $p_L(n)$:

$$P_L\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{L-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(L-1)/2}, \tag{8.22}$$

pomjerenom na učestanosti $\pm\omega_1$ (odnosno ω_1 i $2\pi-\omega_1$ posmatrano na osnovnom periodu spektra od 0 do 2π).

Isto se može dobiti koristeći osobinu množenja u vremenskom domenu kod DTFT, koja kaže da množenju signala u domenu diskretnog vremena odgovara periodična konvolucija u domenu digitalnih učestanosti. Prema tome je spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$ periodična konvolucija spektra signala $x(n)$ i spektra prozorske sekvence, dakle spektar prozorske sekvence pomjeren za $\pm\omega_1$.

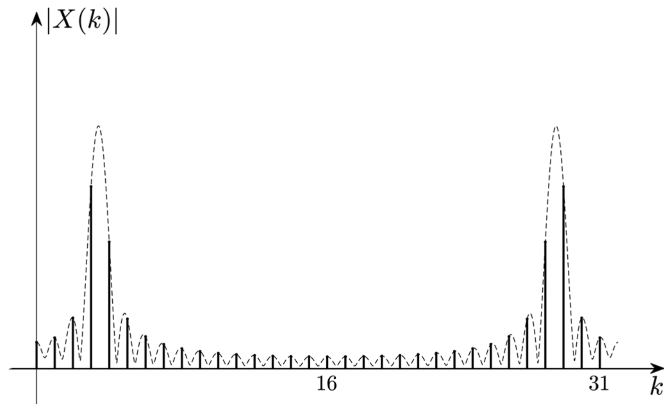
DFT u *N* tačaka signala $\overline{x}^L(n)$, za $N\geq L$, se dobija odmjeravanjem spektra $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$ sa frekvencijskim razmakom od $2\pi/N$, dok se nule u spektru posmatranog signala javljaju sa frekvencijskim razmakom od $2\pi/L$. Ako se učestanost ω_1 poklapa sa nekom od učestanosti $2k\pi/N, k=0,1,2,...,N-1$ na kojima se uzimaju odmjerci spektra, i ako je frekvencijski razmak pri uzimanju odmjeraka spektra jednak frekvencijskom razmaku nula u spektru signala,



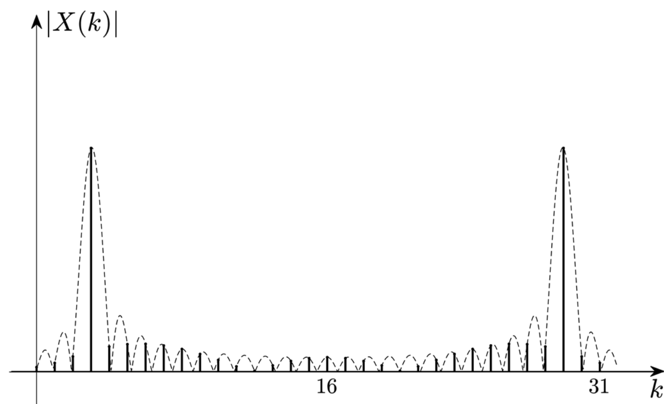
Slika 8.5 DFT prostoperiodičnog signala $\overline{x}^L(n)$ konačnog trajanja $L=32$ (puna linija) i amplitudni spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$ (crtkana linija) kada je učestanost signala $x(n)$, $\omega_1=3\cdot 2\pi/32$, jednaka jednoj od učestanosti na kojima se računa DFT u $N=32$ tačke.

$P_L\left(e^{j\omega}\right)$, tj. ako je $N=L$, kao na Slici 8.5, sve komponente DFT osim one na učestanosti ω_1 i $2\pi-\omega_1$ će biti jednake nuli. U opštem slučaju, kada se učestanost ω_1 ne poklapa ni sa jednom od učestanosti $2k\pi/N$, $k=0,1,2,...,N-1$, bilo koja komponenta DFT može biti različita od nule, kao što je ilustrovano na Slici 8.6. Slično se dešava kada frekvencijski razmak nula u spektru prozorske sekvence nije jednak frekvencijskom razmaku pri uzimanju odmjeraka spektra ($N\neq L$), kao na Slici 8.7, neovisno o tome da li se učestanost signala poklapa ili ne sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT.

Objašnjavanjem pojave curenja spektra na ovaj način, preko množenja signala beskonačnog trajanja prozorskim signalom, došli smo do istih uslova koje je potrebno ispuniti da ne dođe do curenja spektra kao u prethodnom razmatranju, kad smo posmatrali spektar periodičnog proširenja signala. Posmatrano sada sa frekvencijskog stanovišta zaključujemo da je curenje spektra posljedica nepoklapanja učestanosti signala sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT i/ili broja tačaka u kojima se računa DFT sa trajanjem signala.



Slika 8.6 DFT prostoperiodičnog signala $\overline{x}^{L}(n)$ konačnog trajanja $L=32$ (puna linija) i amplitudni spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$ (crtkana linija) kada učestanost signala $x(n)$, $\omega_1=3{,}4\cdot 2\pi/32$, nije jednaka niti jednoj od učestanosti na kojima se računa DFT u $N=32$ tačke.



Slika 8.7 DFT prostoperiodičnog signala $\overline{x}^{L}(n)$ konačnog trajanja $L=28$ (puna linija) i amplitudni spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$ (crtkana linija) kada je učestanost signala $x(n)$, $\omega_1=3\cdot 2\pi/32$, jednaka jednoj od učestanosti na kojima se računa DFT u $N=32\neq L$ tačke.

8.4 Frekvencijska selektivnost DFT

Do sada smo posmatrali frekvencijsku analizu prostoperiodičnih signala primjenom DFT. Međutim, diskretni signal $x(n)$ uglavnom sadrži mnoštvo elementarnih prostoperiodičnih signala različitih učestanosti, a zadatak frekvencijske analize je da odredi spektralni sadržaj tog signala. Za sada posmatrajmo determinističke signale, tj. signale čije su vrijednosti u svakom trenutku jednoznačno određene analitičkim izrazom ili na neki drugi način. Prepostavićemo da su posmatrani signali stacionarni, tj. da se njihov spektar ne mijenja u toku vremena. Ako na raspolaganju imamo samo isječak $\overline{x}^L(n)$ konačnog trajanja L signala $x(n)$, vidjeli smo da amplitudni i fazni spektar signala $x(n)$ možemo procijeniti na osnovu DTFT signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$:

$$\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{L-1}\hat{x}(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}\overline{x}^L(n)e^{-j\omega n} \tag{8.23}$$

koja je izračunata u konačnom broju tačaka preko DFT:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\overline{x}^L(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\ . \tag{8.24}$$

jer iz odmjeraka spektra signala možemo rekonstruisati njegov kontinualni spektar, ako pri računanju DFT koristimo $N\geq L$.

Pretpostavimo sada da signal $x(n)$ sadrži dvije prostoperiodične komponente učestanosti ω_1 i ω_2, tako da njegov isječak konačnog trajanja ima oblik:

$$\overline{x}^L(n)=2\cos\omega_1 n+2\cos\omega_2 n,\ \ n=0,1,2,...,L-1\,. \tag{8.25}$$

Frekvencijska analiza signala sastavljenih od dvije frekvencijske komponente koju ćemo sada provesti se lako može uopštiti na signale koji sadrže više frekvencijskih komponenti različitih učestanosti.

Spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_L(n)$ iskazan preko DTFT je dat sa:

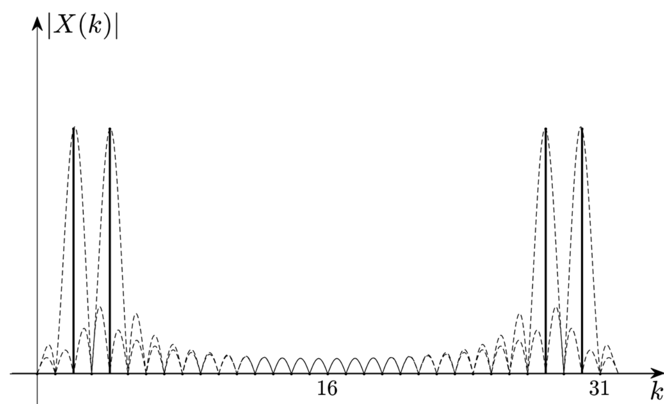
$$\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{j\omega_1 n}+e^{-j\omega_1 n}\right)\cdot e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{j\omega_2 n}+e^{-j\omega_2 n}\right)\cdot e^{-j\omega n}\,, \tag{8.26}$$

odnosno:

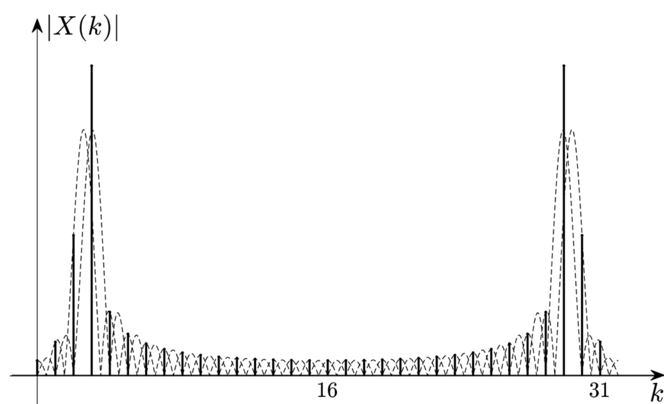
$$\begin{aligned}\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=&\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega-\omega_1)}+\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_2)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega-\omega_2)}+\\&+\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega+\omega_1)}+\frac{\sin\frac{L}{2}(\omega+\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_2)}e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega+\omega_2)},\end{aligned} \tag{8.27}$$

što je zbir spektara prozorske sekvence pomjerenih na učestanosti ω_1 i ω_2, te na $2\pi-\omega_1$ i $2\pi-\omega_2$. U opštem slučaju, kada se učestanosti ω_1 i ω_2 ne poklapaju ni sa jednom od učestanosti $2k\pi/N, k=0,1,2,...,N-1$ na kojima se uzimaju odmjerci spektra, bilo koja komponenta DFT može biti različita od nule i svaka od komponenti DFT je jednaka zbiru odmjeraka oba pomjerena spektra prozorske sekvence.

Primjeri frekvencijske analize signala koji sadrže dvije frekvencijske komponente prikazani su na slikama 8.8 i 8.9. U primjeru na Slici 8.8 ne dolazi do curenja spektra i spektar signala $x(n)$ je tačno određen primjenom DFT nad isječkom tog signala. Samo u slučaju kada je broj tačaka N u kojima se računa DFT jednak trajanju signala L, frekvencijski razmak spektralnih komponenti $2\pi/N$ jednak frekvencijskom razmaku nula u spektru prozorske sekvence $2\pi/L$ (širina bočnih lukova spektra prozorske sekvence) i kada se obe učestanosti signala ω_1 i ω_2 poklapaju sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT $2k\pi/N, k=0,1,2,...,N-1$, nema curenja spektra. Tada se javljaju samo dvije komponente DFT kao odmjerci spektra signala konačnog trajanja koje su jednake DTFS signala $x(n)$. Na Slici 8.9 je prikazan slučaj kad dolazi do curenja spektra, tako da ni frekvencije frekvencijskih komponenti niti vrijednosti spektra signala $x(n)$ ne mogu tačno da se odrede iz DFT isječka tog signala. Dakle, DFT isječka signala daje samo procjenu spektra tog signala.



Slika 8.8 DFT prostoperiodičnog signala $\overline{x}^{L}(n)$ konačnog trajanja $L=32$ (puna linija) i amplitudni spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_{L}(n)$ (crtkana linija) kada su učestanosti signala $x(n)$ jednake $\omega_1=2\cdot 2\pi/32$ i $\omega_2=4\cdot 2\pi/32$, a broj tačaka DFT $N=32$.



Slika 8.9 DFT prostoperiodičnog signala $\overline{x}^{L}(n)$ konačnog trajanja $L=32$ (puna linija) i amplitudni spektar signala $\hat{x}(n)=x(n)\cdot p_{L}(n)$ (crtkana linija) kada su učestanosti signala $x(n)$ jednake $\omega_1=2{,}5\cdot 2\pi/32$ i $\omega_2=3\cdot 2\pi/32$, a broj tačaka DFT $N=32$.

Za slučaj složenoperiodičnog signala koji u sebi sadrži konačan broj frekvencijskih komponenti različitih učestanosti, samo u slučaju da se svaka od tih učestanosti poklapa sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT, i ako je trajanje isječka tog signala koji se analizira jednako broju tačaka u kojima se računa DFT, komponente DFT će biti jednake spektru složenoperiodičnog signala koji se posmatra.

Uzimajući da je broj tačaka u kojima računamo DFT jednak trajanju signala osiguravamo da je frekvencijski razmak DFT komponenti jednak frekvencijskom razmaku nula u spektru prozorskog signala konačnog trajanja kojim se množi analizirani signal pri kreiranju isječka signala konačnog trajanja. U spektru signala se na mjestu svake učestanosti analiziranog signala ponavlja spektar prozorske sekvence. Ako se pri tome svaka od učestanosti signala poklapa sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT, odmjerci spektra se nalaze na učestanostima posmatranog signala i na mjestima gdje se nalaze nule pomjerenih spektara prozorskih sekvenci.

Pri praktičnoj analizi spektra diskretnog signala cilj nam je da na osnovu DFT isječka signala odredimo da li posmatrani signal u sebi sadrži određene frekvencijske komponente ili ne, te kolike su njihove amplitude i faze. Ako signal u sebi sadrži određenu frekvencijsku komponentu, i ako se učestanost te komponente poklapa sa nekom od učestanosti na kojima se računa DFT u istom broju tačaka koliko je trajanje isječka signala, u spektru signala konačnog trajanja će se pojaviti željena DFT komponenta na osnovu koje se tačno može odrediti amplituda i faza te frekvencijske komponente posmatranog signala. Međutim, ako je neka frekvencijska komponenta sadržana u posmatranom signalu ali se njena učestanost ne poklapa ni sa jednom od učestanosti na kojima se računa DFT, energija te frekvencijske komponente će se raspršiti preko svih DFT komponenti, te njena amplituda i faza ne mogu biti tačno određene. Najgori slučaj nastupa kada je učestanost neke od frekvencijskih komponenti signala jednaka učestanosti koja se nalazi na sredini između dvije komponente DFT. Njen uticaj na obje komponente DFT koji se nalaze lijevo i desno od učestanosti te frekvencijske komponente signala je podjednak i to veći što je širi glavni luk (razmak između dvije nule najbliže ishodištu) u spektru prozorske sekvence. Osim što amplituda tražene komponente ne može biti tačno određena, ona će

biti teže prepoznatljiva u spektru i uticaće i na vrijednosti komponenti DFT koje odgovaraju drugim frekvencijskim komponentama posmatranog signala.

Rezoluciju u frekvenciji definišemo kao razmak bliskih frekvencijskih komponenti koje je moguće razaznati u spektru signala. Pošto je širina glavnog luka spektra prozorske sekvence dvostruko veća od frekvencijskog razmaka DFT komponenti, ako signal sadrži dvije frekvencijske komponente različitih učestanosti ω_1 i ω_2 i ako je razlika tih učestanosti manja od širine glavnog luka, doći će do preklapanja glavnih lukova spektara prozorskih sekvenci, te će vrijednosti DFT u oblasti preklapanja značajno zavisiti od obe frekvencijske komponente učestanosti ω_1 i ω_2. Maksimalna rezolucija u frekvenciji, tj. najmanji razmak bliskih frekvencijskih komponenti koje je moguće razaznati u spektru signala, je jednaka polovini širine glavnog luka spektra prozorske sekvence. *Frekvencijska selektivnost DFT* se definiše kao sposobnost razdvajanja prostoperiodičnih komponenti signala na osnovu komponenti DFT. Bolja frekvencijska selektivnost, odnosno veća mogućnost prepoznavanja frekvencijskih komponenti analiziranog signala čije su učestanosti bliske jedna drugoj se postiže povećanjem trajanja isječka signala u vremenu. Povećanje trajanja prozorske sekvence dovodi do sužavanja njenog spektra, a samim tim i manjeg uticaja na preklapanje pomjerenih spektara prozorske sekvence. Međutim, samo povećanje broja tačaka u kojima se računa DFT, što odgovara dopunjavanju signala nultim vrijednostima, a ne uzimanju većeg isječka signala, prikazuje više detalja prilikom vizualizacije spektra, ali ne dovodi neminovno do poboljšanja pri određivanju vrijednosti spektra i bolje rezolucije u frekvenciji. Pri tome, nagle promjene koje se unose u signal pri dopunjavanju nulama mogu da utiču na veće curenje spektra. Najbolji način za povećanje rezolucije u frekvenciji je povećanje dužine isječka signala koji se analizira, ali je njegovo trajanje često ograničeno konkretnom primjenom.

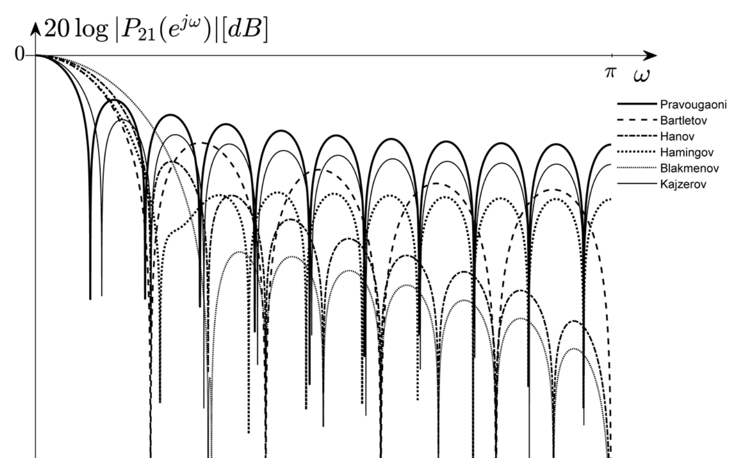
8.5 Prozorske sekvence

Poboljšanje procjene spektra signala se donekle može postići primjenom prozorskih sekvenci različitog oblika. Zbog naglog prekidanja signala usljed množenja pravougaonom prozorskom sekvencom dolazi do curenja spektra. Prilikom periodičnog proširenja javljaju se diskontinuiteti na krajevima perioda, što uzrokuje pojavu visokih učestanosti u spektru signala. Ako analizirani signal sadrži više frekvencijskih komponenti javlja se i preklapanje spektara prozorske sekvence koji se ponavljaju na učestanostima svih frekvencijskih komponenti koje signal sadrži. Da bi se ublažio uticaj visokofrekvencijskih komponenti i preklapanja pomjerenih spektara prozorskih sekvenci, umjesto pravougaone prozorske sekvence, koriste se razni oblici težinskih prozorskih sekvenci čiji je zadatak da umanje diskontinuitete na krajevima perioda i smanje preklapanje spektara prozorske sekvence. Prozorske sekvence sa blažim prelazima na krajevima ublažavaju diskontinuitete i curenje spektra. Takve prozorske sekvence imaju manje bočne lukove pa je i preklapanje u spektru manje, a samim tim i rezolucija u frekvenciji je bolja. Osim o bočnim lukovima, pri izboru prozorske sekvence koja se koristi za uobličavanje spektra treba voditi računa i o širini glavnog luka spektra prozorske sekvence, jer on utiče na frekvencijsku selektivnost DFT. Osim pravougaone, najčešće korištene prozorske sekvence su Bartletova (Maurice Stevenson Bartlett), Hanova (Julius Ferdinand von Hann), Hamingova (Richard Wesley Hamming), Blakmenova (Ralph Beebe Blackman) i Kajzerova (James Frederick Kaiser).

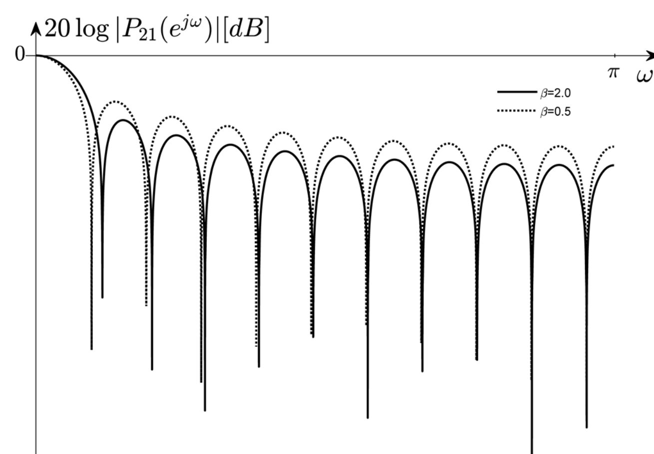
U Tabeli 8.1 su prikazani analitički izrazi za navedene prozorske sekvence, dok Slika 8.10 daje uporedni prikaz njihovih karakteristika u frekvencijskom domenu. Oblik Kajzerove prozorske sekvence se može podešavati izborom vrijednosti parametra β, kao što je prikazano na Slici 8.11. Za male vrijednosti ovog parametra Kajzerova prozorska sekvenca ima oblik sličan pravougaonoj prozorskoj sekvenci, a sa porastom vrijednosti parametra β približava se po obliku Hamingovoj sekvenci. Uticaj prozorskih sekvenci na procjenu spektra signala će biti detaljnije analiziran u sklopu spektralne analize slučajnih signala.

Tabela 8.1 Prozorske sekvence.

Naziv sekvence	Analitički izraz za $0 \le n < L$
pravougaona	$p_N(n) = 1$
Bartletova (trougaona)	$p_L(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{L-1}, & 0 \le n \le \dfrac{L-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{L-1}, & \dfrac{L-1}{2} \le n \le L-1 \end{cases}$
Hanova (podignuti kosinus)	$p_L(n) = 0.5 - 0.5\cos\dfrac{2\pi n}{L-1}$
Hamingova	$p_L(n) = 0.54 - 0.46\cos\dfrac{2\pi n}{L-1}$
Blakmenova	$p_L(n) = 0.42 - 0.5\cos\dfrac{2\pi n}{L-1} + 0.08\cos\dfrac{4\pi n}{L-1}$
Kajzerova	$p_L(n) = \dfrac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\left(1-\dfrac{2n}{L-1}\right)^2}\right]}{I_0(\beta)}$, $I_0(\cdot)$ - modifikovana Beselova sekvenca prve vrste



Slika 8.10 Krive pojačanja prozorskih sekvenci dužine 21.



Slika 8.11 Zavisnost krive pojačanja Kajzerovih prozorskih sekvenci dužine 21 od parametra β .

Glava 9

SLUČAJNI PROCESI

Signali koje smo razmatrali u prethodnim poglavljima bili su deterministički, što znači da smo ih mogli zapisati u analitičkom obliku ili, u slučaju signala konačne dužine, eksplicitno zadati vrijednostima njihovih elemenata. U praktičnim primjenama, kada analiziramo i obrađujemo signale iz nekog skupa, vrlo rijetko poznajemo tačan analitički izraz ili sve vrijednosti elemenata signala. Signali se grupišu u skupove na osnovu nekih zajedničkih osobina, pa je, u takvim prilikama, prihvatljivo skup signala okarakterisati statističkim osobinama. To podrazumijeva napuštanje domena determinističkih veličina i ulazak u svijet stohastičkih (slučajnih) procesa. Detaljan i rigorozan tretman slučajnih procesa je izvan okvira ove knjige. U ovom poglavlju ćemo razmotriti samo elementarne koncepte i ograničiti se na rad sa realnim diskretnim slučajnim procesima. Nakon kratkog pregleda teorije vjerovatnoće i osnovnih koncepata vezanih za slučajne procese, pažnju ćemo posvetiti procjeni *spektralne gustine snage* (eng. *Power Spectral Density* - PSD) slučajnih procesa neparametarskim i parametarskim metodama, dok ćemo se njihovom obradom više baviti u okviru poglavlja posvećenog digitalnim filtrima.

9.1 Slučajni procesi

Da bismo uspostavili koherentnu notaciju, počećemo kratkim pregledom elementarnih postulata teorije vjerovatnoće. Koncepte vezane za jednodimenzionalne slučajne promjenljive proširićemo na slučajne vektore i slučajne procese. Uvešćemo pojmove stacionarnosti i ergodičnosti slučajnih procesa. Kasnije ćemo spektralnu analizu ograničiti na tu klasu slučajnih procesa.

9.1.1 Slučajne promjenljive

Koncept slučajnih promjenljivih zasniva se na teoriji vjerovatnoće. Posmatrajmo eksperiment s konačnim ili beskonačnim brojem nepredvidivih *ishoda*, ξ_i, $i=1,2,\dots$, gdje je ishod jedan specifičan rezultat slučajnog eksperimenta. Skup svih mogućih ishoda $S=\{\xi_1,\xi_2,\dots\}$ naziva se *prostor ishoda* slučajnog eksperimenta. Bilo koji podskup od S predstavlja *događaj*. Na primjer, bacanje kocke je slučajni eksperiment sa prostorom ishoda $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Podskup $\{2,4,6\}$ od S opisuje događaj da je ishod bacanja kocke paran broj. Za događaj ćemo koristiti oznaku ω, a sa Ω ćemo označiti skup svih mogućih događaja. Nepredvidljivost događaja se mjeri vjerovatnoćama, koje označavamo sa $P(\cdot)$. *Vjerovatnoća događaja* je broj koji pokazuje koliko je vjerovatno da će se taj događaj desiti. Ona poprima vrijednosti između nule i jedan.Vjerovatnoća događaja koji se nikada ne može desiti u okviru posmatranog eksperimenta (*nemogućeg događaja*) je jednaka nuli, a vjerovatnoća događaja koji se sastoji od svih mogućih ishoda (*siguran događaj*) jednaka je jedinici.

U inženjerskoj praksi je teško raditi sa apstraktnim ili kvalitativnim događajima i njihovim vjerovatnoćama. Kako bi se omogućila kvantitativna analiza slučajnih pojava uvodi se koncept slučajne promjenljive. Slučajne promjenljive pridružuju numeričke vrijednosti slučajnim događajima, te tako omogućavaju primjenu matematičkih metoda i alata za njihovo proučavanje.

Jednodimenzionalna realna *slučajna promjenljiva* $X(\xi)$, kraće označena samo sa X, je preslikavanje koje dodjeljuje broj $x \in \mathbb{R}$ svakom ishodu $\xi \in S$. Striktno govoreći, slučajna varijabla niti je slučajna, niti je promjenljiva, već je preslikavanje apstraktnog skupa događaja u skup realnih brojeva, u kojem možemo vršiti matematičke operacije. Slučajna promjenljiva je diskretna ako x pripada skupu diskretnih vrijednosti $\{x_i, i = 1, 2, \ldots\}$, u suprotnom govorimo o kontinualnoj slučajnoj promjenljivoj, kod koje je skup vrijednosti neprebrojiv. Na primjer, kod bacanja kocke postoji samo šest različitih ishoda, pa je slučajna promjenljiva diskretna. Kao primjer kontinualne slučajne promjenljive možemo navesti vrijeme između dva otkucaja srca, kada slučajna promjenljiva može uzeti bilo koju vrijednost iz nekog vremenskog intervala.

Vjerovatnoća $P(\{X(\xi) \le x\})$ događaja $\omega \in \Omega$ je funkcija skupa ishoda $\{X(\xi) \le x\}$ koji čine taj događaj, ali istovremeno njena vrijednost varira sa promjenom broja x, te je možemo posmatrati i kao funkciju vrijednosti slučajne promjenljive i označiti sa $P(X \le x)$. Tu funkciju, koju nazivamo *kumulativna funkcija raspodjele* slučajne promjenljive X, označavamo sa $F_X(x)$, i definišemo sa:

$$F_X(x) = P(\{X(\xi) \le x\}) = P(X \le x). \tag{9.1}$$

Kumulativna funkcija raspodjele daje vjerovatnoću da slučajna promjenljiva X bude manja ili jednaka određenoj vrijednosti x. Za slučajne varijable, bilo da su diskretne ili kontinualne, kumulativna funkcija raspodjele raste od nula do jedan. Vrijedi da je $P(X = \infty) = 0$ i $P(X = -\infty) = 0$. Za diskretne slučajne varijable kumulativna funkcija raspodjele je stepenasta funkcija, jer se vjerovatnoće povećavaju samo u diskretnim tačkama, dok je za kontinualne slučajne varijable neprekidna funkcija.

Raspodjelu vjerovatnoće kod kontinualnih slučajnih promjenljivih opisujemo i *funkcijom gustine vjerovatnoće* i označavamo sa $f_X(x)$. Ona se definiše kao nenegativna funkcija na osnovu koje se vjerovatnoća da se slučajna promjenljiva X nalazi unutar određenog intervala $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, može izračunati kao:

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b f_X\left(x\right)dx\,. \tag{9.2}$$

Dakle, vjerovatnoća da se kontinualna slučajna promjenljiva nađe unutar nekog intervala izračunava se kao površina ispod krive funkcije gustine unutar tog intervala. Ukupna površina ispod krive funkcije gustine mora biti jednaka jedan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right)dx = P\left(-\infty < X < \infty\right) = 1\,. \tag{9.3}$$

Kumulativna funkcija raspodjele se sada može iskazati sa:

$$F_X\left(x\right) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f_X\left(\tau\right)d\tau\,, \tag{9.4}$$

a funkcija gustine kao prvi izvod kumulativne funkcije raspodjele:

$$f_X\left(x\right) = \frac{dF_X\left(x\right)}{dx}\,. \tag{9.5}$$

Funkcija gustine nije direktno vjerovatnoća, jer je vjerovatnoća da kontinualna slučajna promjenljiva X uzme tačno određenu vrijednost x_i jednaka nuli, $P\left(X = x_i\right) = 0$. Umjesto toga, funkcija gustine, $f_X\left(x\right)$, pokazuje gustinu vjerovatnoće po vrijednostima slučajne promjenljive. Velika vrijednosti $f_X\left(x\right)$ za određenu vrijednost x ukazuje na to da je velika vjerovatnoća da će slučajna varijabla poprimiti vrijednosti bliske x. Vjerovatnoća da se kontinualna slučajna promjenljiva nalazi u nekom malom intervalu širine Δx oko x se može dobiti množenjem $f_X\left(x\right)$ sa Δx:

$$f_X\left(x\right)\Delta x \approx F_X\left(x + \Delta x\right) - F_X\left(x\right) = P\left(x \le X \le x + \Delta x\right). \tag{9.6}$$

Za diskretne slučajne promjenljive raspodjela vjerovatnoće se opisuje *funkcijom mase* i označava sa $p\left(x_i\right)$. Ona daje vjerovatnoću da slučajna promjenljiva X uzme tačno određenu vrijednost x_i. Definiše se sa:

$$p\left(x_i\right) = P\left(X = x_i\right). \tag{9.7}$$

Vrijedi da je:

$$\sum_i p(x_i) = \sum_i P(X = x_i) = 1 . \tag{9.8}$$

Funkcija gustine u potpunosti opisuje slučajnu promjenljivu. U praksi je poželjno sažeti neke od aspekata funkcije gustine korištenjem nekoliko brojeva, koji predstavljaju statističke srednje vrijednosti ili momente. Njihove definicije se razlikuju ovisno o tome da li je slučajna promjenljiva kontinualna ili diskretna. Za razumijevanje je dovoljno poznavati definicije ovih koncepata za kontinualnu slučajnu promjenljivu. Zbog jednostavnosti izlaganja, samo ćemo kod srednje vrijednosti navesti definiciju i za diskretnu slučajnu promjenljivu, dok se ostale definicije za diskretne slučajne promjenljive dobiju na sličan način.

Očekivana (*srednja*) *vrijednost* slučajne promjenljive X se definiše sa:

$$\mu_X = E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & za\ X\ kontinualno, \\ \sum_i x_i\, p(x_i), & za\ X\ diskretno, \end{cases} \tag{9.9}$$

gdje operator $E[\cdot]$ označava statističko usrednjavanje i naziva se *matematičko očekivanje*.

Standardna devijacija je definisana sa:

$$\sigma_X = \sqrt{E\left[(X - \mu_X)^2\right]} . \tag{9.10}$$

Generalizacijom izraza za očekivanu vrijednost definišu se n*-ti moment*:

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx , \tag{9.11}$$

i *centralni* n*-ti moment* slučajne promjenljive X :

$$E\left[(X - \mu_x)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n f_X(x) dx . \tag{9.12}$$

U obradi signala veliku primjenu imaju drugi moment, tj. *srednja kvadratna vrijednost*:

$$\mu_{X^2} = E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X\left(x\right)dx\,, \tag{9.13}$$

i drugi centralni moment, koji je jednak kvadratu standardne devijacije i naziva se *varijansa*:

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X-\mu_x\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu_x\right)^2 f_X\left(x\right)dx\,. \tag{9.14}$$

Varijansa je mjera disperzije i predstavlja očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive od njene očekivane vrijednosti. Lako se pokaže da je:

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] = \mu_{X^2} - \mu_X^2\,. \tag{9.15}$$

Za dvije slučajne promjenljive X i Y definišu se *združena kumulativna funkcija raspodjele*:

$$F_{XY}\left(x,y\right) = P\left(X \le x, Y \le y\right), \tag{9.16}$$

i *združena funkcija gustine* $f_{XY}\left(x,y\right)$, za koju vrijedi da je:

$$f_{XY}\left(x,y\right) = \frac{\partial^2 F_{XY}\left(x,y\right)}{\partial x \partial y}, \tag{9.17}$$

kao i da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x,y\right)dxdy = 1\,. \tag{9.18}$$

Dvije slučajne promjenljive su *statistički nezavisne* ako pojavljivanje bilo koje vrijednosti jedne slučajne promjenljive ne utiče na pojavljivanje bilo koje vrijednosti druge slučajne promjenljive. Potreban i dovoljan uslov za statističku nezavisnost dvije slučajne promjenljive je:

$$f_{XY}\left(x,y\right) = f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right). \tag{9.19}$$

Za linearnu kombinaciju statistički nezavisnih slučajnih promjenljivih X_i, datu sa $X = \sum_i a_i X_i,\ a_i \in \mathbb{R}$, matematičko očekivanje se računa na osnovu:

$$E\left[X\right] = \sum_i a_i E\left[X_i\right], \tag{9.20}$$

dok se varijansa može iskazati na sljedeći način:

$$\sigma_X^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \ . \tag{9.21}$$

U teoriji vjerovatnoće i statistici, zajednička varijabilnost dvije slučajne promjenljive opisuje se *korelacijom*, definisanom preko matematičkog očekivanja proizvoda dvije slučajne promjenljive X i Y:

$$r_{XY} = E\left[XY\right]. \tag{9.22}$$

Centriranu korelaciju:

$$\sigma_{XY}^2 = E\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right], \tag{9.23}$$

nazivamo *kovarijansa*. Ako porastu ili padu jedne slučajne promjenljive odgovara porast ili pad, respektivno, i druge slučajne promjenljive, kovarijansa je pozitivna, dok je u suprotnom slučaju negativna. Kao mjera zavisnosti slučajnih promjenljivih koristi se *koeficijent korelacije*, koji je normalizovana verzija kovarijanse:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X \sigma_Y} \ . \tag{9.24}$$

Kažemo da su dvije slučajne promjenljive *nekorelisane* ako je:

$$r_{XY} = E\left[XY\right] = E\left[X\right]E\left[Y\right]. \tag{9.25}$$

Kovarijansa nekorelisanih slučajnih promjenljivih jednaka je nuli. Nezavisne slučajne promjenljive su nekorelisane, dok obrnuto ne mora da vrijedi.

9.1.2 Slučajni vektori i slučajni procesi

Neka je $\mathbf{X} = \left[X_0, X_1, \cdots, X_{N-1}\right]^{\mathrm{T}}$ vektor formiran od N slučajnih promjenljivih. *Kumulativna funkcija raspodjele slučajnog vektora* se definiše sa:

$$F_{\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{x}\right) = P\left(X_i \le x_i,\ i = 0,1,\ldots,N-1\right), \tag{9.26}$$

pri čemu je $\boldsymbol{x} = \left[x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$. Podrazumijevajući diferencijabilnost, *funkcija gustine slučajnog vektora* je data sa:

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^N}{\partial x_0 \partial x_1 \cdots \partial x_{N-1}} F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}). \tag{9.27}$$

Slučajne promjenljive iz skupa $\{X_0, X_1, \cdots, X_{N-1}\}$ su *međusobno nezavisne* ako i samo ako za funkciju gustine vrijedi da je:

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{X_0}(x_0) f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_{N-1}}(x_{N-1}). \tag{9.28}$$

Očekivana vrijednost slučajnog vektora $\mathbf{X}$ je vektor formiran od očekivanih vrijednosti $\mu_{X_i} = E[X_i]$ njegovih slučajnih promjenljivih, za $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = \left[E[X_0], E[X_1], \cdots, E[X_{N-1}]\right]^{\mathrm{T}} = \left[\mu_{X_0}, \mu_{X_1}, \cdots, \mu_{X_{N-1}}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{9.29}$$

Srednja snaga slučajnog vektora $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$, se definiše kao *srednja kvadratna vrijednost slučajnog vektora*, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}^2}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}^2} = \left[E\left[X_0^2\right], E\left[X_1^2\right], \cdots, E\left[X_{N-1}^2\right]\right]^{\mathrm{T}}. \tag{9.30}$$

Ako sa $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}^2$ označimo *vektor varijansi* slučajnih promjenljivih:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}^2 = \left[\sigma_{X_0}^2, \sigma_{X_1}^2, \cdots, \sigma_{X_{N-1}}^2\right]^{\mathrm{T}}, \tag{9.31}$$

gdje su $E\left[X_i^2\right]$ i $\sigma_{X_1}^2$ srednja kvadratna vrijednost i varijansa *i*-te slučajne promjenljive, respektivno, vrijedi da je:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}^2 = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}^2} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}^2. \tag{9.32}$$

Ako je očekivana vrijednost slučajnog vektora jednaka nuli, vrijedi da je:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}^2. \tag{9.33}$$

Korelacija i kovarijansa slučajnih vektora se definišu preko matrica, pri čemu se operator očekivanja primjenjuje individualno na svaki element matrice.

Korelaciona (*autokorelaciona*) *matrica* slučajnog vektora $\mathbf{X}$ dimenzionalnosti N je matrica dimenzija $N \times N$:

$$\mathbf{R_{XX}} = E\left[\mathbf{XX}^{\mathrm{T}}\right]. \tag{9.34}$$

Element matrice $\mathbf{R_{XX}}(k,l)$ je korelacija *k*-te i *l*-te slučajne promjenljive.

Kovarijansna (*autokovarijansna*) *matrica* slučajnog vektora $\mathbf{X}$ je definisana sa:

$$\mathbf{K_{XX}} = E\left[\left(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]\right)\left(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]\right)^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{R_{XX}} - E[\mathbf{X}]E\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right]. \tag{9.35}$$

Ako su sve slučajne promjenljive vektora $\mathbf{X}$ međusobno nekorelisane, kovarijansna matrica je dijagonalna. Kovarijansna matrica je jednaka korelacionoj matrici za slučajne vektore nultih srednjih vrijednosti.

Kroskorelaciona (*međukorelaciona*) *matrica* dva slučajna vektora $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ je data sa:

$$\mathbf{R_{XY}} = E\left[\mathbf{XY}^{\mathrm{T}}\right], \tag{9.36}$$

gdje element matrice $\mathbf{R_{XY}}(k,l)$ predstavlja korelaciju *k*-te slučajne promjenljive vektora $\mathbf{X}$ i *l*-te slučajne promjenljive vektora $\mathbf{Y}$.

Kroskovarijansna (*međukovarijansna*) *matrica* slučajnih vektora $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ je data sa:

$$\mathbf{K_{XY}} = E\left[\left(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]\right)\left(\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}]\right)^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{R_{XY}} - E[\mathbf{X}]E\left[\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\right]. \tag{9.37}$$

Ako su svi parovi slučajnih promjenljivih slučajnih vektora $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ nekorelisani vrijedi da je:

$$\mathbf{R_{XY}} = E[\mathbf{X}]E\left[\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\right], \tag{9.38}$$

pa kažemo da su ta dva slučajna vektora nekorelisana. Potreban i dovoljan uslov da dva slučajna vektora budu nekorelisana je da njihova kroskovarijansna matrica bude nula-matrica.

Beskonačno-dimenzionalni vektor formiran od slučajnih promjenljivih nazivamo *slučajni (stohastički) proces*. Indeks slučajnih promjenljivih u slučajnom procesu može biti diskretan ili kontinualan, prema čemu vršimo klasifikaciju slučajnih procesa na diskretne i kontinualne. Mi ćemo se zadržati na razmatranju diskretnih slučajnih procesa i smatraćemo da indeks slučajnih pomjenljivih ima

prirodu diskretnog vremena, te ćemo slučajni proces označiti sa $\mathbf{X}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, kako bismo indeksom *n* naglasili vremensku prirodu procesa. Slučajne promjenljive diskretnog slučajnog procesa mogu biti kontinualne ili diskretne. U nastavku izlaganja ćemo podrazumijevati da slučajni proces ima kontinualne slučajne promjenljive.

Radi lakšeg razumijevanja, zamislimo da vršimo mjerenja neke fizičke veličine, npr. napona, u diskretnim vremenskim trenucima sa, teorijski posmatrano, beskonačno mnogo jednakih instrumenata. Zbog nesavršenosti mjernih instrumenata, rezultati mjerenja napona u konkretnom vremenskom trenutku će se razlikovati od instrumenta do instrumenta, te možemo reći da je napon u tom trenutku slučajna promjenljiva. Svakom trenutku u kom se vrše mjerenja može se pridružiti po jedna slučajna promjenljiva. Konkretna vrijednost napona koju u nekom vremenskom trenutku očitamo na jednom instrumentu je jedna instanca jedne slučajne promjenljive. Skup vrijednosti napona na jednom instrumentu za sve vremenske trenutke predstavlja *jednu realizaciju slučajnog procesa*. Budući da je funkcija vremena, jednu realizaciju slučajnog procesa često nazivamo *slučajni signal*. Slučajni proces ponekad nazivamo i *statistički ansambl*, ili samo *ansambl*, a jednu njegovu realizaciju *članom ansambla*.

Kumulativna funkcija raspodjele slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, koja opisuje vjerovatnoću da će slučajni proces uzeti vrijednost manju ili jednaku od određene vrijednosti u svakom trenutku vremena, definiše se sa:

$$F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = P(\mathbf{X}_n \leq x). \tag{9.39}$$

Radi jednostavnijeg označavanja, kada se oznaka slučajnog procesa nalazi u indeksu ispušten je indeks *n*. Iz konteksta je jasno kada velika masna slova ukazuju da se radi o slučajnom procesu, pa se samim tim vremenska zavisnost podrazumijeva.

Funkcija gustine slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ je data sa:

$$f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}). \tag{9.40}$$

Beskonačno-dimenzionalnom generalizacijom slučajnog vektora, *očekivana vrijednost slučajnog procesa* $\mathbf{X}_n,\ n \in \mathbb{Z}$, sa oznakom $E[\mathbf{X}_n]$, postaje vektor beskonačnog trajanja, čije vrijednosti elemenata zavise od diskretnog vremena *n*, tj. indeksa slučajnih promjenljivih koje formiraju slučajni proces. Stoga je posmatramo i kao sekvencu (signal) beskonačnog trajanja i označavamo sa $\mu_{\mathbf{X}}(n)$:

$$\mu_{\mathbf{X}}(n) = E[\mathbf{X}_n]. \tag{9.41}$$

Očekivana vrijednost slučajnog procesa se računa pojedinačno za svaku slučajnu promjenljivu, tako da u *k*-tom vremenskom trenutku $\mu_{\mathbf{X}}(k)$ ima vrijednost jednaku očekivanoj vrijednosti slučajne promjenljive X_k.

Na sličan način se dobiju vremenska sekvenca *srednjih snaga*, $P_{\mathbf{X}}(n)$, odnosno *srednjih kvadratnih vrijednosti*, $\mu_{\mathbf{X}^2}(n)$:

$$P_{\mathbf{X}}(n) = \mu_{\mathbf{X}^2}(n) = E\left[\mathbf{X}_n^2\right]. \tag{9.42}$$

i *sekvenca varijansi*, $\sigma_{\mathbf{X}}^2(n)$ slučajnog procesa $\mathbf{X}_n,\ n \in \mathbb{Z}$. U svakom trenutku vremena vrijedi da je:

$$\sigma_{\mathbf{X}}^2(n) = \mu_{\mathbf{X}^2}(n) - \mu_{\mathbf{X}}^2(n). \tag{9.43}$$

Ako je očekivana vrijednost slučajnog procesa u nekom trenutku *n* jednaka nuli, tada vrijedi da je:

$$P_{\mathbf{X}}(n) = \sigma_{\mathbf{X}}^2(n). \tag{9.44}$$

Korelaciona (*autokorelaciona*) *sekvenca slučajnog procesa* $\mathbf{X}_n,\ n \in \mathbb{Z}$, definisana sa:

$$r_{\mathbf{XX}}(n,m) = E[X_n X_m], \tag{9.45}$$

predstavlja očekivanu vrijednost proizvoda dvije slučajne promjenljive iz slučajnog procesa sa indeksima n i m. Ovaj dvodimenzionalni signal nosi informaciju o tome da li postoji međusobna zavisnost slučajnih promjenljivih koje formiraju slučajni proces, te na taj način opisuje vremensku zavisnost slučajnog procesa.

Kroskorelaciona (*međukorelaciona*) *sekvenca dva slučajna procesa* $\mathbf{X}_n$ i $\mathbf{Y}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, definisana sa:

$$r_{\mathbf{XY}}(n,m) = E[X_n Y_m], \tag{9.46}$$

je dvodimenzionalni signal koji ukazuje na vremensku zavisnost dva slučajna procesa u vremenskim trenucima n i m.

Kovarijansna (*autokovarijansna*) *sekvenca slučajnog procesa* $\mathbf{X}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, definisana sa:

$$\kappa_{\mathbf{XX}}(n,m) = E\Big[\big(X_n - E[X_n]\big)\big(X_m - E[X_m]\big)\Big] = r_{\mathbf{XX}}(n,m) - E[X_n]E[X_m], \tag{9.47}$$

i *kroskovarijansna* (*međukovarijansna*) *sekvenca dva slučajna procesa* $\mathbf{X}_n$ i $\mathbf{Y}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, definisana sa:

$$\kappa_{\mathbf{XY}}(n,m) = E\Big[\big(X_n - E[X_n]\big)\big(Y_m - E[Y_m]\big)\Big] = \mathbf{r}_{\mathbf{XY}}(n,m) - E[X_n]E[Y_m], \tag{9.48}$$

su centrirane varijante korelacione i kroskorelacione sekvence slučajnog procesa, respektivno.

Da bi slučajni procesi bili *statistički nezavisni* potrebno je da svaka slučajna promjenljiva jednog procesa bude statistički nezavisna u odnosu na svaku slučajnu promjenljivu drugog procesa. Dva slučajna procesa su *nekorelisana* ako je:

$$r_{\mathbf{XY}}(n,m) = E[X_n]E[Y_m]. \tag{9.49}$$

Potreban i dovoljan uslov da dva slučajna procesa budu nekorelisana je da njihova kroskovarijansna sekvenca bude jednaka nuli, $\kappa_{\mathbf{XY}}(n,m) = 0,\ \forall n,m$.

Ako sve slučajne promjenljive slučajnog procesa imaju iste statističke osobine bilo kog reda, za slučajni proces kažemo da je *striktno stacionaran*. Većina od slučajnih procesa koje susrećemo u praksi nisu striktno stacionarni, već su *stacionarni u širem smislu*. Slučajni procesi stacionarni u širem smislu imaju konstantnu očekivanu vrijednost, $\mu_{\mathbf{X}}(n) = \mu_{\mathbf{X}}$. Njihova korelaciona i kovarijansna sekvenca zavise samo od toga koliko su slučajne promjenljive X_n i X_m u vremenu udaljene jedna od druge, tj. od razlike $m - n = k$, i date su sa:

$$r_{\mathbf{XX}}(k) = E[X_n X_{n+k}], \tag{9.50}$$

$$\kappa_{\mathbf{XX}}(k) = r_{\mathbf{XX}}(k) - \mu_{\mathbf{X}}^2, \tag{9.51}$$

respektivno. Vrijedi i da je:

$$P_{\mathbf{X}}(n) = E\left[X_n^2\right] = E\left[X_n X_{n+0}\right] = r_{\mathbf{XX}}(0), \tag{9.52}$$

te su i srednja snaga i varijansa slučajnih procesa stacionarnih u širem smislu konstantne u vremenu: $P_{\mathbf{X}}(n) = P_{\mathbf{X}}$ ($\mu_{\mathbf{X}^2}(n) = \mu_{\mathbf{X}^2}$) i $\sigma_{\mathbf{X}}^2(n) = \sigma_{\mathbf{X}}^2$.

Ako je očekivana vrijednost slučajnog procesa koji je stacionaran u širem smislu jednaka nuli, tada vrijedi da je:

$$P_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{X}}^2. \tag{9.53}$$

Posebnu klasu slučajnih procesa stacionarnih u širem smislu sa konačnom očekivanom vrijednošću čine tzv. *ergodični procesi*. Očekivana vrijednost ergodičnog slučajnog procesa $\mu_{\mathbf{X}}$ jednaka je srednjoj vrijednosti μ_x bilo koje realizacije $x(n)$, koja se računa vremenskim usrednjavanjem:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n). \tag{9.54}$$

Srednja snaga ergodičnog slučajnog procesa jednaka je srednjoj snazi bilo koje njegove realizacije:

$$P_{\mathbf{X}} = P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|x(n)\right|^2. \tag{9.55}$$

Autokorelaciona sekvenca ergodičnog slučajnog procesa jednaka je vremenski usrednjenoj autokorelaciji $\overline{r}_{xx}(k)$ bilo koje od njegovih realizacija:

$$r_{\mathbf{XX}}(k) = \overline{r}_{xx}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+k). \tag{9.56}$$

Ergodični procesi su od velikog značaja u praksi, jer često imamo na raspolaganju samo jednu realizaciju slučajnog procesa. Pod pretpostavkom da se radi o ergodičnom slučajnom procesu, u mogućnosti smo da izračunamo statističke osobine kompletnog ansambla vremenskim usrednjavanjem jedne njegove realizacije.

9.2 Spektralna reprezentacija slučajnih procesa

Energija slučajnog procesa je beskonačno velika. Stoga analiziramo srednju snagu slučajnog procesa, kao očekivanu vrijednost srednjih snaga njegovih realizacija. U praktičnim primjenama nemamo na raspolaganju beskonačno mnogo realizacija jednog slučajnog procesa, niti realizacije beskonačnog trajanja, pa srednju snagu slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$ možemo samo procijeniti. Pokazaćemo kako možemo izvršiti tu procjenu na osnovu jedne realizacije $x(n)$ konačnog trajanja.

Ako posmatramo slučajni signal $x(n)$ na intervalu $[-N,N]$, pretpostavljajući da su vrijednosti $x(n)$ van tog intervala jednake nuli, možemo odrediti njegovu DTFT:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-N}^{N}x(n)e^{-j\omega n}. \tag{9.57}$$

Tada u izrazu za računanje ukupne energije preko Parsevalove teoreme:

$$E_N=\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega, \tag{9.58}$$

$S_x\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ predstavlja spektralnu gustinu energije jedne realizacije slučajnog procesa na intervalu $[-N,N]$, dok $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$ reprezentuje dio te energije koji je sadržan u frekvencijskim komponentama te realizacije u opsegu između ω i $\omega+d\omega$. Kada $N\to\infty$, ukupna energija tih komponenti ima beskonačnu vrijednost, ali je njihova srednja snaga konačna za svako ω. Sa (2.13) smo za signale sa beskonačno velikom ukupnom energijom definisali srednju snagu signala, P_x. Uvrštavanjem (9.58) u (2.13), pod integralom dobijamo izraz:

$$P_x\left(e^{j\omega}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{2N+1}, \tag{9.59}$$

koji nam daje informaciju o raspodjeli srednje snage po frekvencijskim komponentama i predstavlja *spektralnu gustinu snage jedne realizacije slučajnog procesa*.

Za spektralnu gustinu snage smo odabrali istu oznaku kao za srednju snagu, ali budući da je srednja snaga broj, označavamo je samo sa P_x, dok je spektralna gustina snage funkcija učestanosti, pa je označavamo sa $P_x\left(e^{j\omega}\right)$.

Spektralnu gustinu snage slučajnog procesa definišemo kao očekivanu vrijednost spektralne gustine snage njegovih realizacija:

$$\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\omega}\right)=E\left[P_x\left(e^{j\omega}\right)\right]=\lim_{N\to\infty}E\left[\frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{2N+1}\right]. \tag{9.60}$$

Spektralna gustina snage slučajnog procesa nam daje informaciju o raspodjeli srednje snage slučajnog procesa po frekvencijskim komponentama.

Za vremenski usrednjenu autokorelacionu sekvencu $\overline{r}_{xx}\left(k\right)$ slučajnog signala $x\left(n\right)$, datu sa (9.56), prema Viner (Norbert Wiener) - Hinčinovoj (Александр Яковлевич Хинчин) teoremi vrijedi da je:

$$\text{DTFT}\left\{\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right\}=\lim_{N\to\infty}\frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{2N+1}, \tag{9.61}$$

pa je:

$$P_x\left(e^{j\omega}\right)=\text{DTFT}\left\{\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right\}. \tag{9.62}$$

Sada spektralna gustina snage slučajnog procesa poprima sljedeći oblik:

$$\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\omega}\right)=E\left[P_x\left(e^{j\omega}\right)\right]=E\left[\text{DTFT}\left\{\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right\}\right]=\text{DTFT}\left\{E\left[\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right]\right\}. \tag{9.63}$$

Kod ergodičnih procesa, vremenski usrednjene autokorelacione sekvence svih realizacija slučajnog procesa su jednake, pa je i očekivana vrijednost vremenski usrednjene autokorelacione sekvence jednaka vremenski usrednjenoj autokorelacionoj sekvenci jedne realizacije slučajnog procesa, i istovremeno jednaka autokorelacionoj sekvenci kompletnog ansambla $r_{\mathbf{XX}}\left(m\right)$:

$$E\left[\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right]=\overline{r}_{xx}\left(m\right)=r_{\mathbf{XX}}\left(m\right). \tag{9.64}$$

Stoga u slučaju ergodičnih procesa imamo da je:

$$\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{DTFT}\left\{\overline{r}_{xx}\left(m\right)\right\}=\mathrm{DTFT}\left\{r_{\mathbf{XX}}\left(m\right)\right\}. \tag{9.65}$$

Na ovaj način smo problem procjene spektralne gustine snage ergodičnog slučajnog procesa sveli na procjenu njegove autokorelacione sekvence, odnosno na procjenu vremenski usrednjene autokorelacione sekvence jedne njegove realizacije, i određivanje DTFT autokorelacione sekvence. U praksi se za procjenu spektralne gustine snage slučajnih procesa na osnovu autokorelacione sekvence koriste neparametarski i parametarski metodi.

9.3 Neparametarski metodi procjene spektralne gustine snage slučajnih procesa

Neparametarski metodi procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa ne uvode nikakve pretpostavke o načinu nastanka slučajnog procesa, već je procjena zasnovana na analizi sekvence podataka konačnog trajanja. Razmotrimo procjenu spektralne gustine snage slučajnog procesa na osnovu posmatranja jedne realizacije $x(n)$ slučajnog procesa u konačnom vremenskom inetrvalu $n=0,1,\ldots,N-1$. Zbog konačnog trajanja signala $x(n)$ ne poznajemo njegovu vremenski usrednjenu autokorelacionu sekvencu $\overline{r}_{xx}(m)$, niti spektralnu gustinu snage $P_x\left(e^{j\omega}\right)$, već ih možemo samo procijeniti. Procjenu vremenski usrednjene autokorelacione sekvence posmatranog slučajnog signala konačnog trajanja možemo iskazati na sljedeći način:

$$\hat{r}_{xx}\left(m\right)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x\left(n\right)x\left(n+m\right),\ m=0,1,\ldots,N-1, \tag{9.66}$$

$$\hat{r}_{xx}\left(m\right)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=|m|}^{N-1}x\left(n\right)x\left(n+m\right),\ m=-1,-2,\ldots,-N+1. \tag{9.67}$$

Ako posmatramo sve realizacije slučajnog procesa u ovom konačnom vremenskom intervalu i primijenimo operator matematičkog očekivanja

prekosvih članova ansambla, slučajni signal u trenutku n postaje slučajna promjenljiva X_n. Očekivanje autokorelacione sekvence $\hat{r}_{xx}(m)$ je stoga dato sa:

$$E\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}E\left[X_n X_{n+m}\right]=r_{\mathbf{XX}}(m),\ m=0,1,\ldots,N-1, \qquad (9.68)$$

$$E\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=|m|}^{N-1}E\left[X_n X_{n+m}\right]=r_{\mathbf{XX}}(m),\ m=-1,-2,\ldots,-N+1. \qquad (9.69)$$

Kažemo da je sekvenca $\hat{r}_{xx}(m)$ *korektna* (*nepristrasna*) *procjena* autokorelacione sekvence $r_{\mathbf{XX}}(m)$, jer je njena očekivana vrijednost jednaka vrijednosti koju procjenjujemo. Dobre procjene bi osim osobine nepristrasnosti trebalo da imaju i što manju varijansu procjene. Može se pokazati (izvođenje prevazilazi okvire ove knjige) da za varijansu procjene $\hat{r}_{xx}(m)$ vrijedi da je:

$$\operatorname{var}\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]\approx\frac{1}{\left[N-|m|\right]^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|r_{\mathbf{XX}}(n)\right|^2+r_{\mathbf{XX}}(n-m)r_{\mathbf{XX}}(n+m)\right], \qquad (9.70)$$

te teži nuli kad $N\to\infty$. Za procjenu kod koje je očekivana vrijednost jednaka vrijednosti koju procjenjujemo i čija varijansa teži nuli kad $N\to\infty$ kažemo da je *konzistentna*.

Procjena spektralne gustine snage jedne realizacije slučajnog procesa se sada može zapisati u obliku:

$$\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_{xx}(m)e^{-j\omega m}\ . \qquad (9.71)$$

Spektralna gustina snage slučajnog procesa definiše se kao očekivana vrijednost spektralne gustine snage njegovih realizacija. Međutim, u praksi nam je uglavnom dostupna samo jedna realizacija slučajnog procesa, pa spektralnu gustinu snage slučajnog procesa procjenjujemo na osnovu spektralne gustine snage jedne njegove realizacije. Za procjenu spektralne gustine snage slučajnog procesa na osnovu jedne njegove realizacije koristimo periodogram i njegove modifikacije: Bartletov (Maurice Stevenson Bartlett), Velčov (Peter D. Welch) i

Blakman (Ralph Beals Blackman) - Tjukijev (John Wilder Tukey) metod, kojima se smanjuje varijansa procjene.

9.3.1 Periodogram

Za velike vrijednosti promjenljive m procjena $\widehat{r}_{xx}(m)$ ima veliku varijansu. Ovo je posebno naglašeno kada vrijednost za m postaje bliska N, jer tada zbog konačnog trajanja signala $x(n)$ u izračunavanju procjene vremenski usrednjene autokorelacione sekvence $\widehat{r}_{xx}(m)$ učestvuje mali broj elemenata signala. Osim toga, pri određivanju DTFT sekvence $\widehat{r}_{xx}(m)$, moramo voditi računa da faktor $1/(N-|m|)$ zavisi od vremena, što usložnjava izračunavanje.

Kao alternativni izrazi za procjenu vremenski usrednjene autokorelacione sekvence mogu se koristiti sljedeće relacije:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m),\ m = 0,1,\ldots,N-1\,, \tag{9.72}$$

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=|m|}^{N-1} x(n)x(n+m),\ m = -1,-2,\ldots,-N+1\,. \tag{9.73}$$

Jasno je vidljiva veza između dvije procjene vremenski usrednjene autokorelacione sekvence, označene sa $\widehat{r}_{xx}(m)$ i $\hat{r}_{xx}(m)$:

$$\hat{r}_{xx}(m) = w_T(m)\cdot \widehat{r}_{xx}(m)\,, \tag{9.74}$$

gdje je:

$$w_T(m) = \begin{cases} 1-\dfrac{|m|}{N}, & |m| \le N-1, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{9.75}$$

Množenje sa trougaonom prozorskom sekvencom datom sa (9.75) umanjuje uticaj konačnog trajanja signala na računanje autokorelacije. Na ovaj način definisana procjena usrednjene autokorelacione sekvence nije nepristrasna.

Unesena je sistemska greška procjene u vidu otklona $|m| r_{\mathbf{XX}}(m)/N$, što se vidi iz očekivane vrijednosti procjene vremenski usrednjene autokorelacione sekvence:

$$E\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}E\left[X_n X_{n+m}\right]=\frac{N-|m|}{N}r_{\mathbf{XX}}(m)=\left(1-\frac{|m|}{N}\right)r_{\mathbf{XX}}(m). \qquad (9.76)$$

Pokazuje se (izvođenje prevazilazi okvire ove knjige) da procjena $\hat{r}_{xx}(m)$ ima manju varijansu od procjene $\widehat{r}_{xx}(m)$:

$$\operatorname{var}\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]\approx\frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|r_{\mathbf{XX}}(n)\right|^2+r_{\mathbf{XX}}(n-m)r_{\mathbf{XX}}(n+m)\right]. \qquad (9.77)$$

Ova procjena je asimptotski nepristrasna:

$$\lim_{N\to\infty}E\left[\hat{r}_{xx}(m)\right]=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)r_{\mathbf{XX}}(m)=r_{\mathbf{XX}}(m), \qquad (9.78)$$

i njena varijansa konvergira ka nuli kada $N\to\infty$, te je i konzistentna.

Procjena spektralne gustine snage jedne realizacije slučajnog procesa na osnovu ovako procijenjene autokorelacione sekvence je data sa:

$$\begin{aligned}\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)&=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_{xx}(m)e^{-j\omega m}=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)e^{-j\omega m}\Bigg|_{l=n+m}=\\&=\frac{1}{N}\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)e^{-j\omega l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{j\omega n}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)e^{-j\omega l}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{j\omega n}=\\&=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}\right|^2.\end{aligned} \qquad (9.79)$$

U (9.79) granice suma su za potrebe izvođenja proširivane do beskonačnosti, a zatim opet svođene na konačne, što je dopušteno ako imamo u vidu da su vrijednosti $\hat{r}_{xx}(m)$ van granica $\left[-(N-1),(N-1)\right]$ i $x(n)$ van granica $\left[0,N-1\right]$ jednake nuli.

Procjena spektralne gustine snage jedne realizacije slučajnog procesa data sa (9.79), odnosno sa:

$$\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{N}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}\right|^2, \tag{9.80}$$

gdje je $X\left(e^{j\omega}\right)$ DTFT slučajnog signala $x(n)$ konačnog trajanja $\left[0,N-1\right]$ poznata je pod nazivom *periodogram.*

Periodogram se koristi kao procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa. Njegova očekivana vrijednost je:

$$E\left[\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)\right]=E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_{xx}(m)e^{-j\omega m}\right]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)r_{\mathbf{XX}}(m)e^{-j\omega m}. \tag{9.81}$$

Kada $N\to\infty$, očekivana vrijednost periodograma postaje jednaka spektralnoj gustini snage slučajnog procesa:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}E\left[\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)\right]&=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)r_{\mathbf{XX}}(m)e^{-j\omega m}\right]=\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_{\mathbf{XX}}(m)e^{-j\omega m}=\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\omega}\right).\end{aligned} \tag{9.82}$$

Dakle, periodogram je asimptotski nepristrasna procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa. Pokazuje se da (izvođenje prevazilazi okvire ove knjige), u opštem slučaju, varijansa periodograma ne teži ka nuli kad $N\to\infty$, pa periodogram nije konzistentna procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa.

Posmatrajući (9.81) zaključujemo da je očekivana vrijednost periodograma jednaka DTFT proizvoda autokorelacione sekvence slučajnog procesa i prozorske sekvence $w_T(m)$ date sa (9.75), što je periodična konvolucija spektralne gustine snage slučajnog procesa i DTFT trougaone prozorske sekvence, koju ćemo označiti sa $W_T\left(e^{j\omega}\right)$:

$$E\left[\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)\right] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{\mathrm{XX}}(m)\left(1-\frac{|m|}{N}\right)e^{-j\omega m} = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[r_{\mathrm{XX}}(m)w_T(m)\right]e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{\mathrm{X}}\left(e^{j\lambda}\right)W_T\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)d\lambda \ . \tag{9.83}$$

Zbog navedene periodične konvolucije očekivana vrijednost periodograma je zaglađena u odnosu na originalnu spektralnu gustinu snage slučajnog procesa i pati od curenja spektra, što je posljedica ograničavanja trajanja autokorelacione sekvence.

Prije računanja periodograma signal $x(n)$ se može pomnožiti nekom od prozorskih sekvenci kako bi se smanjilo curenje spektra. Tada govorimo o *modifikovanom periodogramu*.

Za računanje periodograma može se koristi DFT:

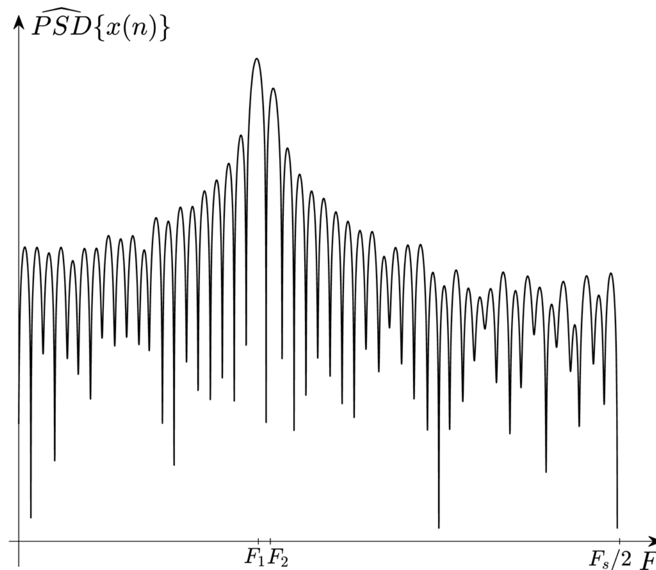
$$\hat{P}_x(k) = \hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\left|X(k)\right|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right|^2, \ k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{9.84}$$

jer je, pod uslovom da se DFT radi u broju tačaka koji je veći ili jednak od trajanja signala $x(n)$, moguće rekonstruisati periodogram $\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)$ iz njegovih odmjeraka datih sa $\hat{P}_x(k),\ k = 0,1,\ldots,N-1$.

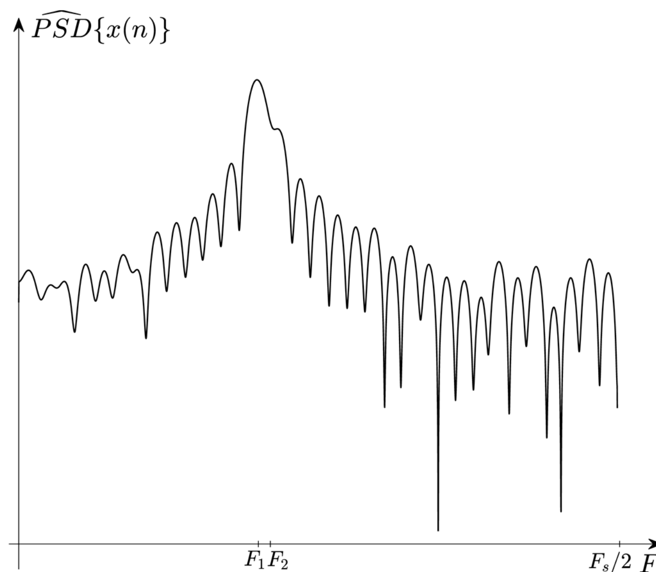
Maksimalna rezolucija u frekvenciji koja se može postići periodogramom jednaka je polovini širine glavnog luka prozorske sekvence koja se koristi za analizu signala. U slučaju pravougaone prozorske sekvence širina glavnog luka iznosi $2F_S/L$, gdje je L dužina prozorske sekvence. Maksimalna rezolucija u frekvenciji, odnosno minimalna udaljenost između dvije različite frekvencijske komponente koje periodogram može razlučiti, iznosi $\Delta F = F_S/L$.

Posmatrajmo, kao primjer, analizu diskretnog signala $x(n) = 2\sin(2\pi\cdot 0,20n) + \sin(2\pi\cdot 0,21n)$, koji je nastao odmjeravanjem kontinualnog signala koji sadrži dvije frekvencijske komponente, čije su frekvencije $F_1 = 200\,\mathrm{Hz}$ i $F_2 = 210\,\mathrm{Hz}$, frekvencijom odmjeravanja $F_S = 1\,\mathrm{kHz}$. Signal je narušen aditivnim Gusovim šumom nulte srednje vrijednosti i varijanse

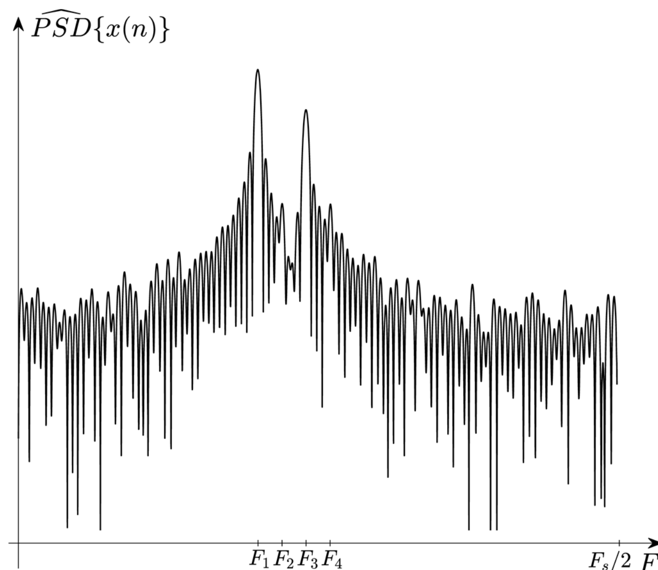
0,0081. Ako želimo da u periodogramu budemo u stanju da razlučimo dvije bliske frekvencijske komponente sadržane u ovom signalu, rezolucija u frekvenciji treba da bude bar $10\,\text{Hz}$, što znači da trajanje signala treba da bude veće od 100 odmjeraka. Na Slici 9.1 prikazan je periodogram posmatranog signala $x(n)$, trajanja $L=101$. Pri ovoj dužini sekvence je $\Delta F \approx 9{,}9\,\text{Hz}$, pa se jasno uočavaju dvije frekvencijske komponente. Ipak, maksimumi spektralne gustine snage ne odgovaraju u potpunosti frekvencijskim komponentama signala, pa bi za tačnije očitanje bilo potrebno povećati dužinu isječka signala. Na Slici 9.2 prikazan je periodogram istog signala, ali je pri računanju periodograma korišteno samo 67 odmjeraka signala. Rezolucija periodograma je u ovom slučaju lošija, $\Delta F \approx 14{,}93\,\text{Hz}$, pa nije dovoljna za otkrivanje frekvencijskih komponenti posmatranog signala. U slučajevima kada signal sadrži bliske frekvencijske komponente značajno različitih amplituda, visoki bočni lukovi spektra pravougaone prozorske sekvence mogu maskirati frekvencijske komponente malih amplituda, kao što se može vidjeti na Slici 9.3, koja prikazuje periodogram signala $x(n)=2\sin(2\pi\cdot 0{,}20n)+0{,}1\sin(2\pi\cdot 0{,}22n)+\sin(2\pi\cdot 0{,}24n)+0{,}1\sin(2\pi\cdot 0{,}26n)$ sa aditivnim Gausovim šumom nulte srednje vrijednosti i varijanse 0,0081. Ovaj signal je nastao odmjeravanjem kontinualnog signala koji sadrži četiri frekvencijske komponente, frekvencija $F_1=200\,\text{Hz}$, $F_2=220\,\text{Hz}$, $F_3=240\,\text{Hz}$ i $F_4=260\,\text{Hz}$, frekvencijom odmjeravanja $F_S=1\text{ kHz}$. Pri računanju periodograma korištena je pravougaona prozorska sekvenca trajanja $L=220$. Bolji rezultati se postižu uobličavanjem signala množenjem prozorskom sekvencom koja je drugačija od pravougaone, kao što se može vidjeti sa Slike 9.4, gdje je prikazan modifikovani periodogram istog signala koji je pomnožen Hamingovom sekvencom. Širina glavnog luka Hamingove prozorske sekvence je približno dva puta veća nego kod pravougaone, pa izborom $L=220$ postižemo traženu rezoluciju u frekvenciji. Posmatrajući slike 9.3 i 9.4, primjećujemo da, za ovakav tip signala, uz dužinu prozorske sekvence koja, u oba slučaja, osigurava potrebnu rezoluciju u frekvenciji, periodogram daje lošije rezultate u poređenju sa modifikovanim periodogramom.



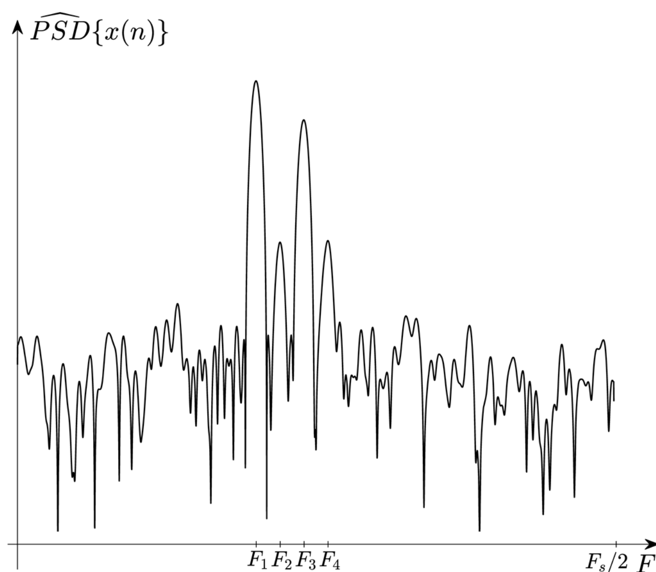
Slika 9.1 Periodogram signala koji sadrži dvije frekvencijske komponente, frekvencija $F_1 = 200\,\text{Hz}$ i $F_2 = 210\,\text{Hz}$. Dužina sekvence je 101, što odgovara rezoluciji od $9{,}9\,\text{Hz}$.



Slika 9.2 Periodogram signala koji sadrži dvije frekvencijske komponente, frekvencija $F_1 = 200\,\text{Hz}$ i $F_2 = 210\,\text{Hz}$. Dužina sekvence je 67, što odgovara rezoluciji od $14{,}93\,\text{Hz}$.



Slika 9.3 Periodogram signala koji sadrži četiri frekvencijske komponente, frekvencija: $F_1 = 200\,\text{Hz}$, $F_2 = 220\,\text{Hz}$, $F_3 = 240\,\text{Hz}$ i $F_4 = 260\,\text{Hz}$. Dužina sekvence je 220.



Slika 9.4 Modifikovani periodogram signala koji sadrži četiri frekvencijske komponente, frekvencija: $F_1 = 200\,\text{Hz}$, $F_2 = 220\,\text{Hz}$, $F_3 = 240\,\text{Hz}$ i $F_4 = 260\,\text{Hz}$. Dužina sekvence je 220.

Sa ciljem smanjenja varijanse, razvijeno je više metoda za procjenu spektralne gustine snage slučajnog procesa, koji u osnovi imaju periodogram, ali se pokušavaju približiti konzistentnoj procjeni. Najpoznatiji od njih su: Bartletov metod, koji se zasniva na usrednjavanju periodograma, Velčov metod, zasnovan na usrednjavanju modifikovanog periodograma, i Blakman-Tjukijev metod uobličavanja periodograma. Navedeni metodi smanjuju varijansu procjene, ali pri tome neminovno dolazi do većeg curenja spektra i smanjenja rezolucije u frekvenciji.

9.3.2 Bartletov metod usrednjavanja periodograma

U cilju smanjenja varijanse periodograma Bartlet koristi njegovo usrednjavanje. Slučajni signal $x(n)$ se dijeli u K nepreklapajućih segmenata signala $x_i(n),\ i=0,1,\dots,K-1$, od kojih je svaki trajanja M, tako da je:

$$x_i(n)=x(n+iM),\ i=0,1,\dots,K-1,\ n=0,1,\dots,M-1. \tag{9.85}$$

Nakon računanja periodograma svih K nepreklapajućih signala $x_i(n)$:

$$\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i(n)e^{-j\omega n}\right|^2,\ i=0,1,\dots,K-1, \tag{9.86}$$

izračuna se usrednjeni periodogram:

$$\hat{P}_x^{B}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right), \tag{9.87}$$

koja predstavlja Bartletovu procjenu spektralne gustine snage slučajnog procesa na osnovu jedne njegove realizacije. Budući da su očekivane vrijednosti periodograma izračunate za signale $x_i(n)$ jednake, za očekivanu vrijednost Bartletove procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa vrijedi da je:

$$E\left[\hat{P}_x^{B}\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}E\left[\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)\right]=E\left[\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)\right]. \tag{9.88}$$

Očekivana vrijednost svakog od pojedinačnih periodograma je data sa:

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)\right] &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{\mathbf{xx}}(m)\left(1-\frac{|m|}{M}\right)e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[r_{\mathbf{xx}}(m)\,w_B(m)\right]e^{-j\omega m} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{\mathbf{x}}\left(e^{j\lambda}\right)W_B\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)d\lambda \ .
\end{aligned}
\tag{9.89}
$$

pri čemu je korištena oznaka:

$$
w_B(m) = \begin{cases} 1-\dfrac{|m|}{M}, & |m| \le M-1, \\ 0, & inače, \end{cases}
\tag{9.90}
$$

za Bartletovu (trougaonu) prozorsku sekvencu trajanja $2M-1$, te:

$$
W_B\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right)^2,
\tag{9.91}
$$

za DTFT Bartletove prozorske sekvence. Bartletova prozorska sekvenca (9.90) je istog oblika kao trougaona prozorska sekvenca (9.75), ali kraćeg trajanja, te je njen spektar širi. Stoga je očekivana vrijednost svakog pojedinačnog periodograma, koja se dobije periodičnom konvolucijom spektralne gustine snage slučajnog procesa $\Gamma_{\mathbf{x}}\left(e^{j\omega}\right)$ i DTFT Bartletove prozorske sekvence date sa (9.91), a samim tim i očekivana vrijednost Bartletove procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa, više zaglađena nego očekivana vrijednost periodograma. Procjena spektralne gustine snage dobijena usrednjavanjem periodograma ostaje asimptotski nepristrasna. Pri tome se varijansa usrednjenog periodograma $\hat{P}_x^{B}\left(e^{j\omega}\right)$ smanji K puta u poređenju sa varijansom periodograma $\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)$:

$$
\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^{B}\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1}{K^2}\sum_{i=0}^{K-1}\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1}{K}\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)\right].
\tag{9.92}
$$

Može se pokazati (izvođenje prevazilazi okvire ove knjige) da je varijansa Bartletove procjene spektralne gustine snage Gausovog slučajnog procesa približno K puta manja od varijanse periodograma kompletnog signala $x(n)$:

$$\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^B\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2\left(e^{j\omega}\right)\left[1+\left(\frac{\sin\omega M}{M\sin\omega}\right)^2\right]. \tag{9.93}$$

Međutim, loša osobina ovog usrednjavanja periodograma je da se, posmatrano u odnosu na procjenu spektralne gustine snage putem periodograma $\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)$ rezolucija u frekvenciji smanji K puta. To se dešava zato što je spektar prozorske sekvence, kojim se množi autokorelaciona sekvenca pri računanju periodograma $\hat{P}_x^{(i)B}\left(e^{j\omega}\right)$, K puta širi od spektra prozorske sekvence kojim se množi autokorelaciona sekvenca pri računanju periodograma $\hat{P}_x\left(e^{j\omega}\right)$.

9.3.3 Velčov metod usrednjavanja modifikovanog periodograma

Velč je uveo metod usrednjavanja periodograma kod koga je dozvoljeno preklapanje pri podjeli slučajnog signala $x(n)$ na L segmenata. Na taj način povećava se broj segmenata kako bi se smanjila varijansa, a održala rezolucija u frekvenciji. Dobijeni segmenti:

$$x_i(n)=x(n+iD),\ i=0,1,\ldots,L-1,\ n=0,1,\ldots,M-1,\ D\in\mathbb{N},\ D\le M \tag{9.94}$$

se prije računanja periodograma množe prozorskom sekvencom $w(n)$, pa se usrednjavanje radi nad tako modifikovanim periodogramima. Za $D=M$ nema preklapanja i broj segmenata je isti kao kod Bartletovog metoda. Za $D=M/2$ segmenti se preklapaju na 50% dužine i ima ih dvostruko više nego kod Bartletovog metoda.

Modifikovani periodogrami dobijeni iz segmenata $x_i(n)$ su dati sa:

$$\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i\left(n\right)w\left(n\right)e^{-j\omega n}\right|^2,\ i=0,1,\ldots,L-1, \tag{9.95}$$

gdje je U normalizujući faktor čiju ćemo ulogu objasniti nešto kasnije. Velčova procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa dobije se usrednjavanjem modifikovanih periodograma:

$$\hat{P}_x^{W}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right). \tag{9.96}$$

Očekivane vrijednosti pojedinačnih modifikovanih periodograma su jednake, pa je očekivana vrijednost Velčove procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa data sa:

$$E\left[\hat{P}_x^{W}\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}E\left[\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)\right]=E\left[\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)\right], \tag{9.97}$$

U slučaju ergodičnih procesa vrijedi da je:

$$\begin{aligned}
&E\left[\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)\right]=E\left[\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i\left(n\right)w\left(n\right)e^{-j\omega n}\right|^2\right]=\\
&=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}w\left(n\right)w\left(m\right)E\left[X_nX_m\right]e^{-j\omega\left(n-m\right)}=\\
&=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}w\left(n\right)w\left(m\right)r_{\mathbf{XX}}\left(n-m\right)e^{-j\omega\left(n-m\right)}=\\
&=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}w\left(n\right)w\left(m\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\lambda}\right)e^{-j\lambda\left(n-m\right)}d\lambda\right]e^{-j\omega\left(n-m\right)}=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\lambda}\right)\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}w\left(n\right)e^{-j\lambda n}e^{-j\omega n}\sum_{m=0}^{M-1}w\left(m\right)e^{j\lambda m}e^{j\omega m}\right\}d\lambda=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\lambda}\right)\left|W\left(e^{j\left(\omega-\lambda\right)}\right)\right|^2d\lambda\ ,
\end{aligned} \tag{9.98}$$

gdje je:

$$\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w\left(n\right)e^{-j\omega n}\right|^2. \tag{9.99}$$

U graničnom slučaju, kada je prozorska sekvenca pravougaonog oblika sa jediničnim vrijednostima i kada je njeno trajanje beskonačno, Velčova procjena spektralne gustine snage treba da bude jednaka $\Gamma_{\mathbf{X}}$. Da bi to bilo ispunjeno, $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ treba da, na intervalu $-\pi$ do π, bude jednako Dirakovom impulsu. Stoga normalizujući faktor U određujemo iz uslova da je $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=0$ za $\omega\neq 0$, da ima beskonačno veliku vrijednost za $\omega=0$, te da za površinu ispod funkcije $\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ na intervalu $-\pi$ do π vrijedi da je:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\delta(\omega)\,d\omega=\int_{0_-}^{0_+}\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)\right|^2\delta(\omega)\,d\omega=1, \tag{9.100}$$

tako da dobijamo:

$$U=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)\right|^2. \tag{9.101}$$

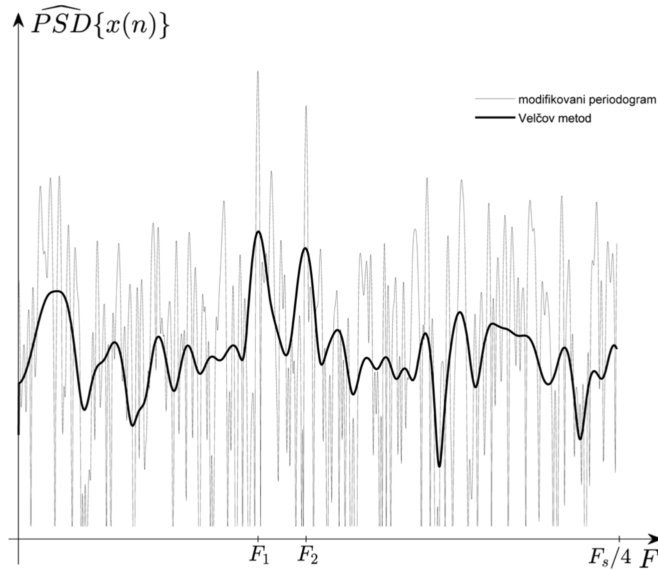
Za razliku od Bartletovog metoda, gdje su segmenti na koje se dijeli signal međusobno nekorelisani, kod Velčovog metoda to nije slučaj, jer je dopušteno njihovo preklapanje. Velč je pokazao da je varijansa ove procjene data sa:

$$\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^W\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{L-1}E\left[\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)\hat{P}_x^{(k)W}\left(e^{j\omega}\right)\right]-\left\{E\left[\hat{P}_x^W\left(e^{j\omega}\right)\right]\right\}^2. \tag{9.102}$$

Preklapanje ne smije da bude preveliko, jer korelacija periodograma preklapajućih segmenata postaje značajna. Zbog toga se dešava da se povećanjem preklapanja varijansa prvo smanjuje, a onda raste. U slučaju kada nema preklapanja, za varijansu vrijedi da je:

$$\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^W\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{L}\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^{(i)W}\left(e^{j\omega}\right)\right]\approx\frac{1}{L}\Gamma_{\mathbf{X}}^2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{K}\Gamma_{\mathbf{X}}^2\left(e^{j\omega}\right). \tag{9.103}$$

Tada je broj segmenata $L=K$ isti kao kod Bartletove procjene, pa je i varijansa jednaka varijansi Bartletove procjene. Za slučaj 50% preklapanja broj segmenata je dvostruko veći, $L=2K$. Velč je pokazao da je varijansa u ovom slučaju manja



Slika 9.5 Poređenje modifikovanog periodograma i Velčovog metoda procjene spektralne gustine snage signala koji sadrži dvije frekvencijske komponente, frekvencija $F_1 = 100\,\text{Hz}$ i $F_4 = 120\,\text{Hz}$.

od varijanse Bartletove procjene i pri korištenju Bartletove prozorske sekvence približno jednaka:

$$\text{var}\left[\hat{P}_x^W\left(e^{j\omega}\right)\right] \approx \frac{9}{8L}\Gamma_{\text{x}}^2\left(e^{j\omega}\right) = \frac{9}{16K}\Gamma_{\text{x}}^2\left(e^{j\omega}\right). \tag{9.104}$$

Vrijednost varijanse se mijenja pri korištenju drugačijih prozorskih sekvenci.

Velčov metod ima manju varijansu procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa nego periodogram, ali i lošiju rezoluciju u frekvenciji. Na Slici 9.5 dato je poređenje modifikovanog periodograma, uz korištenje Hamingove prozorske sekvence, i Velčove procjene spektralne gustine snage signala $x(n) = 0.2\sin(2\pi \cdot 0{,}10\,n) + 0.2\sin(2\pi \cdot 0{,}12\,n)$, koji je nastao odmjeravanjem dvije sinusoide, čije su frekvencije $F_1 = 100\,\text{Hz}$ i $F_2 = 120\,\text{Hz}$, frekvencijom odmjeravanja $F_S = 1\,\text{kHz}$. Signal je narušen aditivnim Gusovim šumom, nulte

srednje vrijednosti i varijanse 0,49, tako da je odnos signal/šum mali. Dužina analizirane sekvence iznosi 1201, koliko je iznosila i dužina Hamnigove prozorske sekvence pri izračunavanju modifikovanog periodograma. Kod Velčovog metoda je, u ovom primjeru, dužina segmenata iznosila 200, a preklapanje je bilo 25%. Šum periodogramu otežava detekciju dominantnih frekvencijskih komponenti. U odnosu na periodogram, zbog usrednjavanja koje koristi, Velčov metod daje zaglađenu i stabilniju procjenu spektralne gustine snage, ali smanjuje rezoluciju u frekvenciji jer koristi kraće dužine sekvenci.

9.3.4 Blakman - Tjukijev metod uobličavanja periodograma

Procjena vremenski usrednjene autokorelacione sekvence $r_{xx}(m)$ za velike vrijednosti m je nepouzdana jer se računa na osnovu malog broja elemenata jedne realizacije slučajnog procesa konačnog trajanja. U cilju poboljšanja varijanse procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa, a nauštrb smanjenja rezolucije u frekvenciji, Blakman i Tjuki su predložili uobličavanje periodograma odbacivanjem nepouzdanih vrijednosti autokorelacione sekvence njenim množenjem prozorskom sekvencom $w(m)$ trajanja $2M-1$, pri čemu trajanje prozorske sekvence treba da bude mnogo manje od trajanja autokorelacione sekvence:

$$\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\hat{r}_{xx}(m)w(m)e^{-j\omega m} . \tag{9.105}$$

Na taj način se umanjuje uticaj manje pouzdanih vrijednosti autoko relacije na procjenu spektralne gustine snage slučajnih procesa. Množenje autokorelacione sekvence prozorskom sekvencom ima za posljedicu uobličavanje periodograma, iskazano periodičnom konvolucijom periodograma sa spektrom $W\left(e^{j\omega}\right)$ prozorske sekvence:

$$\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{P}_x\left(e^{j\lambda}\right)W\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)d\lambda . \tag{9.106}$$

Prozorska sekvenca $w(m)$ treba da bude parna kako bismo sačuvali realnost, a njen spektar ne smije da ima negativnih vrijednosti kako bismo osigurali pozitivne vrijednosti procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa.

Očekivana vrijednost Blakman-Tjukijeve procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa je data sa:

$$\begin{aligned} E\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right] &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E\left[\hat{r}_{xx}(m)w(m)\right]e^{-j\omega m} = \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{\mathbf{XX}}(m)w_{BT}(m)e^{-j\omega m} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\lambda}\right)W_{BT}\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)d\lambda, \end{aligned} \tag{9.107}$$

gdje je:

$$w_{BT}(m) = w_T(m)w(m). \tag{9.108}$$

U slučaju kada je $M \ll N$, tj. kada je trajanje prozorske sekvence mnogo manje od trajanja autokorelacione sekvence, vrijedi da je:

$$w_{BT}(m) \approx w(m), \tag{9.109}$$

pa je očekivana vrijednost Blakman-Tjukijeve procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa:

$$E\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right] \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{\mathbf{X}}\left(e^{j\lambda}\right)W\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)d\lambda \ . \tag{9.110}$$

Varijansa procjene, jednako kao i očekivana vrijednost, zavisi od odabrane prozorske sekvence, i data je sa:

$$\mathrm{var}\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right] = E\left\{\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right]^2\right\} - \left\{E\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right]\right\}^2 . \tag{9.111}$$

Pod pretpostavkom da je slučajni proces Gausov i da je spektralna gustina snage slučajnog procesa približno konstantna unutar širine glavnog luka spektra prozorske sekvence, može se pokazati (izvođenje prevazilazi okvire ove knjige) da je:

$$\operatorname{var}\left[\hat{P}_x^{BT}\left(e^{j\omega}\right)\right] \approx \Gamma_{\mathbf{x}}^2\left(e^{j\omega}\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m)\right]. \tag{9.112}$$

Napomenimo još jednom da je ovim metodom smanjenje varijanse postignuto dodatnim ograničavanjem trajanja autokorelacione sekvence, što dovodi do još izraženijeg curenja spektra i smanjenja rezolucije u frekvenciji.

9.4 Parametarski metodi procjene spektralne gustine snage slučajnih procesa

Vidjeli smo da kod neparametarskih metoda konačno trajanje realizacija slučajnog procesa, na osnovu kojih se procjenjuje njegova spektralna gustina snage, limitira rezoluciju u frekvenciji. U cilju prevazilaženja tog problema, parametarski metodi procjene spektralne gustine snage slučajnih procesa koriste ekstrapoliranu autokorelacionu sekvencu. Zasnivaju se na izradi modela koji na svom izlazu generiše slučajni proces željenih statističkih karakteristika. Željene statističke karakteristike u konačnom vremenskom intervalu se određuju na osnovu raspoloživih podataka, a modelom se vrši njihova ekstrapolacija. Pošto se pri procjeni spektralne gustine snage slučajnog procesa ne koriste pretpostavke o ograničenosti autokorelacione sekvence, ne pojavljuje se ni problem curenja spektra, te je rezolucija u frekvenciji bolja nego kod neparametarskih metoda, naročito u slučajevima kratkih sekvenci raspoloživih podataka.

Posmatraćemo model koji se sastoji od LTI sistema opisanog jednačinom diferencija:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k s(n-k), \tag{9.113}$$

sa realnim koeficijentima i odgovarajuće pobude, $s(n)$, tako da sistem na svom izlazu generiše realizacije slučajnog procesa, $x(n)$, beskonačnog trajanja, čije su

statističke osobine određene raspoloživim podacima prikupljenim iz jedne realizacije slučajnog procesa u konačnom vremenskom intervalu. Budući da se ograničavamo na analizu slučajnih procesa koji su stacionarni u širem smislu i ergodični, opravdano je pretpostaviti da sistem pobuđujemo bijelim šumom $\mathbf{S}_n$. Slučajni proces se naziva *bijeli šum* ako njegova očekivana vrijednost ne zavisi od vremena i jednaka je nuli, a autokorelaciona sekvenca ima vrijednost jednaku nuli u svakom vremenskom trenutku osim u nuli, tj. $r_{\mathrm{SS}}(n)=\sigma_{\mathrm{S}}^2\delta(n)$. U slučaju da je bijeli šum ergodičan proces, očekivana vrijednost svakog člana ansambla je jednaka nuli, a vremenski usrednjena autokorelacija ima samo nulti element različit od nule, $r_{ss}(n)=\sigma_{\mathrm{S}}^2\delta(n)$.

Parametri modela, tj. koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku funkcije prenosa LTI sistema:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}, \tag{9.114}$$

i varijansa σ_{S}^2 pobudnog bijelog šuma se određuju na osnovu poznate autokorelacione sekvence konačnog trajanja. Realizacije slučajnog procesa koje generiše taj sistem su beskonačnog trajanja, što omogućava da se ekstrapolira autokorelaciona sekvenca i na taj način poboljša rezolucija u frekvenciji prilikom procjene spektralne gustine snage slučajnog procesa. Postupak uključuje tri koraka: (1) procjenu autokorelacione sekvence, najčešće na osnovu konačnog trajanja jedne realizacije slučajnog procesa, (2) modeliranje signala i (3) izražavanje spektralne gustine snage slučajnog procesa preko parametara modela.

Funkcija prenosa LTI sistema u modelu opšteg oblika je data sa (9.114). Model sa LTI sistemom naziva se *model autoregresivne klizeće srednje vrijednosti* (eng. *AutoRegressive Moving-Average* - ARMA) reda (p,q) ako su $A(z)\neq 1$ i $B(z)\neq 1$. U slučaju da je $A(z)\neq 1$ i $B(z)=1$ radi se o *autoregresivnom* (eng. *AutoRegressive* - AR) *modelu* reda (p), a kod *modela klizeće srednje vrijednosti* (eng. *Moving-Average* - MA)

reda (q) je $A(z)=1$ i $B(z)\neq 1$. Uobičajeno se za ove modele koriste kratki nazivi: ARMA(p,q) za ARMA model reda (p,q), AR (p) za AR model reda (p) i MA (q) za MA model reda(q). AR model je pogodniji kada u slučajnim procesima postoje dugoročne korelacije. Budući da se prošle vrijednosti duže koriste u modeliranju signala, bolje modelira trendove i strukture u podacima. S duge strane, MA model ima prednosti u situacijama gdje su signali podložni kratkoročnim poremećajima. Pored toga, MA model je jednostavniji za implementaciju. ARMA model kombinuje prednosti oba modela i koristi ih za bolje modeliranje signala sa različitim tipovima zavisnosti.

9.4.1 Modeliranje signala

Odziv LTI sistema sa impulsnim odzivom $h(n)$ i frekvencijskom karakteristikom $H\left(e^{j\omega}\right)$ na jedan član ansambla $s(n)$ nekog stacionarnog slučajnog procesa $\mathbf{S}_n$ je slučajni signal $x(n)$:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)s(n-k). \tag{9.115}$$

Sve realizacije nekog ansambla, kada se posmatraju u jednom trenutku, predstavljaju slučajnu promjenljivu čiji indeks odgovara tom trenutku. Stoga prilikom statističkog usrednjavanja izlaznog signala, u izrazu za konvoluciju mijenjamo $s(n-k)$ sa S_{n-k}. Imajući to u vidu, očekivana vrijednost stacionarnog slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$ na izlazu modela je:

$$\mu_{\mathrm{X}}=E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)S_{n-k}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E\left[S_{n-k}\right]=\mu_{\mathrm{S}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) , \tag{9.116}$$

koja može da se iskaže i kao:

$$\mu_{\mathrm{X}}=\mu_{\mathrm{S}}H\left(e^{j0}\right), \tag{9.117}$$

jer je:

$$H\left(e^{j0}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\Bigg|_{\omega=0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k). \tag{9.118}$$

Autokorelaciona sekvenca slučajnog procesa na izlazu LTI sistema:

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{XX}}(m)&=E\left[X_nX_{n+m}\right]= \\ &=E\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)S_{n-k}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(j)S_{n+m-j}\right)\right]= \\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(k)h(j)E\left[S_{n-k}S_{n+m-j}\right]= \\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(k)h(j)r_{\mathrm{SS}}(m+k-j)\ , \end{aligned} \tag{9.119}$$

kod modela pobuđenog bijelim šumom, kod koga je $r_{\mathrm{SS}}(k)=\sigma_{\mathrm{S}}^2\delta(k)$, postaje:

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{XX}}(m)&=\sigma_{\mathrm{S}}^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(k)h(j)\delta(m+k-j)= \\ &=\sigma_{\mathrm{S}}^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(j)\delta(m+k-j)= \\ &=\sigma_{\mathrm{S}}^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)h(m+k)\ . \end{aligned} \tag{9.120}$$

Spektralna gustina snage slučajnog procesa na izlazu LTI sistema:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{X}}\left(e^{j\omega}\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_{\mathrm{XX}}(m)e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)r_{\mathrm{SS}}(m+k-l)\right]e^{-j\omega m}= \\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_{\mathrm{SS}}(m+k-l)e^{-j\omega m}\right]\Bigg|_{p=m+k-l}= \\ &=\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty}r_{\mathrm{SS}}(p)e^{-j\omega p}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)e^{-j\omega l}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{j\omega k}\right]= \\ &=\Gamma_{\mathrm{S}}\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\Gamma_{\mathrm{S}}\left(e^{j\omega}\right), \end{aligned} \tag{9.121}$$

za model pobuđen bijelim šumom postaje:

$$\Gamma_{\mathrm{X}}\left(e^{j\omega}\right)=\sigma_{\mathrm{S}}^{2}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}, \tag{9.122}$$

jer je:

$$\Gamma_{\mathrm{S}}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{SS}}(m) e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_{\mathrm{S}}^{2} \delta(m) e^{-j\omega m}=\sigma_{\mathrm{S}}^{2}. \tag{9.123}$$

Parametri modela, tj. koeficijenti a_k, $k=1,2,\ldots,p$ i b_k, $k=0,1,\ldots,q$ polinoma u brojniku i nazivniku funkcije prenosa (9.114) i varijansa σ_{S}^{2} bijelog šuma na ulazu modela se određuju na osnovu poznate autokorelacione sekvence slučajnog procesa konačnog trajanja. S tim ciljem, pomnožimo jednačinu diferencija (9.113) sa $x(n-m)$ i uradimo statističko usrednjavanje:

$$E\left[X_{n} X_{n-m}\right]=-\sum_{k=1}^{p} a_{k} E\left[X_{n-k} X_{n-m}\right]+\sum_{k=0}^{q} b_{k} E\left[S_{n-k} X_{n-m}\right], \tag{9.124}$$

pa dobijamo izraz:

$$r_{\mathrm{XX}}(m)=-\sum_{k=1}^{p} a_{k} r_{\mathrm{XX}}(m-k)+\sum_{k=0}^{q} b_{k} r_{\mathrm{SX}}(m-k), \tag{9.125}$$

u kome osim autokorelacione sekvence figuriše i kroskorelaciona sekvenca $r_{\mathrm{SX}}(m)$ koja nije eksplicitno poznata. Kako bismo bili u mogućnosti da odredimo parametre modela, izrazićemo kroskorelacionu sekvencu $r_{\mathrm{SX}}(m)$ preko impulsnog odziva i varijanse pobudnog bijelog šuma.

Pretpostavićemo da je LTI sistem kauzalan. Kroskorelaciona sekvenca $r_{\mathrm{SX}}(m)$ koja figuriše u (9.125) se može izraziti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{SX}}(m)&=r_{\mathrm{XS}}(-m)=E\left[X_{n} S_{n+m}\right]=E\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k) S_{n-k}\right) S_{n+m}\right]= \\ &=\sum_{k=0}^{\infty} h(k) E\left[S_{n-k} S_{n+m}\right]=\sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{\mathrm{SS}}(m+k)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sigma_{\mathrm{S}}^{2} \delta(m+k). \end{aligned} \tag{9.126}$$

Za LTI sisteme sa realnim vrijednostima impulsnog odziva dobijamo da je:

$$r_{\mathrm{SX}}(m)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sigma_{\mathrm{S}}^{2} \delta(m+k)=\begin{cases}0, & m>0, \\ \sigma_{\mathrm{S}}^{2} h(-m), & m \leq 0,\end{cases} \tag{9.127}$$

pa druga suma u (9.125) poprima oblik:

$$\sum_{k=0}^{q} b_k r_{\mathrm{SX}}(m-k) = \begin{cases} 0, & m > q, \\ \sigma_{\mathrm{S}}^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h(-m+k), & 0 \le m \le q. \end{cases} \tag{9.128}$$

Budući da je $r_{\mathrm{XX}}(-m) = r_{\mathrm{XX}}(m)$, dovoljno je posmatrati poslednji izraz za $0 \le m \le q$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{S}}^2 \sum_{k=0}^{q} b_k h(-m+k) \Big|_{l=-m+k} &= \sigma_{\mathrm{S}}^2 \sum_{l=-m}^{q-m} b_{m+l} h(l) \Big|_{h(l)=0,\, l<0} = \\ &= \sigma_{\mathrm{S}}^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{m+k} h(k),\ 0 \le m \le q\ . \end{aligned} \tag{9.129}$$

Konačno je:

$$r_{\mathrm{XX}}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{\mathrm{XX}}(m-k), & m > q, \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{\mathrm{XX}}(m-k) + \sigma_{\mathrm{S}}^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{m+k} h(k), & 0 \le m \le q, \\ r_{\mathrm{XX}}(-m), & m < 0. \end{cases} \tag{9.130}$$

Dobijena relacija (9.130) uspostavlja vezu parametara ARMA modela a_k $k = 1,2,\ldots,p$, b_k, $k = 0,1,\ldots,q$ i σ_{S}^2 sa autokorelacionom sekvencom $r_{\mathrm{XX}}(m)$.

9.4.1.1 AR model

AR model, kod koga je $q = 0$, je specijalni slučaj ARMA modela. Svi koeficijenti b_k, $k = 1,2,\ldots,q$ su jednaki nuli, dok je $b_0 = 1$. Sistem jednačina (9.130) se svodi na:

$$r_{XX}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k r_{XX}(m-k), & m>0,\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k r_{XX}(m-k)+\sigma_S^2, & m=0,\\ r_{XX}(-m), & m<0.\end{cases} \tag{9.131}$$

Dakle, parametri modela $a_k,\ k=1,2,\ldots,p$ se određuju iz linearnog sistema jednačina (9.131) za $m>0$, koji je u razvijenom obliku dat sa:

$$\begin{bmatrix} r_{XX}(0) & r_{XX}(-1) & \cdots & r_{XX}(-p+1)\\ r_{XX}(1) & r_{XX}(0) & \cdots & r_{XX}(-p+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ r_{XX}(p-1) & r_{XX}(p-2) & \cdots & r_{XX}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}r_{XX}(1)\\ r_{XX}(2)\\ \vdots\\ r_{XX}(p)\end{bmatrix} \tag{9.132}$$

dok se varijansa ulaznog bijelog šuma određuje iz (9.131) za $m=q$, na osnovu:

$$\sigma_S^2=r_{XX}(0)+\sum_{k=1}^{p}a_k r_{XX}(-k). \tag{9.133}$$

Sistem linearnih jednačina (9.132) je poznat pod nazivom *Jul* (Udny Yule) - *Volkerove* (Gilbert Walker) *jednačine*. Kombinovanjem (9.132) i (9.133) dobijamo linearni sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} r_{XX}(0) & r_{XX}(-1) & r_{XX}(-2) & \cdots & r_{XX}(-p)\\ r_{XX}(1) & r_{XX}(0) & r_{XX}(-1) & \cdots & r_{XX}(-p+1)\\ r_{XX}(2) & r_{XX}(1) & r_{XX}(0) & \cdots & r_{XX}(-p+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ r_{XX}(p) & r_{XX}(p-1) & r_{XX}(p-2) & \cdots & r_{XX}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_S^2\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \tag{9.134}$$

iz koga određujemo parametre modela. Primijetimo da su za određivanje modela potrebne samo vrijednosti autokorelacione sekvence $r_{XX}(m)$ za $0\le m\le p$. Umjesto nepoznate stvarne autokorelacione sekvence $r_{XX}(m)$ koristi se procjena

vremenski usrednjene autokorelacione sekvence $\hat{r}_{xx}(m)$ za $0 \le m \le p$, koja može da se dobije posmatranjem jedne realizacije slučajnog procesa u kratkom vremenskom intervalu, pa se procijenjene vrijednosti parametara modela $\hat{a}_k,\ k = 1,2,\ldots,p$ i $\hat{\sigma}_S^2$ određuju iz:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{xx}(0) & \hat{r}_{xx}(-1) & \hat{r}_{xx}(-2) & \cdots & \hat{r}_{xx}(-p) \\ \hat{r}_{xx}(1) & \hat{r}_{xx}(0) & \hat{r}_{xx}(-1) & \cdots & \hat{r}_{xx}(-p+1) \\ \hat{r}_{xx}(2) & \hat{r}_{xx}(1) & \hat{r}_{xx}(0) & \cdots & \hat{r}_{xx}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{r}_{xx}(p) & \hat{r}_{xx}(p-1) & \hat{r}_{xx}(p-2) & \cdots & \hat{r}_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_S^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (9.135)$$

Jednom kad se na osnovu $\hat{r}_{xx}(m)$ odrede procijenjene vrijednosti parametara $\hat{a}_k,\ k = 1,2,\ldots,p$ i varijanse $\hat{\sigma}_S^2$ pobudnog bijelog šuma, model na svom izlazu generiše slučajni signal proizvoljnog trajanja, na osnovu koga može da se odredi ekstrapolirana autokorelaciona sekvenca. Kad se sistem jednačina (9.135) rješava uobičajenim postupkom Gausove eliminacije približan broj operacija je $O(N^3)$. Kako je autokorelaciona matrica u (9.135) Teplicova (Otto Toeplitz), invertovana matrica se efikasno pronalazi Levinson (Aleksej Petrovich Levinson) - Durbinovim (Rudolf Durbin) algoritmom, pa se broj operacija može smanjiti na $O(N^2)$.

9.4.1.2 MA model

MA model je takođe specijalni slučaj ARMA modela sa $p = 0$, što znači da su svi koeficijenti $a_k,\ k = 1,2,\ldots,p$ jednaki nuli. Za $p = 0$ jednačina diferencija modela (9.113) se svodi na:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k s(n-k), \qquad (9.136)$$

odakle slijedi da je:

$$h(k) = b_k,\ k = 0,1,\ldots,q\ . \tag{9.137}$$

Na osnovu (9.130) i (9.137) dolazimo do veze autokorelacione sekvence $r_{XX}(m)$ sa parametrima $b_k,\ k = 0,1,\ldots,q$ i σ_S^2 MA modela:

$$r_{XX}(m) = \begin{cases} 0, & m > q \\ \sigma_S^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k b_{m+k}, & 0 \le m \le q \\ r_{XX}(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{9.138}$$

U praktičnim primjenama red (q) MA modela je relativno velik. Ako broj tačaka u kojima je poznata autokorelaciona sekvenca nije dovoljan za određivanje parametara MA modela na osnovu (9.138), problem se može prevazići tako da se prvo odrede parametri $\hat{a}_k,\ k = 1,2,\ldots,p$ i $\hat{\sigma}_S^2$ AR modela, pa se dobijeni AR model koristi za generisanje procjene nedostajućih vrijednosti autokorelacione sekvence $\hat{r}_{xx}(m)$. Te vrijednosti se, umjesto stvarnih vrijednosti $r_{XX}(m)$, koriste u izrazu (9.138). za dobijanje procijenjene vrijednosti parametara $\hat{b}_k,\ k = 0,1,\ldots,q$ MA modela:

$$\hat{\sigma}_S^2 \sum_{k=0}^{q-m} \hat{b}_{m+k}\hat{b}_k = \hat{r}_{xx}(m),\ 0 \le m \le q\ . \tag{9.139}$$

Određivanje parametara MA modela iz (9.139) je težak zadatak jer je posmatrani sistem jednačina nelinearan.

9.4.1.3 ARMA model

Parametri $a_k,\ k = 1,2,\ldots,p$ ARMA(p,q) modela se mogu odrediti iz (9.130) za $m > q$. Tako dobijamo linearni sistem jednačina, koji se u razvijenom obliku zapisuje kao:

$$\begin{bmatrix} r_{XX}(q) & r_{XX}(q-1) & \cdots & r_{XX}(q+1-p) \\ r_{XX}(q+1) & r_{XX}(q) & \cdots & r_{XX}(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{XX}(q+p-1) & r_{XX}(q+p-2) & \cdots & r_{XX}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{XX}(q+1) \\ r_{XX}(q+2) \\ \vdots \\ r_{XX}(q+p) \end{bmatrix}. \quad (9.140)$$

Za određivanje parametara $b_k,\ k=0,1,\ldots,q$ $\mathrm{ARMA}(p,q)$ modela koristi se sistem jednačina:

$$\sigma_S^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{m+k} h(k) = r_{XX}(m) + \sum_{k=1}^{p} a_k r_{XX}(m-k),\ 0 \le m \le q, \quad (9.141)$$

nakon što su procijenjeni parametri $a_k,\ k=1,2,\ldots,p$ i σ_S^2. Traženi parametri $b_k,\ k=0,1,\ldots,q$ zavise od impulsnog odziva sistema i obrnuto, pa je njihovo određivanje teško, jer je posmatrani sistem jednačina (9.141) nelinearan. U (9.140) i (9.141) se umjesto $r_{XX}(m)$ uvrštavaju procijenjene vrijednosti vremenski usrednjene autokorelacione sekvence, označene sa $\hat{r}_{xx}(m)$.

9.4.2 Procjena spektralne gustine snage slučajnih procesa modeliranjem signala

Za procjenu spektralne gustine snage pomoću modela signala potrebna su tri koraka: (1) procjena autokorelacione sekvence iz raspoloživih podataka, (2) određivanje parametara modela i (3) uspostavljanje veze između spektralne gustine snage slučajnog procesa i parametara modela. Prva dva koraka su već opisana u dijelu koji se bavi modeliranjem signala. Kada su određeni parametri modela, na njegovom izlazu se generišu slučajni signali beskonačnog trajanja, čije su autokorelacione sekvence ekstrapolirane do beskonačnosti, u odnosu na autokorelacionu sekvencu procijenjenu iz raspoloživih podataka. Spektralna gustina snage slučajnog procesa se sada može procijeniti koristeći autokorelacionu sekvencu beskonačnog trajanja i iskazati preko parametara modela. Najčešće se koristi AR model, jer se polovima lako modelira spektar sa istaknutim maksimumima, što je vrlo čest slučaj izgleda spektra u praksi. Osim

toga, određivanje parametara AR modela je jednostavnije nego određivanje parametara MA i ARMA modela. ARMA model se koristi kada osim istaknutih maksimuma treba da modelujemo i istaknute minimume spektra. MA model je pogodan za modelovanje spektra sa istaknutim minimumima i bez istaknutih maksimuma, što se rijetko javlja u praktičnim primjenama. Nakon što se donese odluka o tipu modela, potrebno je pronaći i odgovarajući red modela. Izbor reda modela je veoma težak zadatak, a korištenje neodgovarajućeg reda modela dovodi do velikih grešaka pri procjeni spektralne gustine snage slučajnog procesa. Ako je red modela prenizak, procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa biće suviše glatka i može se desiti da bitni detalji spektra ne budu vidljivi. Nasuprot tome, previsok red modela, osim što je računski zahtjevan, može dovesti do toga da se u procjeni spektralne gustine snage pojavljuju istaknuti ekstremi koji ne opisuju slučajni proces, već su posljedica samog modeliranja. Razmatranje načina za određivanje reda modela prevazilazi okvire ove knjige. Napomenućemo samo da se jedan od najjednostavnijih pristupa određivanju reda modela zasniva na posmatranju srednje kvadratne greške odstupanja od raspoloživih podataka, tako što se red modela povećava sve dok opadanje ove greške ne počne značajno da se usporava.

9.4.2.1 Procjena spektralne gustine snage AR procesom

Autoregresivni proces reda p se generiše LTI sistemom koji je opisan jednačinom diferencija:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k \hat{x}(n-k) + \hat{s}(n) \tag{9.142}$$

i pobuđen bijelim šumom čija je varijansa, $\hat{\sigma}_{\mathbf{S}}^2$, kao i parametri $\hat{a}_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, procijenjena u procesu modeliranja signala na osnovu procjene autokorelacione sekvence $r_{\mathbf{XX}}(m)$ za $0 \le m \le p$. Funkcija prenosa LTI sistema $\mathrm{AR}(p)$ modela je:

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k z^{-k}}, \tag{9.143}$$

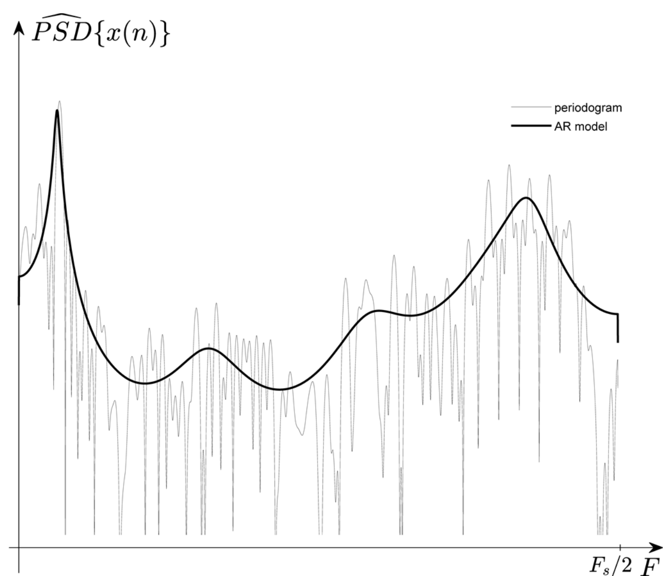
a frekvencijska karakteristika:

$$\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_k e^{-j\omega k}}. \qquad (9.144)$$

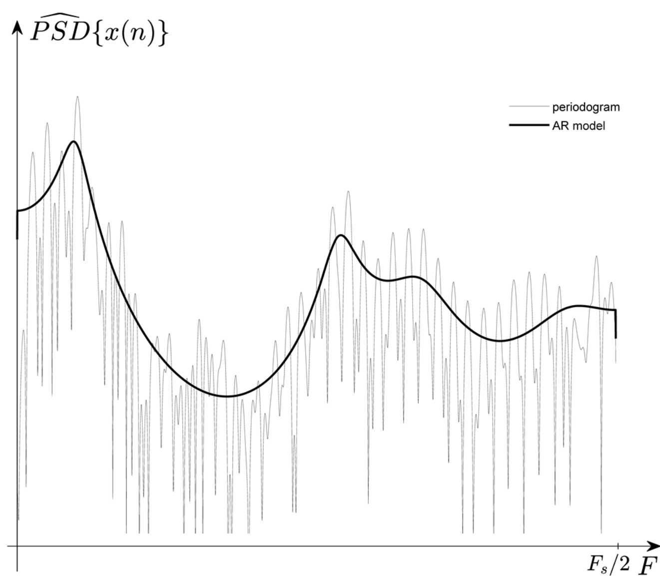
Spektralna gustina snage data sa (9.122) postaje:

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{x}}^{AR}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\hat{\sigma}_{\mathbf{s}}^2}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_k e^{-j\omega k}\right|^2}. \qquad (9.145)$$

Procjena spektralne gustine snage AR procesom daje bolje rezultate od neparametarskih metoda kada analiziramo signale sa spektralnim pikovima na određenim frekvencijama i relativno glatkim spektrom između njih. Takvi su sinusni signali uronjeni u šum i govorni signali. Prilikom govora, različiti oblici i položaji usta, jezika, usana i ždrijela stvaraju rezonancije koje se manifestuju kao pikovi u spektru signala, dok je spektar relativno gladak između tih pikova. Glavne rezonantne frekvencije ljudskog vokalnog trakta se nazivaju formanti. One mogu pomoći pri razlikovanju različitih samoglasnika i nekih suglasnika u govoru. Pri analizi govornog signala izdvajamo kratke segmente, tipično između 10 i 30 milisekundi, unutar kojih se može smatrati da se statističke osobine, poput srednje vrijednosti i varijanse, ne mijenjaju u vremenu. Dva najniža formanta su najvažnija za prepoznavanje samoglasnika. Prvi formant zavisi od visine položaja jezika i otvorenosti usana. Što je jezik više podignut prema nepcu vokalni trakt je kraći, pa je prvi formant niži. Drugi formant je vezan sa položajem jezika naprijed/nazad i zaobljenošću usana. Na primjer, kod samoglasnika "i" jezik je postavljen visoko u usnoj šupljini pa je prvi formant jako nizak. Usne nisu nimalo zaobljene i jezik je postavljen naprijed u usnoj šupljini, pa je drugi formant jako visok. Visoke vrijednosti drugog formanta jasno razlikuju "i" od drugih samoglasnika. Za procjenu spektralne gustine snage govornog signala AR modelom praktično je odabrati red modela između 8 i 16. Na slikama 9.6 i 9.7 prikazane su procjene spektralne gustine snage segmenta govornog signala koji odgovaraju samoglasnicima "i" i "e", respektivno, periodogramom i AR modelom reda 10. Zbog srednjeg položaja jezika prilikom izgovora samoglasnika "e" prvi formant je viši nego kod samoglasnika "i". Prilikom izgovora samoglasnika "e" usne su malo zaobljene i jezik malo povučen prema nazad u odnosu na izgovor samoglasnika "i", pa je drugi formant značajno niži. Vidimo da AR model daje spektralnu procjenu snage govornog signala koja jasno ističe formante bez dodatnog šuma koji se pojavljuje u periodogramu.



Slika 9.6 Procjena spektralne gustine snage govornog signala (samoglasnik "i") periodogramom i AR modelom reda 10.



Slika 9.7 Procjena spektralne gustine snage govornog signala (samoglasnik "e") periodogramom i AR modelom reda 10.

9.4.2.2 Procjena spektralne gustine snage MA procesom

Iako je formalna procedura za procjenu spektralne gustine snage slučajnog procesa pomoću $\mathrm{MA}(q)$ modela slična proceduri za procjenu iste pomoću $\mathrm{AR}(p)$ modela, lako se pokaže da ovaj metod nije od značaja, jer se svodi na Blakman-Tjukijevu procjenu spektralne gustine snage. U prvom koraku se vrši procjena autokorelacione sekvence $r_{\mathrm{XX}}(m)$ za $0 \le m \le q$. U drugom koraku trebalo bi odrediti parametre $\mathrm{MA}(q)$ modela iz sistema nelinearnih jednačina (9.139).

Umjesto eksplicitnog izražavanja parametara $\mathrm{MA}(q)$ modela posmatrajmo odmah njihovu vezu sa spektralnom gustinom snage slučajnog procesa. Neka je:

$$D(z) = B(z)B\left(z^{-1}\right) = \sum_{m=-q}^{q} d_m z^{-m}\,, \tag{9.146}$$

gdje je $B(z)$ polinom u brojniku funkcije prenosa LTI sistema $\mathrm{MA}(q)$ modela. Lako se pokaže da je:

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m}\,,\ |m| \le q\,, \tag{9.147}$$

tako da (9.138) poprima oblik:

$$r_{\mathrm{XX}}(m) = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{S}}^2 d_m, & |m| \le q\ , \\ 0, & |m| > q\ . \end{cases} \tag{9.148}$$

Kod svih tipova modela (AR, MA, ARMA) parametri modela se određuju na osnovu polazne procjene $\hat{r}_{xx}(m)$ autokorelacione sekvence čije je trajanje poznato na nekom konačnom intervalu, tako da je modelom generisana ekstrapolirana autokorelaciona sekvenca, koja je na posmatranom intervalu jednaka $\hat{r}_{xx}(m)$. Iz (9.148) vidimo da $\mathrm{MA}(q)$ proces ima autokorelacionu sekvencu $r_{\mathrm{XX}}(m)$ čije su vrijednosti jednake nuli za $|m| > q$. Budući da se za određivanje parametara modela koristi polazna procjena $\hat{r}_{xx}(m)$ autokorelacione

sekvence za $0 \le m \le q$, zaključujemo da MA model generiše zapravo tu istu autokorelacionu sekvencu konačnog trajanja, $r_{\mathbf{XX}}(m) = \hat{r}_{xx}(m),\ 0 \le m \le q$, dok su ekstrapolirane vrijednosti jednake nuli. Zbog toga je procjena spektralne gustine snage pomoću $\mathrm{MA}(q)$ procesa:

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{MA}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-q}^{q} \hat{r}_{xx}(m) e^{-j\omega m}, \tag{9.149}$$

jednaka procjeni koja se dobije Blakman-Tjukijevim metodom kod koga se koristi pravougaona prozorska sekvenca $w(m)$ trajanja $2q+1$:

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{MA}\left(e^{j\omega}\right) = \hat{P}_{x}^{BT}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-q}^{q} \hat{r}_{xx}(m) w(m) e^{-j\omega m}. \tag{9.150}$$

Red modela q se određuje eksperimentalno, povećavajući ga sve dok vrijednosti autokorelacione sekvence na izlazu modela za velike vrijednosti m ne postanu približno jednake nuli. Ukoliko to nije moguće postići sa razumnom veličinom reda modela, preporučuje se korištenje AR ili ARMA modela.

9.4.2.3 Procjena spektralne gustine snage ARMA procesom

Procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa pomoću AR modela se može poboljšati primjenom ARMA modela. Pri tome često dolazi i do smanjenja broja parametara modela. Jednačina diferencija LTI sistema $\mathrm{ARMA}(p,q)$ modela sa procijenjenim parametrima je:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k \hat{x}(n-k) + \sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k s(n-k), \tag{9.151}$$

a njegova funkcija prenosa:

$$\hat{H}(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k z^{-k}}. \tag{9.152}$$

Procjena spektralne gustine snage pomoću $\mathrm{ARMA}(p,q)$ procesa se preko (9.122) izražava sa:

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{ARMA}\left(e^{j\omega}\right)=\hat{\sigma}_{\mathbf{S}}^{2}\frac{\left|\sum_{k=0}^{q}\hat{b}_{k}e^{-j\omega k}\right|^{2}}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}e^{-j\omega k}\right|^{2}}. \tag{9.153}$$

U cilju izbjegavanja rješavanja sistema nelinearnih jednačina pri određivanju parametara ARMA modela, postupak određivanja spektralne gustine snage ARMA procesom se prilagođava specifičnim primjenama. Jedna od najznačajnijih primjena je procjena spektra snage slučajnog procesa narušenog aditivnim bijelim šumom. Pretpostavimo da slučajni proces $\mathbf{X}_n$ možemo modelirati $\mathrm{AR}(p)$ modelom, ali da model nije dovoljno dobar za zašumljenu verziju ovog procesa. Kad je u procesu $\mathbf{X}_n$, čiji se spektar procjenjuje, prisutan aditivni bijeli šum, $\boldsymbol{Y}_n$, varijanse $\sigma_{\mathbf{N}}^{2}$, sa realizacijama $\nu(n)$, proces se modelira na sljedeći način:

$$\hat{z}(n)=\hat{x}(n)+\nu(n)=-\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}\hat{x}(n-k)+\hat{s}(n)+\nu(n). \tag{9.154}$$

Primjenom *z*-transformacije dobijamo:

$$\hat{Z}(z)=\left[-\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}z^{-k}\right]\hat{X}(z)+\hat{S}(z)+Y(z). \tag{9.155}$$

Kako je kod AR modela:

$$\hat{X}(z)=\frac{\hat{S}(z)}{1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}z^{-k}}, \tag{9.156}$$

dobijamo da je:

$$\hat{Z}(z)=\frac{\hat{S}(z)+\left(1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}z^{-k}\right)Y(z)}{1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}z^{-k}}, \tag{9.157}$$

te se radi o ARMA modelu reda (p,p). Procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa pomoću tako formiranog ARMA(p,p) modela je:

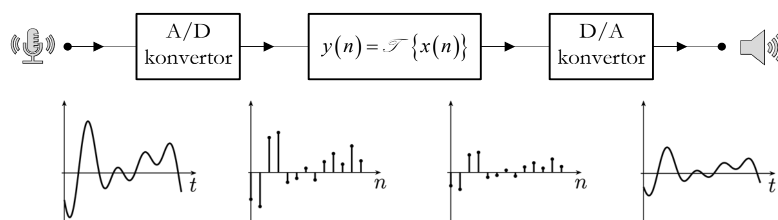
$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{ARMA(p,p)}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\hat{\sigma}_{\mathbf{S}}^{2}}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}e^{-j\omega k}\right|^{2}}+\sigma_{\mathbf{N}}^{2}=\frac{\hat{\sigma}_{\mathbf{S}}^{2}+\sigma_{\mathbf{N}}^{2}\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}e^{-j\omega k}\right|^{2}}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_{k}e^{-j\omega k}\right|^{2}}. \quad (9.158)$$

Parametri a_k, $k=1,2,\ldots,p$ se računaju kao parametri AR(p) modela.

Glava 10

DIGITALIZACIJA I REKONSTRUKCIJA ANALOGNIH SIGNALA

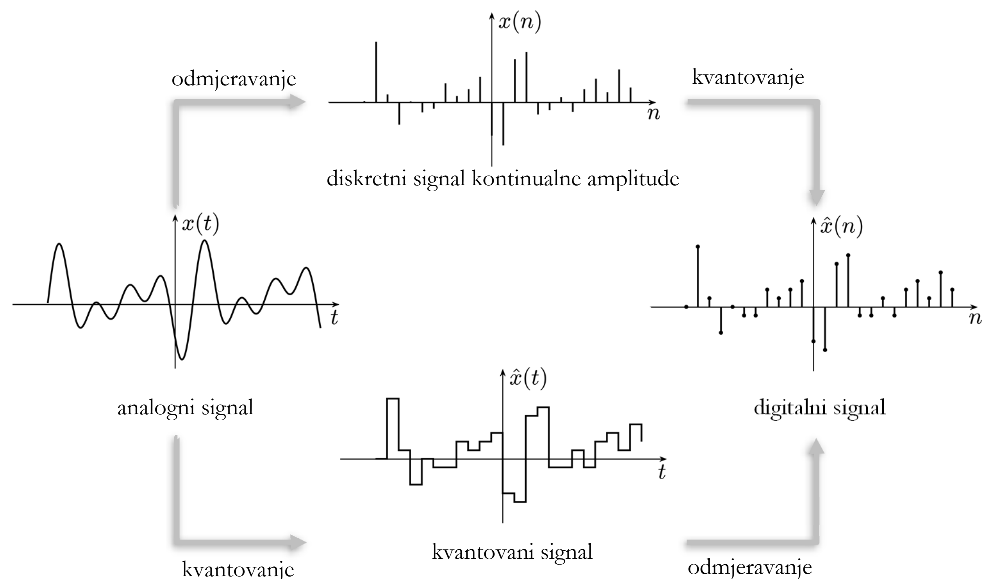
Pomoću naših čula, većinu signala u prirodi doživljavamo kao analogne signale, kontinualne i u vremenu i po amplitudi. Ako želimo iskoristiti prednosti koje pruža digitalni pristup obradi signala, analogni signal je potrebno preslikati u niz brojeva koji nosi informaciju o njegovoj amplitudi u odabranim trenucima vremena. Taj postupak, koji nazivamo *analogno/digitalna (*A/D*) konverzija* ili kratko *digitalizacija signala*, se sastoji od tri koraka: odmjeravanja, kvantovanja i kodovanja signala. *Odmjeravanjem* signala se uzimaju uzorci signala u odabranim vremenskim trenucima, dok se *kvantovanjem* amplituda signala postavlja na neki od unaprijed zadatih amplitudnih nivoa. *Kodovanjem* se odmjeren i kvantovan signal prevodi u niz brojeva koji su zapisani sa konačnim brojem bita. Dobijeni digitalni signal se zatim obrađuje postupcima digitalne obrade signala. Rezultat digitalne obrade signala je novi niz brojeva. U nekim aplikacijama rezultujući digitalni signal je potrebno vratiti u analogni domen, procesom koji nazivamo *digitalno/analogna* (D/A) *konverzija*. Prilikom digitalizacije signala neophodno je



Slika 10. 1 Primjer digitalne obrade analognih signala.

voditi računa da se sve informacije sadržane u analognom signalu, ili bar one koje su nam važne, recimo sa stanovišta ljudske percepcije, očuvaju i u digitalnom obliku signala. U ovom poglavlju ćemo vidjeti pod kojim uslovima je to moguće, te kako realni A/D i D/A konvertori utiču na promjene u spektru signala prilikom njegove digitalizacije i rekonstrukcije analognog signala. Blok šema koja uključuje sve navedene korake digitalne obrade analognih signala prikazana je na Slici 10.1, kroz primjer obrade audio signala. Ako bismo osigurali idealnu digitalizaciju i rekonstrukciju signala, bez gubitka informacija prilikom prelaska iz analognog u digitalni domen i obrnuto, i ako se digitalnom obradom signala vrši samo smanjenje amplitude signala, nakon reprodukcije ćemo sa zvučnika čuti isti zvuk koji smo čuli iz izvora analognog signala, samo utišan. U ovom slučaju dodatne modifikacije signala mogu nastati zbog akustičkih osobina prostora, što nije predmet našeg razmatranja.

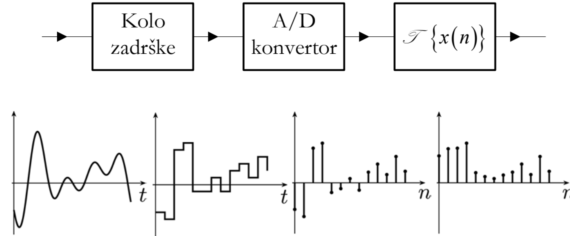
Uz mnogobrojne prednosti koje pruža digitalna obrada kontinualnih signala, koje se uglavnom ogledaju u jednostavnosti implementacije raznovrsnih postupaka obrade, ovaj pristup u poređenju sa obradom u analognom domenu ima i niz nedostataka. Tehnike digitalne obrade analognih signala u realnom vremenu su, zbog vremena potrebnog za izvršavanje algoritama, ograničene na signale koji zauzimaju relativno mali frekvencijski opseg. Pored toga, potreba za A/D i D/A konverzijom čini ovaj pristup nepraktičnim za jednostavne aplikacije. Treba uzeti u obzir da, sa porastom frekvencije na kojima rade, cijene A/D i D/A konvertora rapidno rastu, a potrebno je voditi računa i o njihovoj potrošnji energije.



Slika 10.2 Odmjeravanje i kvantovanje signala.

10.1 Analogno/digitalna konverzija

Gledano sa teorijskog stanovišta, redoslijed izvođenja odmjeravanja i kvantovanja pri analogno/digitalnoj konverziji nije bitan. Moguće je prvo uraditi odmjeravanje signala u vremenu, pa onda kvantovanje, ili kvantovanje analognog signala, pa zatim odmjeravanje u vremenu. Nakon toga se odmjeren i kvantovan signal kodovanjem prevodi u sekvencu brojeva, tj. digitalni signal. Ta dva pristupa su prikazana na Slici 10.2. Značajno je napomenuti da u toku procesa kad A/D konvertor vrši pretvaranje električnih vrijednosti u numeričke, amplituda signala ne bi trebalo da se mijenja. Zbog toga se prije analogno - digitalnog konvertora dodaje *kolo zadrške* (eng. S*ample and Hold* - S/H), kao na Slici 10.3, koje obezbjeđuje približno konstantnu amplitudu signala u vremenskim intervalima njenog pretvaranja u numeričke vrijednosti.



Slika 10.3 Dodavanje kola zadrške prije A/D konvertora.

10.1.1 Odmjeravanje signala u vremenskom domenu

Odmjeravanje signala u vremenskom domenu matematički modeliramo množenjem signala sa povorkom Dirakovih impulsa:

$$x_s(t) = x(t)\cdot\tilde{\delta}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t), \qquad (10.1)$$

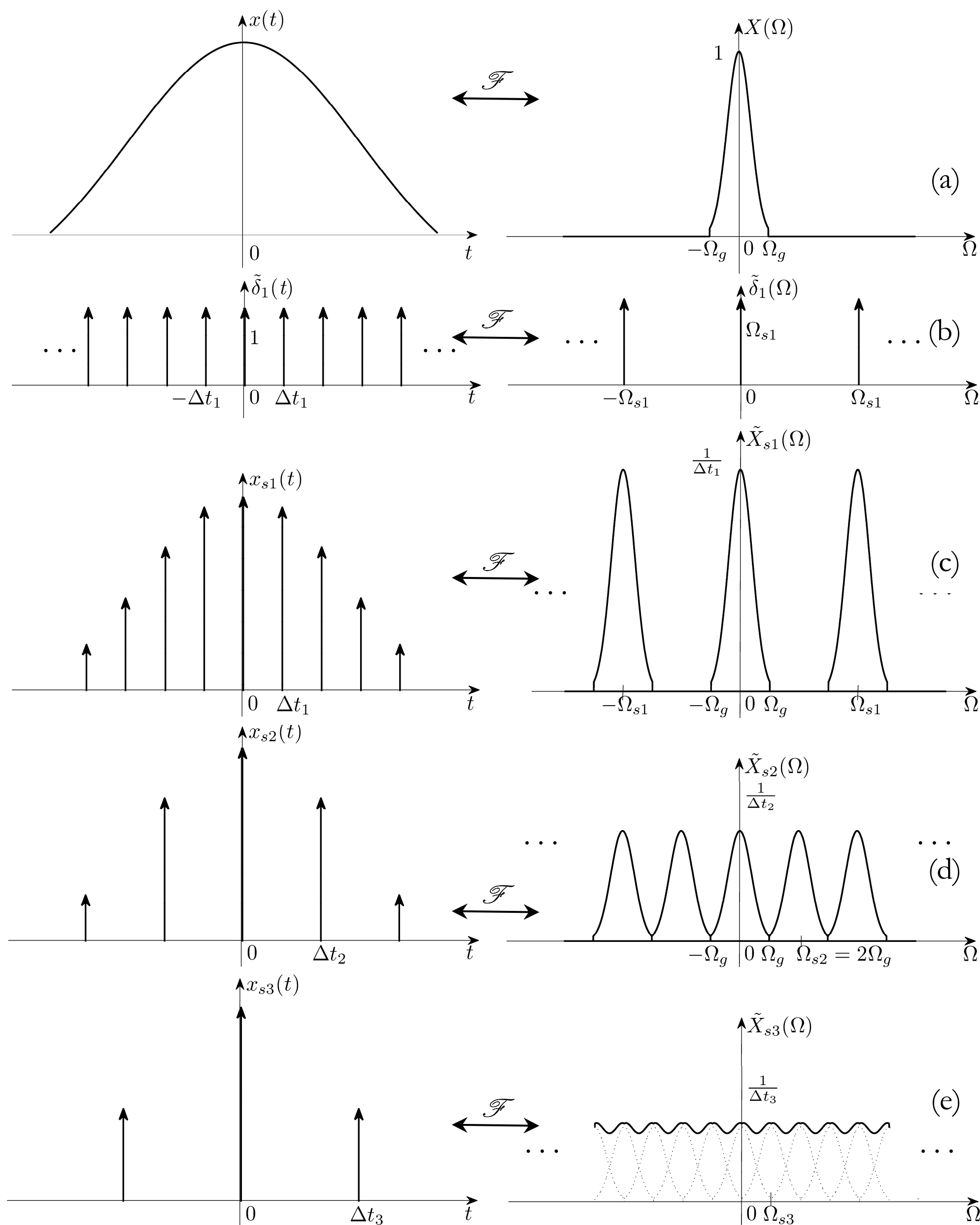
kao što je ilustrovano na Slici 10.4, za tri različita koraka odmjeravanja: Δt_1, Δt_2 i Δt_3. Signal koji nastaje procesom odmjeravanja zovemo *odmjereni signal*. Potrebno je naglasiti da je odmjereni signal kontinualna funkcija, jer su njegove vrijednosti poznate u svakom trenutku vremena. Odmjereni signal je zapravo povorka Dirakovih impulsa u trenucima odmjeravanja $t = k\Delta t$, čije su jačine udara jednake vrijednostima signala u tim vremenskim trenucima. Za ostale vrijednosti vremenske nezavisne promjenljive odmjereni signal je jednak nuli.

Furijeova transformacija odmjerenog signala je data sa:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_s(\Omega) &= \mathscr{F}\{x_s(t)\} = \mathscr{F}\{x(t)\cdot\tilde{\delta}(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{x(t)\} * \mathscr{F}\{\tilde{\delta}(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * \Omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\Omega-k\Omega_s).\end{aligned} \qquad (10.2)$$

Primjećujemo da se spektar odmjerenog signala periodično ponavlja sa periodom koji je jednak učestanosti odmjeravanja:

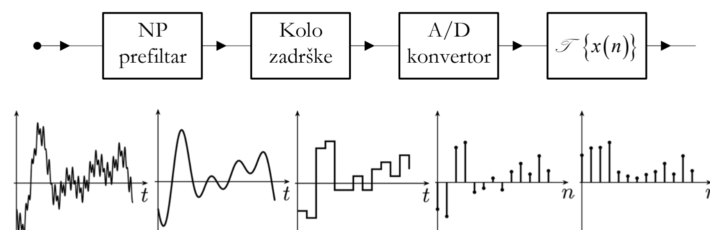
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}. \qquad (10.3)$$



Slika 10.4 Odmjeravanje signala: (a) kontinualni signal; (b) povorka Dirakovih impulsa; (c) signal odmjeren sa $\Omega_{s1} > 2\Omega_g$, (d) signal odmjeren sa $\Omega_{s2} = 2\Omega_g$ i (d) signal odmjeren sa $\Omega_{s3} < 2\Omega_g$. Lijevo su prikazani signali u vremenskom domenu, a desno su njihovi spektri.

Osnovni cilj prilikom odmjeravanja signala je da se sačuva što više informacija sadržanih u signalu, kako bi se na osnovu njegovih odmjeraka mogao što bolje rekonstruisati originalni kontinualni signal. Na osnovu teorije razvoja signala preko ortogonalnih funkcija znamo da je za idealnu rekonstrukciju signala računanjem inverzne transformacije neophodno poznavanje svih spektralnih komponenata signala, dok je za aproksimaciju signala moguće koristiti uži frekvencijski opseg, pri čemu se dodavanjem visokofrekvencijskih komponenti smanjuje srednja kvadratna greška prilikom rekonstrukcije signala.

Kao posljedica odmjeravanja signala, u frekvencijskom domenu dolazi do periodičnog ponavljanja spektra kontinualnog signala. Pri tome se može desiti da se frekvencijske komponente iz jednog perioda signala preklope sa frekvencijskim komponentama iz drugih perioda. Tu pojavu nazivamo *preklapanje spektra* (eng. *aliasing*). Preklapanje spektra se može izbjeći ako je spektar kontinualnog signala ograničen. U praktičnim primjenama često radimo sa signalima za koje možemo smatrati da imaju ograničen spektar. Pod tim uslovom moguće je iz spektra odmjerenog signala izdvojiti spektar kontinualnog signala, te inverznom Furijeovom transformacijom rekonstruisati originalni kontinualni signal. Pretpostavimo da je spektar signala ograničen, tj. da se u spektru signala ne pojavljuju frekvencijske komponente učestanosti većih od Ω_g. Na Slici 10.4 su prikazana tri karakteristična slučaja koja ilustruju šta se dešava sa spektrom odmjerenog signala prilikom promjene učestanosti odmjeravanja. U prvom slučaju, prikazanom na Slici 10.4(c), učestanost odmjeravanja je bar dva puta veća od gornje granične učestanosti Ω_g kontinualnog signala, dok je u drugom slučaju, datom na Slici 10.4(d), jednaka $2\Omega_g$. U ova dva slučaja ne dolazi do preklapanja u spektru odmjerenog signala. Do preklapanja u spektru odmjerenog signala dolazi kada je učestanost odmjeravanja manja od $2\Omega_g$, kao na Slici 10.4(e). Sa Slike 10.4 je jasno vidljivo da je idealna rekonstrukcija spektra kontinualnog signala, a samim tim i rekonstrukcija originalnog kontinualnog signala bez gubitka informacija, moguća ako je učestanost odmjeravanja dovoljno velika, tj. u slučajevima kada je $\Omega_s \geq 2\Omega_g$. Ovaj uslov naziva se *Nikvistov kriterij*, a učestanost $\Omega_s/2$ je *Nikvistova učestanost.*

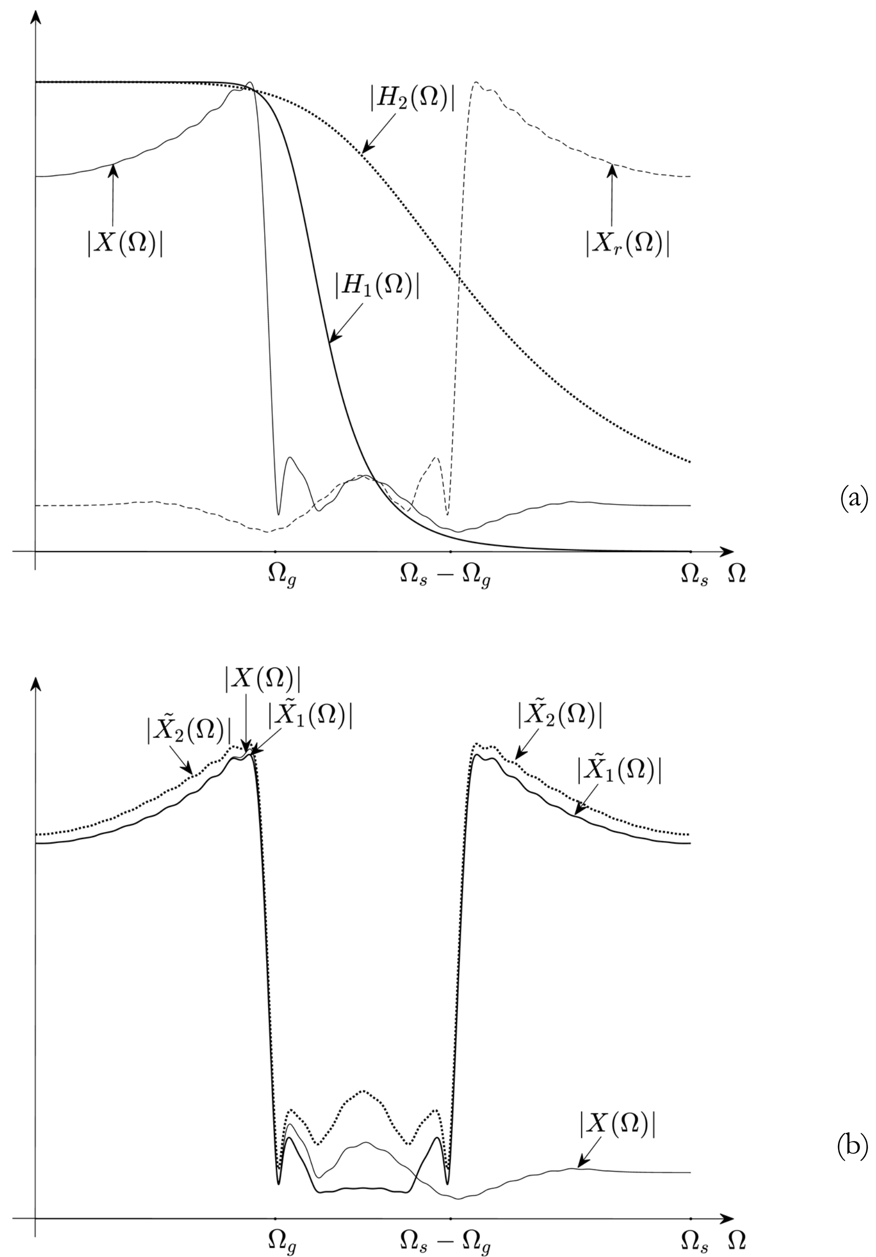


Slika 10.5 Dodavanje niskopropusnog prefiltra za sprečavanje preklapanja spektra.

Da bi se izbjeglo preklapanje spektra, neophodno je, prije same digitalizacije, iz analognog signala ukloniti sve frekvencijske komponente čije su učestanosti veće od polovine učestanosti odmjeravanja. Ovo ograničavanje spektra signala se postiže dodavanjem niskopropusnog (NP) prefiltra, kao na Slici 10.5. Odabir učestanosti odmjeravanja, a samim tim i širine propusnog opsega ovog filtra, se vrši na osnovu poznatih informacija o gornjoj graničnoj učestanosti korisnog dijela signala. Na primjer, pri obradi audio signala uzimamo u obzir da je najviša frekvencija tona koji prosječan slušalac može da čuje oko 20 kHz, čime je određen propusni opseg NP prefiltra, a frekvencija odmjeravanja treba da bude veća od 40 kHz. Prvenstveno zbog neidealnih karakteristika niskopropusnog prefiltra, što ćemo u nastavku izlaganja detaljnije objasniti, kao i drugih tehničkih detalja i standardizacije, u praktičnim realizacijama se za frekvenciju odmjeravanja audio signala bira nešto viša frekvencija odmjeravanja, 44,1 kHz. Ako želimo da audio signal odmjeravamo sa nižom frekvencijom odmjeravanja, kako bismo uštedjeli na memorijskom prostoru i povećali brzinu prenosa signala, u skladu sa tim treba suziti i propusni opseg NP prefiltra. Na taj način iz signala gubimo visokofrekvencijski sadržaj i prilikom njegove reprodukcije ne čujemo visoke tonove.

Pretpostavimo da se korisni dio spektra signala koji se obrađuje nalazi na učestanostima koje su manje od Ω_g. U realnim situacijama, čak i uz primjenu NP prefiltra, spektar signala nije jednak nuli van ovog opsega. Stoga prilikom odmjeravanja signala dolazi do preklapanja spektra, čime se narušava korisni dio

spektra signala. Na Slici 10.6(a) je prikazano preklapanje amplitudnog spektra signala $|X(\Omega)|$ sa dijelom njegove prve replike, $|X_r(\Omega)|$. Da bi se u potpunosti izbjeglo preklapanje spektra signala, niskopropusni prefiltar bi trebao da propušta bez slabljenja sve frekvencijske komponente do učestanosti Ω_g, dok bi slabljenje frekvencijskih komponenti van ovog opsega učestanosti trebalo da bude beskonačno veliko. Takav idealni filtar, sa beskonačno strmom amplitudnom karakteristikom na učestanosti Ω_g, nije moguće realizovati. U praksi bi slabljenje signala koje unosi NP prefiltar za učestanosti $\Omega > \Omega_s - \Omega_g$ trebalo biti dovoljno veliko da replike signala koje se sabiraju sa korisnim dijelom spektra signala budu zanemarljive. Na Slici 10.6(a) su prikazani primjeri amplitudnih karakteristika, $|H_1(\Omega)|$ i $|H_2(\Omega)|$, praktično realizibilnih analognih NP filtara, a na Slici 10.6(b) ilustrovan je njihov uticaj na odstupanje spektra diskretizovanog od spektra kontinualnog signala. Prilikom primjene filtra sa strmijom amplitudnom karakteristikom, $|H_1(\Omega)|$, korisni dio spektra diskretizovanog signala $|\tilde{X}_1(\Omega)|$ ne odstupa značajno od spektra kontinualnog signala, a van tog opsega, do učestanosti $\Omega_s/2$, frekvencijske komponente su oslabljene u odnosu na originalni kontinualni signal. Nasuprot tome, u korisnom dijelu spektra diskretizovanog signala $|\tilde{X}_2(\Omega)|$, gdje je primijenjen filtar sa amplitudnom karakteristikom $|H_2(\Omega)|$, uz istu učestanost odmjeravanja, dolazi do značajnog odstupanja od spektra kontinualnog signala. Zbog neidealne amplitudne karakteristike NP prefiltra, učestanost odmjeravanja se u praktičnim primjenama bira da bude veća od učestanosti propisane Nikvistovim kriterijumom i najčešće iznosi između $2{,}5\Omega_g$ i $4\Omega_g$. Na Slici 10.6(b) je $\Omega_s \approx 2{,}7\Omega_g$. Što je amplitudna karakteristika NP prefiltra lošija učestanost odmjeravanja treba biti veća, jer se sa povećanjem učestanosti odmjeravanja smanjuje preklapanje spektra signala.



Slika 10.6 Projektovanje niskopropusnog prefiltra: (a) specifikacija amplitudne karakteristike filtra i (b) primjer filtriranja.

10.1.2 Kvantovanje signala

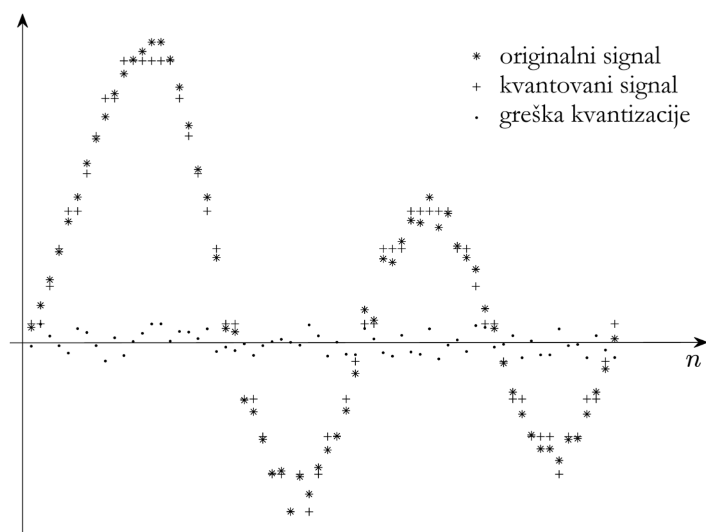
Pri zapisu signala u digitalnom obliku koristi se konačan broj bita, te je za predstavu signala neophodno koristiti konačan broj amplitudnih nivoa, koji će kasnije, u procesu kodovanja, biti predstavljeni kodnim riječima. *Kvantovanje* je ireverzibilan proces mapiranja skupa amplitudnih nivoa signala na konačan manji skup. Signal koji se dobije procesom kvantovanja nazivamo kvantovani signal. Iz kvantovanih nivoa amplitude signala nije moguće rekonstruisati njene originalne vrijednosti. U ovom poglavlju ćemo, za potrebe analize procesa kvantovanja, praviti razliku između diskretnog signala $x(n)$ sa stvarnim nivoima amplitude i kvantovanog signala $\hat{x}(n)$ čiji su nivoi amplitude dobijeni kvantovanjem signala $x(n)$.

Kvantizacioni šum je signal greške kvantovanja i predstavlja razliku amplituda originalnog diskretnog signala $x(n)$ i kvantovanog signala $\hat{x}(n)$, u domenu diskretnog vremena:

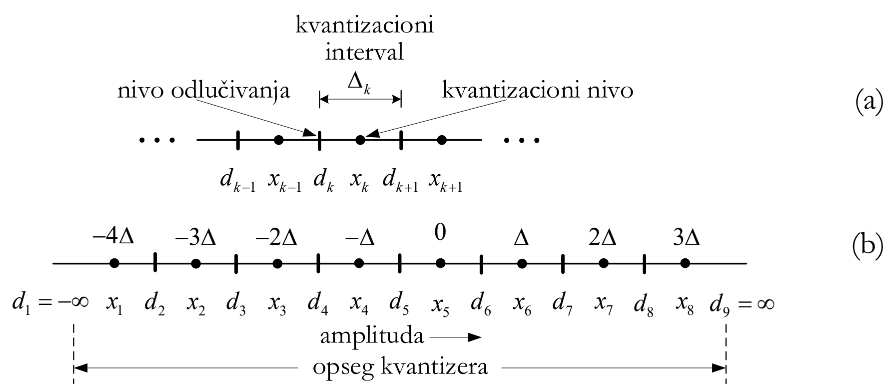
$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n). \tag{10.4}$$

Na Slici 10.7 je prikazan primjer diskretnog signala, od njega dobijenog kvantovanog signala i kvantizacionog šuma.

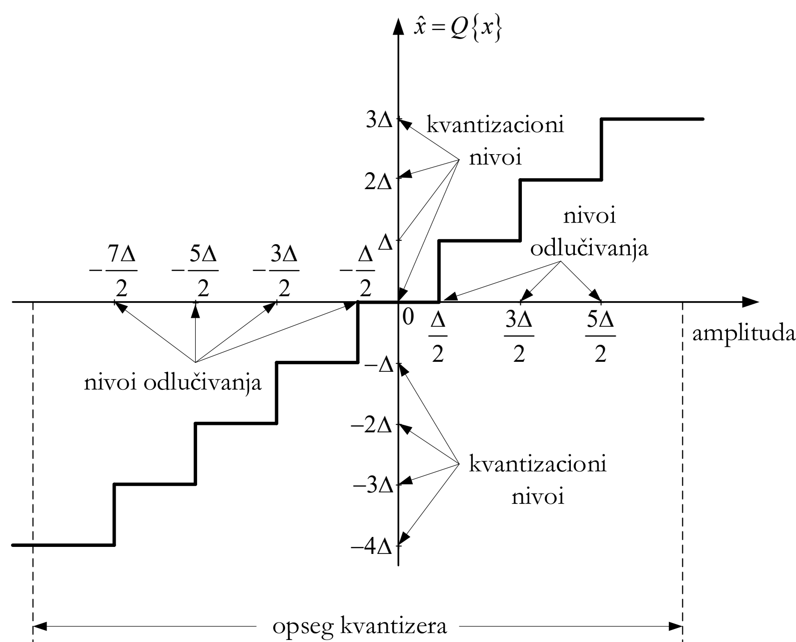
Najjednostavniji način kvantovanja signala je izbor onog kvantizacionog nivoa iz zadatog skupa koji je najbliži stvarnoj amplitudi signala. Opšti postupak kvantovanja se sastoji u odabiru kvantizacionih nivoa i nivoi (pragovi) odlučivanja, kao na Slici 10.8(a). Ako je amplituda signala kojeg kvantujemo u nekom opsegu, koji je ograničen sa dva susjedna nivoa odlučivanja, za amplitudu kvantovanog signala se usvaja kvantizacioni nivo koji se nalazi u tom opsegu. Na Slici 10.8(b) je dinamički opseg signala podijeljen na kvantizacione intervale jednake širine Δ. Izuzimajući prvi i posljednji, nivoi odlučivanja se nalaze na polovini tih intervala, a kvantizacioni nivoi su iz skupa $\{\ldots -3\Delta, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots\}$. Korak kvantovanja ne mora biti fikasan, kao u ovom slučaju, kada se radi o *uniformnoj kvanizaciji*. Ako se dinamički opseg signala podijeli na intervale nejednake širine, i svakom intervalu se dodijeli jedan kvantizacioni nivo, onda govorimo o *neuniformnom kvantovanju*. *Kvantizaciona kriva*,



Slika 10.7 Primjer kvantovanja signala.



Slika 10.8 Kvantovanje signala: (a) kvantizacioni nivoi i nivoi odlučivanja i (b) podjela dinamičkog opsega kvantizera na kvantizacione intervale.



Slika 10.9 Primjer kvantizacione krive kod uniformnog kvantovanja.

čiji je primjer u slučaju uniformnog kvantovanja dat na Slici 10.9, je relacija na osnovu koje se iz originalnih računaju kvantovane amplitude signala:

$$\hat{x}(n) = Q\{x(n)\}. \tag{10.5}$$

Kvantizacioni intervali, u slučaju neuniformnog kvantovanja, biraju se tako da odgovaraju karakteristikama signala, kao što je funkcija distribucije vjerovatnoća pojavljivanja ili perceptualni značaj amplitudnih nivoa. Na primjer, ako je velika vjerovatnoća pojavljivanja niskih, a mnogo manja visokih amplitudnih nivoa, tada kvantizacioni intervali treba da budu uži blizu nule, a sve širi prema većim amplitudama. Na taj način se smanjuje greška kvantovanja za najvjerovatnije amplitude signala. Kada se kvantuju audio signali i slike, niži nivoi amplituda su od većeg perceptualnog značaja, jer su naša čula osjetljivija na promjene jačine zvuka i svjetline na slici kada se radi o malim amplitudama signala. To je dodatni razlog za korištenje neuniformnog kodovanja sa manjom

širinom kvantizacionih intervala u području niskih nego u području visokih amplituda. Kvantizacione krive u ovim slučajevima imaju veću strminu u okolini nule, a sve manji nagib prema krajevima dinamičkog opsega signala.

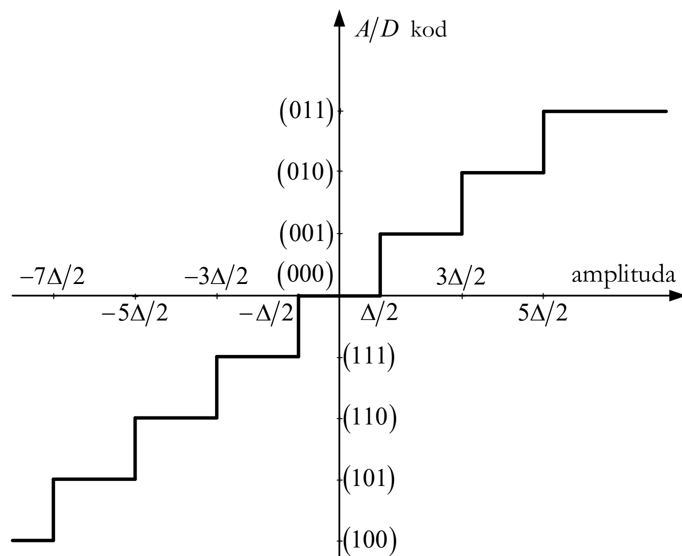
10.1.3 Kodovanje signala

Na kraju procesa A/D konverzije se kvantovanim amplitudnim nivoima signala, po nekoj zakonitosti, pridružuju kodne riječi. Taj proces se naziva kodovanje signala. *Kodne riječi* su nizovi binarnih cifara koji nose informaciju o amplitudnim nivoima signala. Jedan način kodovanja signala je prikazan na Slici 10.10, gdje se kvantizacionim nivoima, dobijenim uniformnim kvantovanjem, dodjeljuju kodne riječi koje direktno opisuju numeričke vrijednsti amplitudnih nivoa. *Linearna impulsna kodna modulacija* (eng. *Linear Pulse Code Modulation* - LPCM) je pojam koji se koristi da jednim imenom označi uniformno kvantovanje i kodovanje signala kod koga se kodne riječi koje odgovaraju susjednim kvantizacionim nivoima razlikuju za jedan. Ako ovakvom procesu kodovanja prethodi kvantovanje koje ne mora nužno biti uniformno, koristi se širi pojam, *impulsna kodna modulacija* (eng. *Pulse Code Modulation* - PCM).

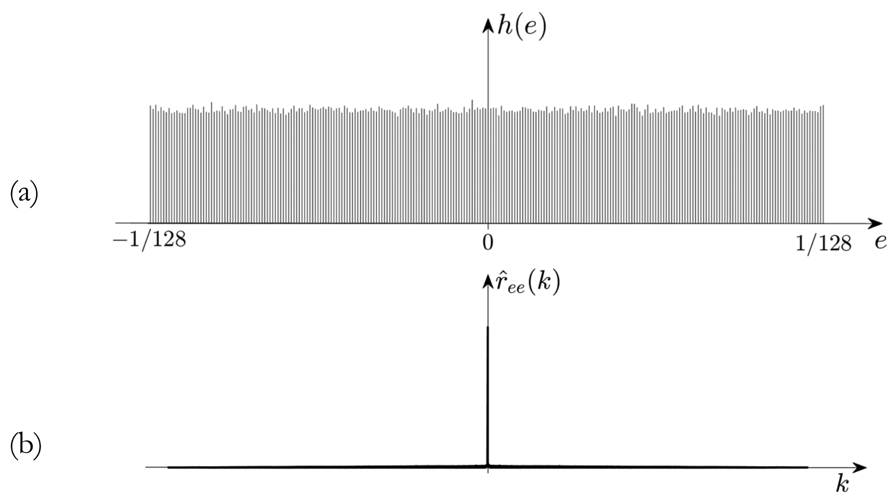
Ako su kvantizacioni nivoi iz skupa $\{\ldots -3\Delta, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots\}$ i ako su nivoi odlučivanja na polovini kvantizacionih intervala jednake širine Δ, za grešku kvantovanja vrijedi da je:

$$-\frac{\Delta}{2} \le e(n) < \frac{\Delta}{2}. \tag{10.6}$$

Primjer histograma i autokorelacione funkcije šuma kvantovanja sa 8 bita su prikazani na Slici 10.11. Procjena autokorelacione funkcije kvantizacionog šuma je jedinični impuls, a njegova spektralna gustina snage je konstantna. Prilikom analize kvantizacionog šuma opravdano je pretpostaviti da je greška kvantovanja uniformno raspodijeljena u opsegu $[-\Delta/2, \Delta/2)$ i modelirati je kao stacionarni bijeli šum. Pretpostavljamo, takođe, da su signal i šum kvantovanja nekorelisani, te da su njihove srednje vrijednosti jednake nuli.



Slika 10.10 Kodovanje amplitude signala.



Slika 10.11 Primjer šuma kvantovanja: (a) histogram i (b) procjena autokorelacione funkcije greške kvantovanja sa 8 bita.

Odnos signal/šum izražen u decibelima je dat sa:

$$SNR = 10\log\frac{P_x}{P_n} = 10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}, \tag{10.7}$$

gdje su P_x i P_n srednje snage, a σ_x^2 i σ_e^2 varijanse signala i šuma kvantovanja, respektivno. Pod navedenim pretpostavkama vrijedi da je:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 p(e)\,de = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2\,de = \frac{\Delta^2}{12}. \tag{10.8}$$

Neka je dinamički opseg signala $2X_m$, gdje su $\pm X_m$ najmanja i najveća moguća vrijednost signala, i neka je b broj bita koji koder koristi za zapis jednog kvantizacionog nivoa. Ako koristimo podjelu dinamičkog opsega na kvantizacione intervale jednake veličine, vrijedi da je:

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^b} = 2^{-b+1}X_m, \tag{10.9}$$

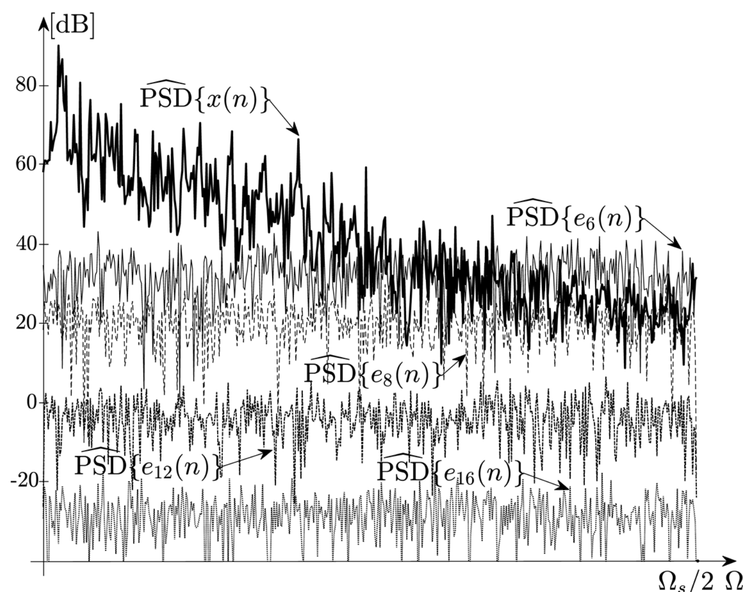
$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b+2}X_m^2}{12}, \tag{10.10}$$

te je odnos signal/šum dat sa:

$$SNR = 10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10\log\frac{12\cdot 2^{2b-2}\sigma_x^2}{X_m^2} \approx 6{,}02b + 4{,}77 - 20\log\frac{X_m}{\sigma_x}. \tag{10.11}$$

Vidimo da svaki dodatni bit kodera povećava *SNR* za oko 6 dB. Time se za isti iznos povećava srednja snaga signala u odnosu na srednju snagu šuma. Taj podatak nam pomaže da dođemo do zaključka o broju bita potrebnom za kodovanje signala.

Na primjer, dinamički opseg audio signala, iskazan kao $20\log X_m$, uglavnom ne prelazi 120 dB. Nula decibela ima zvuk na granici čujnosti, a zvuk preko 120 dB izaziva bol i može dovesti do oštećenja sluha. Primjer spektralne gustine snage audio signala i kvantizacionog šuma pri njegovom kodovanju sa različitim brojem bita prikazan je na Slici 10.12. Maksimalna očitana snaga audio signala je u niskofrekvencijskom opsegu i iznosi oko 90,01 dB, dok je minimalna u



Slika 10.12 Procijenjene spektralne gustine snaga ($\widehat{\mathrm{PSD}}$) audio signala $x(n)$ i šumova kvantovanja sa 6, 8, 12 i 16 bita ($e_6(n)$, $e_8(n)$, $e_{12}(n)$ i $e_{12}(n)$, respektivno).

području visokih frekvencija i iznosi oko 8,64 dB. Zaključujemo da se radi o audio signalu sa velikim dinamičkim opsegom od oko 80 dB. Signal je pojačan tako da se čuju svi tonovi. Ako znamo da zvuk od 50 dB odgovara normalnom govoru, a od 20 dB šapatu, frekvencijska komponenta najmanje snage će se jedva čuti, dok će ton koji odgovara frekvencijskoj komponenti od oko 90 dB biti jako glasan. Kvantizacioni šum bi trebalo da bude ispod praga čujnosti na cijelom frekvencijskom opsegu. Sa Slike 10.12 se vidi da se to skoro postiže već sa kvantovanjem sa 12 bita. Ako bismo audio signal pojačali do praga bola, tako da maksimum spektralne gustine snage ima vrijednost od 120 dB, čuli bismo i šum kvantovanja sa 12 bita, dok bi se šum kvantovanja sa 16 bita na svim frekvencijskim komponentama kretao oko praga čujnosti.

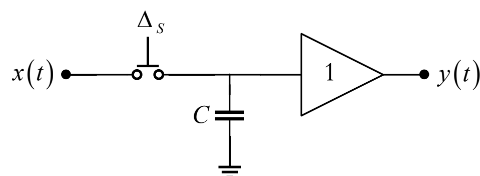
10.1.3 Realni A/D konvertori

U sklopu A/D konvertora se obično nalazi i kolo zadrške, čija je pojednostavljena šema prikazana na Slici 10.13. Već smo pomenuli da je uloga kola zadrške da obezbijedi konstantan nivo signala u toku vremena dok A/D konvertor vrši konverziju električnih veličina u numeričke podatke. Vremenski interval, za vrijeme kojeg je prekidač Δ_S na Slici 10.13 zatvoren, bi trebao da bude dovoljno dug da se kondenzator napuni do nivoa koji je jednak ulaznom naponu. Zahvaljujući velikoj ulaznoj impedansi operacionog pojačavača, nakon otvaranja prekidača napon na kondenzatoru se održava na istom nivou do kraja jednog ciklusa konverzije, za koje vrijeme A/D konvertor napon pretvara u numeričke podatke. Primjer signala na izlazu kola zadrške je prikazan na Slici 10.14. U intervalima označenim sa *S* (eng. *Sample*) signal na izlazu kola zadrške prati oblik ulaznog signala, a u intervalima kad je prekidač otvoren, označenim sa *H* (eng. *Hold*), vrijednost signala na izlazu je približno konstantna.

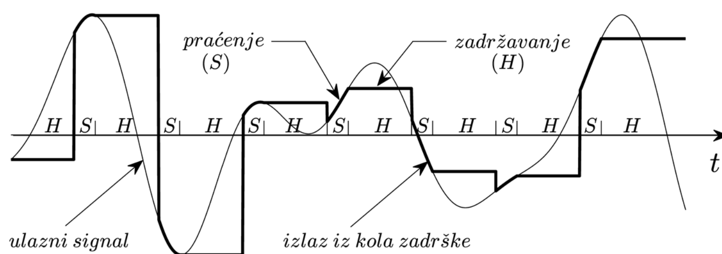
Konverziju naponskih nivoa u numeričke podatke moguće je realizovati na način prikazan na Slici 10.15. Razdjelnikom napona se formira 2^{N-1} naponskih nivoa koji se, koristeći elektronske komparatore, porede sa signalom sa izlaza kola zadrške. Izlazi komparatora se zatim koduju sa N bita.

Kod teorijskog modela A/D konverzije, na ulaz sklopa koji naponske nivoe pretvara u brojeve dolaze Dirakovi impulsi. Vrijednosti digitalnog signala jednake su jačinama udara tih Dirakovih impulsa. Dirakove impulse u praksi nije moguće generisati, već se u svrhu odmjeravanja koriste pravougaoni impulsi jedinične površine i kratkog trajanja, koji djeluju u *H* intervalima sa Slike 10.14. Signal $\tilde{x}_\varepsilon(t)$, koji je dobijen odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ impulsima $p_\varepsilon(t)$ konačne širine ε i njegov spektar, respektivno, dati su sa:

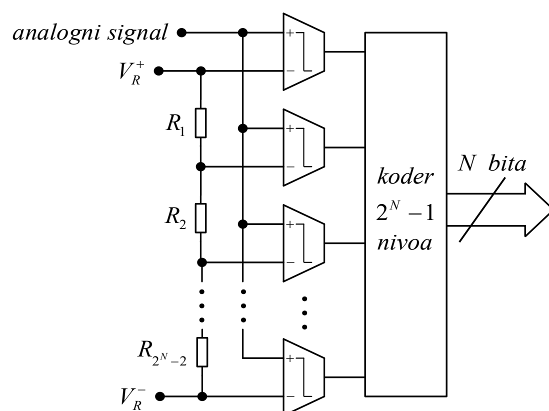
$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = p_\varepsilon(t) * \left[x(t) \cdot \tilde{\delta}(t) \right], \tag{10.12}$$



Slika 10.13 Pojednostavljena šema kola zadrške.



Slika 10.14 Princip rada kola zadrške.



Slika 10.15 Konverzija naponskih nivoa u numeričke podatke.

$$\tilde{X}_{\varepsilon}(\Omega) = P_{\varepsilon}(\Omega) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \Omega_s \tilde{\delta}(\Omega) \right] =$$
$$= \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}\Omega}{\frac{\varepsilon}{2}\Omega} e^{-j\frac{\varepsilon}{2}\Omega} \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s) \right], \tag{10.13}$$

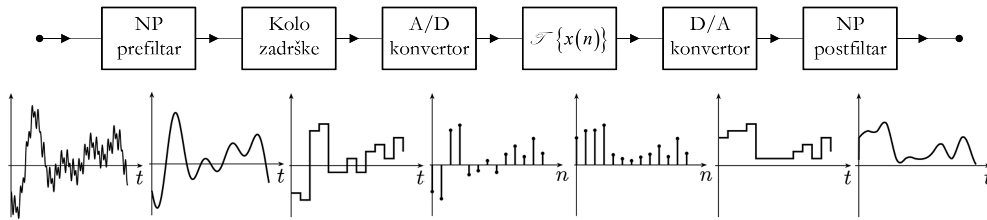
pri čemu je $X(\Omega)$ spektar kontinualnog signala $x(t)$. Vidimo da će spektar signala odmjerenog impulsima konačne širine, $\tilde{X}_{\varepsilon}(\Omega)$, biti sličniji spektru signala odmjerenog Dirakovim impulsima ako je širina impulsa ε manja. U graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0$, vrijedi da je:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sin \frac{\varepsilon}{2}\Omega \Big/ \frac{\varepsilon}{2}\Omega \right) e^{-j\frac{\varepsilon}{2}\Omega} = 1, \tag{10.14}$$

pa spektar signala odmjerenog realnim A/D konvertorom postaje jednak spektru odmjerenog signala datom sa (10.2). Treba voditi računa da, u praktičnim izvedbama realnih A/D konvertora, sa smanjenjem širine impulsa raste njihova amplituda, te je potrebno veće pojačanje, što dovodi do problema sa šumom. Uz to je, pri smanjenju širine impulsa, potrebno osigurati brži rad A/D konvertora, tj. brza kola za pretvaranje naponskih nivoa u numeričke podatke.

10.2 Digitalno/analogna konverzija

Digitalno/analognom konverzijom rekonstruišemo analogni signal iz njegovih odmjeraka predstavljenih u digitalnoj formi. Pri razmatranju rekonstrukcije signala podrazumijevaćemo da je prilikom A/D konverzije zadovoljen Niksvistov kriterijum. Proces rekonstrukcije se zasniva na korištenju interpolacionih funkcija. U praktičnim realizacijama D/A konvertora koriste se neidealne interpolacione funkcije, koje unose nepoželjne visokofrekvencijske komponente u rekonstruisani signal. Stoga se nakon interpolatora dodaje niskopropusni filtar, kao na Slici 10.16, što ćemo detaljno obrazložiti u nastavku izlaganja.



Slika 10.16 Dodavanje niskopropusnog postfiltra nakon D/A konvertora.

10.2.1 Idealna rekonstrukcija analognog signala

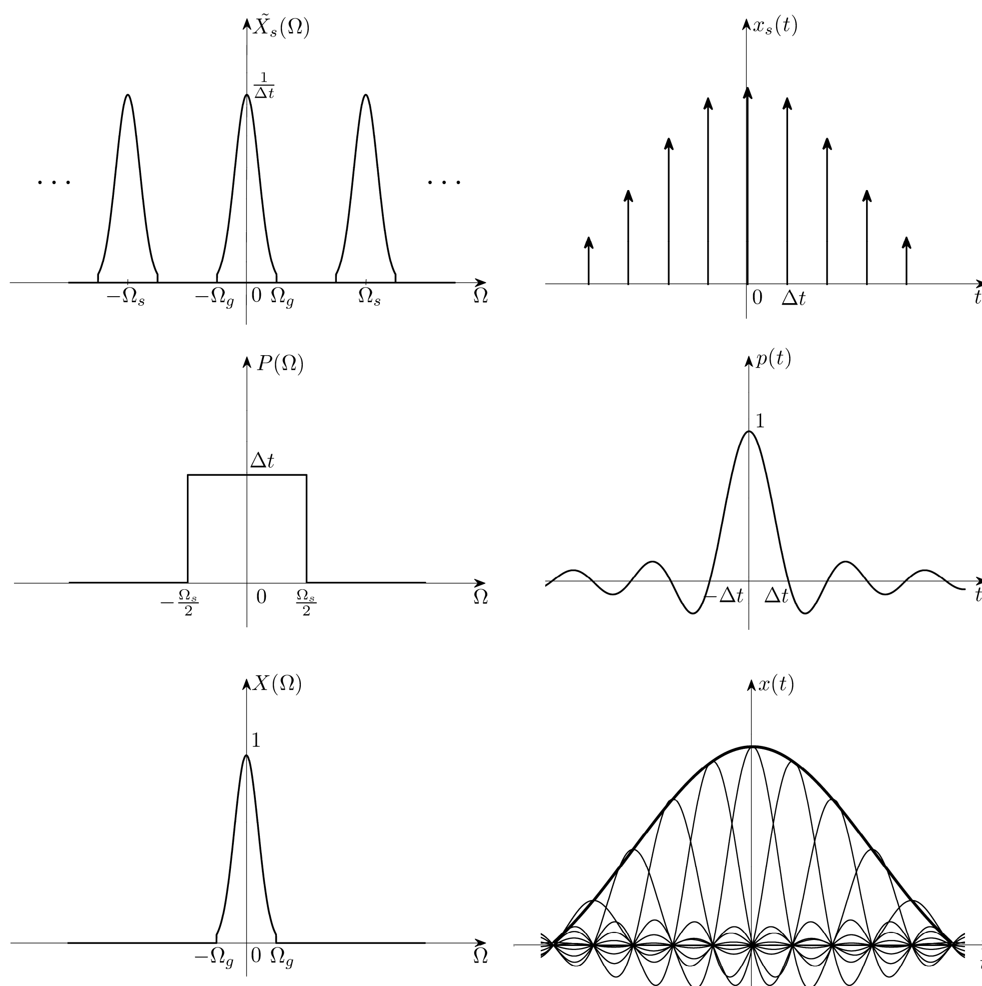
Idealna rekonstrukcija analognog signala $x(t)$ iz digitalnog signala $x(n)$, koji je njegova odmjerena verzija, tako da je:

$$x(t)\big|_{t=k\Delta t} = x(n)\big|_{n=k} . \tag{10.15}$$

moguća je ako je prilikom A/D konverzije zadovoljen Nikvistov kriterij i ako nije rađeno kvantovanje signala. Osim vrijednosti signala $x(n)$, za rekonstrukciju analognog signala $x(t)$ neophodno je poznavati i korak odmjeravanja Δt, koji je korišten prilikom njegove A/D konverzije. Na osnovu spektra $X(e^{j\omega})$ diskretnog signala $x(n)$, poznavajući vezu spektra analognog i spektra diskretnog signala, izvedenu u poglavlju 6.7, generiše se spektar $\tilde{X}_s(\Omega)$ odmjerenog signala $x_s(t)$:

$$\tilde{X}_s(\Omega) = X(e^{j\omega}),\ \omega = \Omega\Delta t . \tag{10.16}$$

Primjer signala $x_s(t)$, koji je odmjerena verzija kontinualnog signala $x(t)$ sa korakom odmjeravanja Δt, i njegov spektar prikazani su na Slici 10.17(a). Zatim se iz spektra $\tilde{X}_s(\Omega)$ odmjerenog signala, množenjem u frekvencijskom domenu sa prozorskom funkcijom $P(\Omega)$, izdvaja spektar $X(\Omega)$ kontinualnog signala:



Slika 10.17 Idealna rekonstrukcija signala: (a) amplitudni spektar odmjerenog signala (lijevo) i odmjereni signal (desno); (b) prozorska funkcija u frekvencijskom domenu (lijevo) i idealna interpolaciona funkcija (desno) i (c) amplitudni spektar kontinualnog signala (lijevo) i rekonstruisani kontinualni signal nacrtan debelom linijom, dok su tankim linijama nacrtane konvolucije pojedinačnih Dirakovih impulsa iz signala $x_s(t)$ sa idealnom interpolacionom funkcijom (desno).

$$X(\Omega) = \tilde{X}_s(\Omega) \cdot P(\Omega) = \begin{cases} \Delta t \tilde{X}_s(\Omega), & |\Omega| \le \Omega_s/2, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s/2. \end{cases} \tag{10.17}$$

U vremenskom domenu prozorskoj funkciji $P(\Omega)$ odgovara funkcija:

$$p(t) = \operatorname{sinc}\frac{\Omega_s}{2}t,\ \Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}, \tag{10.18}$$

što se lako odredi inverznom Furijeovom transformacijom iz $P(\Omega)$. Prozorska funkcija, $P(\Omega)$, i njen transformacioni par u vremenskom domenu, $p(t)$, prikazani su na Slici 10.17(b). Množenju spektra $\tilde{X}_s(\Omega)$ odmjerenog signala sa prozorskom funkcijom u frekvencijskom domenu odgovara konvolucija odmjerenog signala $x_s(t)$ sa funkcijom $p(t)$ u vremenskom domenu:

$$\begin{aligned} x(t) = x_s(t) * p(t) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t)\right] * \operatorname{sinc}\frac{\Omega_s}{2}t = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\operatorname{sinc}\frac{\Omega_s}{2}(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\, p(t - k\Delta t), \end{aligned} \tag{10.19}$$

kao što je prikazano na Slici 10.17(c).

Dakle, rekonstruisani signal u vremenskom domenu se može posmatrati kao suma beskonačno mnogo interpolacionih funkcija oblika (10.18), koje djeluju u trenucima $k\Delta t$ i čije su amplitude pomnožene sa vrijednostima signala u tačkama odmjeravanja. Funkcija $p(t)$, data sa (10.18) omogućava rekonstrukciju kontinualnog signala iz njegovih odmjeraka bez greške, te se naziva *idealna interpolaciona funkcija*.

10.2.2 Realni digitalno/analogni konvertori

Primijetimo da je idealna interpolaciona funkcija nekauzalna. Zbog toga na vrijednost rekonstruisanog signala u nekom trenutku ne utiču samo vrijednosti odmjeraka signala do tog i u tom trenutku, već i nakon posmatranog trenutka u

kom se vrši rekonstrukcija signala, sve do beskonačnosti, kao što se vidi na Slici 10.17(c). To onemogućava rekonstrukciju signala u realnom vremenu, tj. istovremeno sa pristizanjem informacija o odmjercima signala. Zbog problema uzrokovanih nekauzalnošću ove funkcije, u praksi se primjenjuju kauzalne interpolacione funkcije koje nisu idealne i pomoću kojih se rekonstruiše približan oblik signala.

Ako umjesto idealne interpolacione funkcije $p(t)$ za rekonstrukciju signala koristimo kauzalnu interpolacionu funkciju, označenu sa $p_i(t)$, izraz (10.19) za rekonstrukciju signala postaje:

$$x(t) = x_s(t) * p_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\, p_i(t - k\Delta t). \tag{10.20}$$

Interpolaciona funkcija mora da ispunjava sljedeće uslove:

$$p_i(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = n\Delta t, \end{cases} \tag{10.21}$$

čime se osigurava da u tačkama odmjeravanja rekonstruisane vrijednosti signala budu jednake originalnim vrijednostima analognog signala, i da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| p_i(t) \right| dt < \infty, \tag{10.22}$$

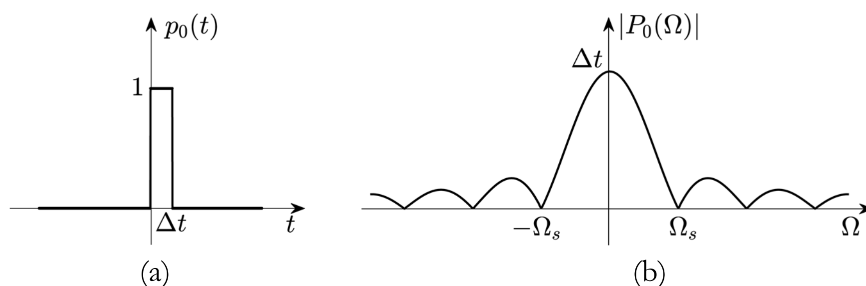
što je uslov stabilnosti A/D konvertora.

Jedna od najjednostavnijih interpolacionih funkcija je interpolaciona funkcija nultog reda:

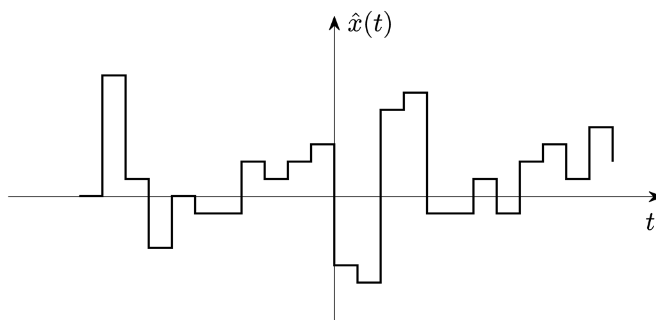
$$p_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \Delta t, \\ 0, & \textit{inače}, \end{cases} \tag{10.23}$$

prikazana na Slici 10.18(a). Amplitudna karakteristika D/A konvertora sa interpolacionom funkcijom nultog reda je prikazana na Slici 10.18(b). Interpolaciona funkcija nultog reda ispunjava uslove date sa (10.21) i (10.22). Rekonstruisani signal se dobija na sljedeći način:

$$\hat{x}(t) = x_s(t) * p_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\, p_0(t - k\Delta t), \tag{10.24}$$



Slika 10.18 Interpolaciona funkcija: (a) interpolaciona funkcija nultog reda i (b) njen amplitudni spektar.



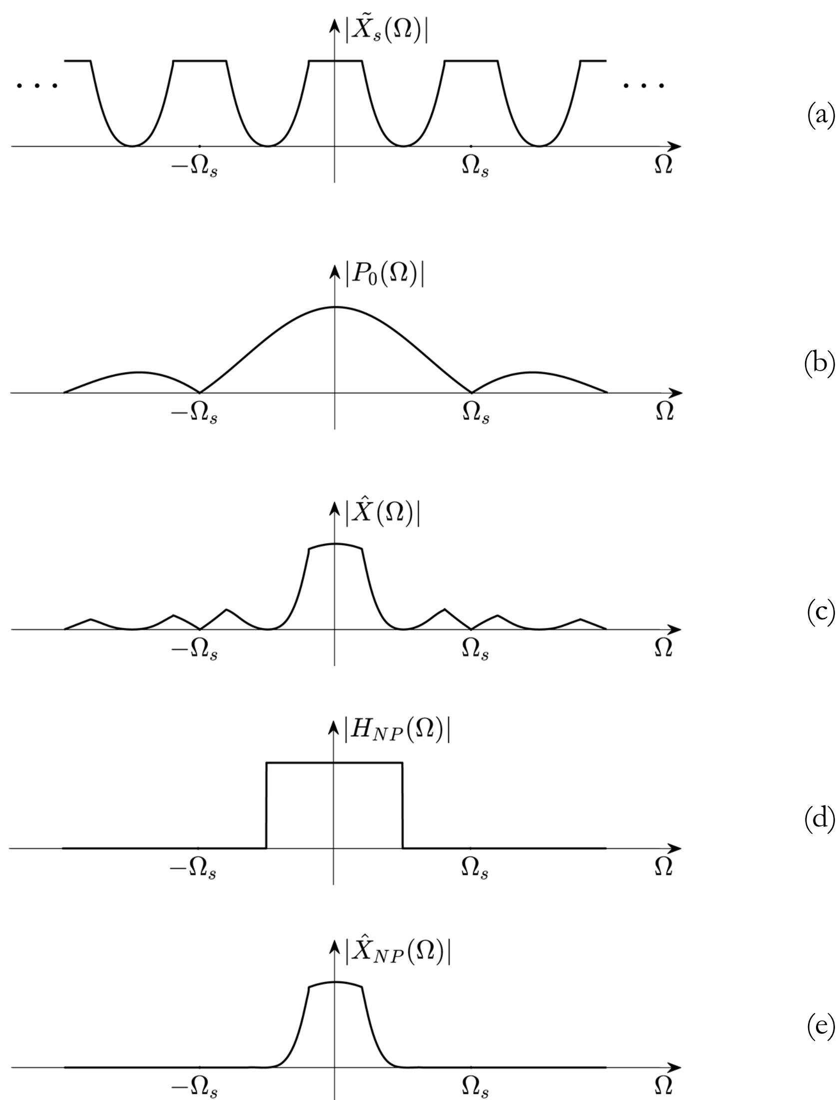
Slika 10.19 Primjer signala rekonstruisanog interpolacionom funkcijom nultog reda.

dok je spektar rekonstruisanog signala dat sa:

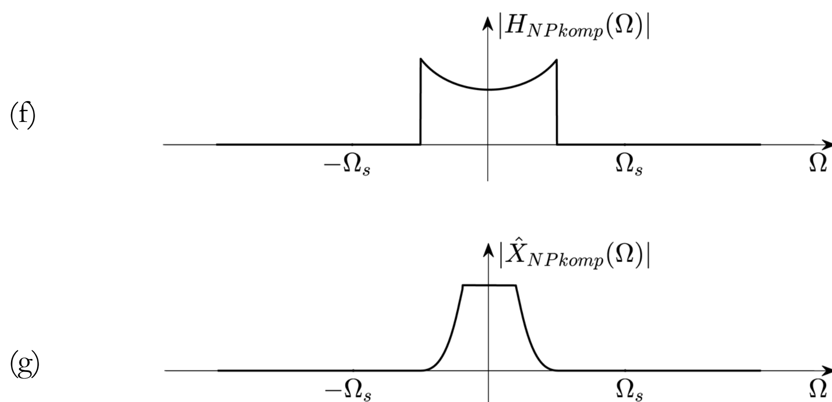
$$\hat{X}(\Omega) = P_0(\Omega)\tilde{X}_s(\Omega) = \frac{\sin\frac{\Delta t}{2}\Omega}{\frac{\Delta t}{2}\Omega} e^{-j\frac{\Delta t}{2}\Omega}\left[\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)\right]. \qquad (10.25)$$

Primjer signala rekonstruisanog interpolacionom funkcijom nultog reda dat je na Slici 10.19.

U poređenju sa rekonstrukcijom idealnom interpolacionom funkcijom, korištenje neidealnih interpolacionih funkcija pri praktičnim realizacijama A/D konvertora unosi visokofrekvencijske komponente u spektar rekonstruisanog signala, kao što se može vidjeti na Slici 10.20. U frekvencijskom domenu idealnoj



Slika 10.20 Postupak neidealne A/D konverzije prikazan u frekvencijskom domenu: (a) spektar diskretizovanog signala; (b) amplitudna karakteristika realnog A/D konvertora; (c) spektar rekonstruisanog signala; (d) amplitudna karakteristika idealnog NP postfiltra; (e) spektar rekonstruisanog signala nakon njegovog filtriranja idealnim NP postfiltrom (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 10.20 (f) amplitudna karakteristika NP postfiltra sa kompenzacijom u propusnom opsegu i (g) spektar rekonstruisanog signala nakon njegovog filtriranja sa NP postfiltrom sa kompenzacijom (nastavak sa prethodne stranice).

interpolacionoj funkciji odgovara prozorska funkcija koja odsijeca sve frekvencijske komponente odmjerenog signala van osnovnog opsega $\Omega_s/2 \leq \Omega < \Omega_s/2$. Nasuprot tome, spektri neidealnih interpolacionih funkcija nisu ograničeni. Na primjer, spektar interpolacione funkcije nultog reda je sinc funkcija, pa se pri množenju sa spektrom odmjerenog signala ne uklanjaju frekvencijske komponente van osnovnog opsega, što je ilustrovano na Slici 10.20(c). Stoga je neophodno nakon D/A konverzije koristiti analogni niskopropusni postfiltar, kao na blok šemi sa Slike 10.16. Idealni niskopropusni postfiltar, sa amplitudnom karakteristikom $|H_{NP}(\Omega)|$, bi uklonio neželjene visoko - frekvencijske komponente koje interpolator unosi u spektar signala, kao što je ilustrovano na Slici 10.20(e). Dodatna kompenzacija je moguća ako se amplitudna karakteristika filtra, $|H_{NPkomp}(\Omega)|$, odabere tako da poništi uticaj interpolatora na spektar rekonstruisanog signala u osnovnom opsegu, kao na Slici 10.20(g).

Glava 11

SISTEMI SA VIŠE UČESTANOSTI ODMJERAVANJA

Godinama unazad, a i danas, odmjeravanje signala se vršilo i vrši različitim brzinama odmjeravanja. Stoga se u praksi pojavljuju digitalni signali uz koje se vezuju različite učestanosti odmjeravanja. Ranije je razlog za odmjeravanje signala malim brzinama uglavnom bila nedovoljno razvijena tehnologija. Međutim, i danas, kada je moguće postići velike frekvencije odmjeravanja, signali se često odmjeravaju manjim brzinama, jer za takve signale treba manje prostora za memorisanje, a njihova obrada i prenos su manje zahtjevni u pogledu računarskih i vremenskih resursa. Praktičan rad sa signalima koji su odmjereni brzinama različitim od onih na kojima radi sistem na kome se obrađuju, zahtijeva njihovo prilagođavanje sistemu. Na primjer, ako imamo audio zapis odmjeren sa 22 kHz, a želimo da ga reprodukujemo na uređaju koji radi na 44 kHz, to neće biti moguće bez generisanja novog signala, koji odgovara istom kontinualnom audio signalu, ali odmjerenom sa 44 kHz. Proces konvertovanja jednog diskretnog signala, dobijenog odmjeravanjem datog kontinualnog signala nekom učestanošću, u drugi diskretni signal, koji bi se dobio odmjeravanjem istog kontinualnog signala drugačijom učestanošću, naziva se *promjena učestanosti odmjeravanja*.

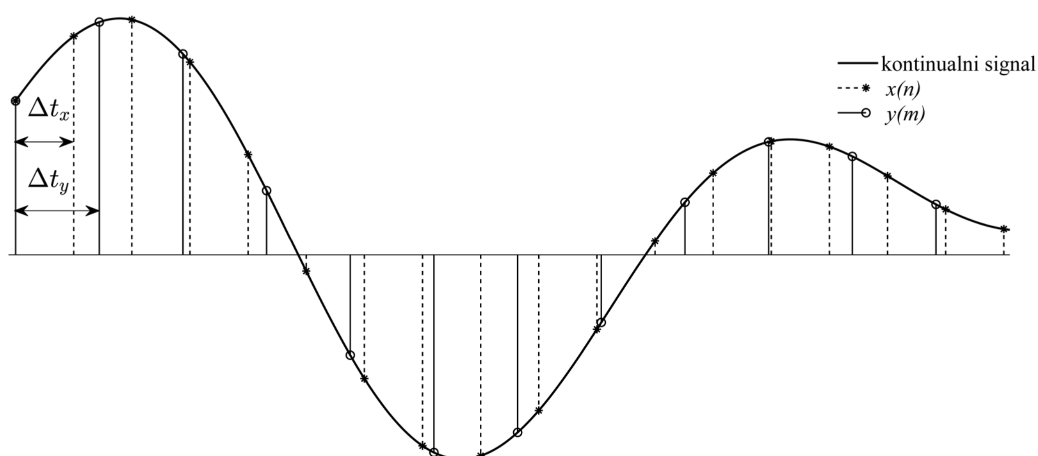
Ako nam kontinualni signal više nije dostupan, što je najčešći slučaj u praksi, to bi se moglo postići primjenom D/A konverzije, pa ponovnim odmjeravanjem dobijenog kontinualnog signala željenom učestanošću. Vraćanje u kontinualni domen i ponovno odmjeravanje realnim A/D i D/A konvertorima neminovno dovodi do izobličenja signala, te ćemo u ovom poglavlju izložiti kako je moguće promijeniti učestanost odmjeravanja signala u digitalnom domenu.

Prvo ćemo razmotriti smanjenje i povećanje učestanosti odmjeravanja sa cjelobrojnim faktorima, a zatim promjenu učestanosti odmjeravanja njenim množenjem sa racionalnim brojem. Sisteme u kojima se, u nekom segmentu, vrši promjena učestanosti odmjeravanja nazivamo *sistemima sa više učestanosti odmjeravanja*. Osnovna primjena ovakvih sistema je povezivanje sistema koji rade na različitim frekvencijama. Osim toga, koriste se pri diskretizaciji i rekonstrukciji signala, te za realizaciju banke filtara, o čemu ćemo govoriti u poglavlju vezanom za nestacionarne signale.

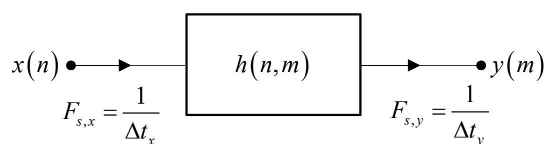
11.1 Promjena učestanosti odmjeravanja

Pretpostavimo da smo sekvencu $x(n)$ generisali odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ frekvencijom odmjeravanja $F_{s,x} = 1/\Delta t_x$, te da želimo da generišemo sekvencu $y(m)$, koja nastaje odmjeravanjem istog kontinualnog signala frekvencijom odmjeravanja $F_{s,y} = 1/\Delta t_y$. Elementi diskretnih signala $x(n)$ i $y(m)$, koji nastaju odmjeravanjem istog kontinualnog signala, ali sa različitim frekvencijama odmjeravanja, prikazani su na Slici 11.1.

Proces generisanja signala $y(m)$ iz signala $x(n)$ u diskretnom domenu možemo posmatrati kao digitalnu obradu signala. Kasnije ćemo pokazati da se radi o vremenski promjenljivom sistemu za obradu signala, čiji impulsni odziv ćemo označiti sa $h(n,m)$, kao na Slici 11.2. Impulsni odziv sistema za promjenu



Slika 11.1 Odmjeravanje signala različitim frekvencijama odmjeravanja.



Slika 11.2 Blok šema sistema za promjenu učestanosti odmjeravanja u digitalnom domenu.

učestanosti odmjeravanja, odnosno njegovu funkciju prenosa, treba odrediti tako da se, što je moguće bolje, sačuvaju spektralne karakteristike signala.

Smanjenje učestanosti odmjeravanja naziva se *decimacija*, dok se povećanje učestanosti odmjeravanja naziva *interpolacija*. Radi jednostavnosti, prvo ćemo razmotriti promjenu učestanosti odmjeravanja cjelobrojnim faktorom. Nakon toga ćemo opisati način promjene učestanosti odmjeravanja racionalnim faktorom i dati osnovne upute za promjenu učestanosti odmjeravanja u slučajevima kada taj faktor nije racionalan broj.

11.1.1 Decimacija

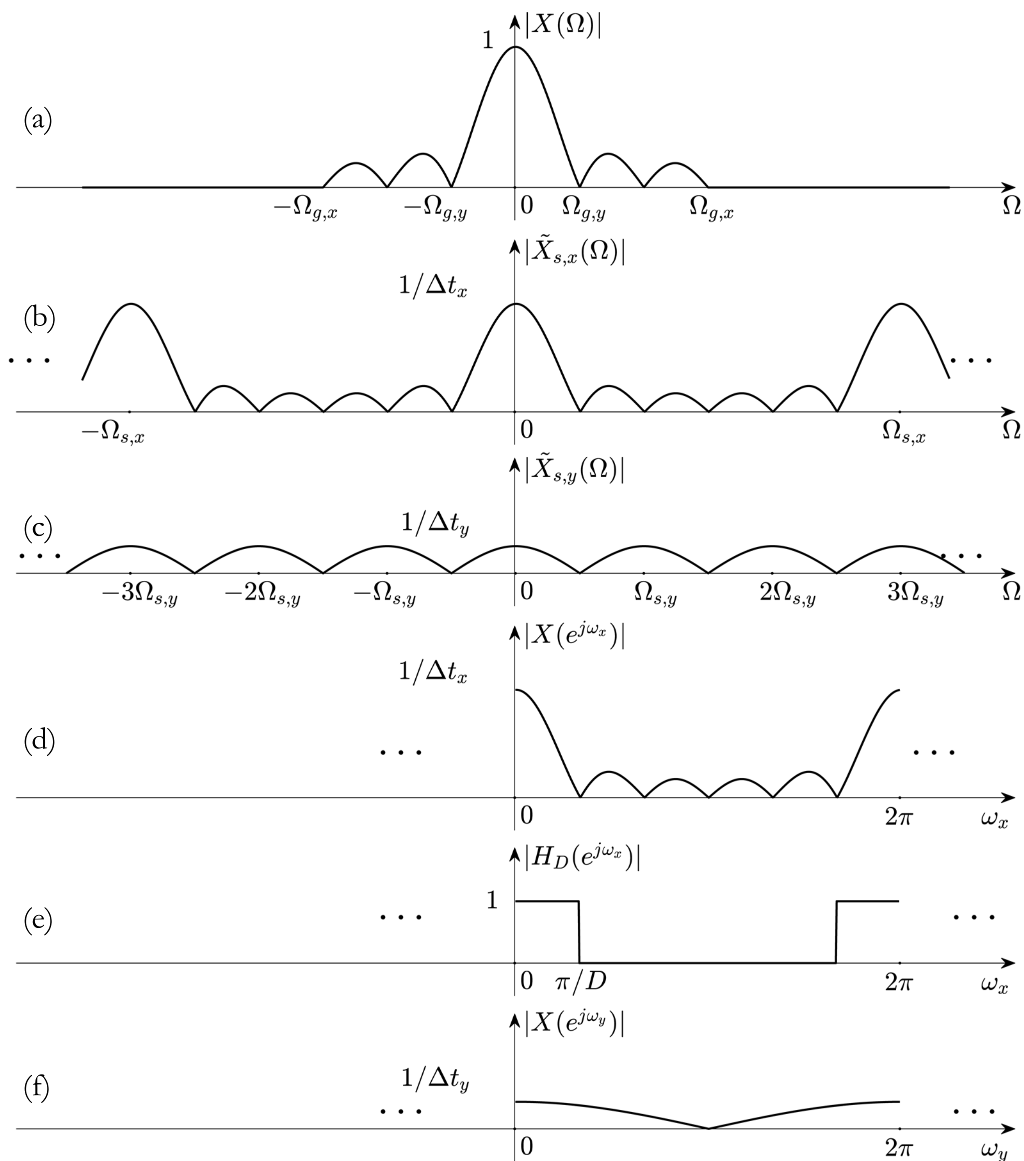
Pretpostavimo da imamo diskretni signal $x(n)$ dobijen odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ frekvencijom odmjeravanja $F_{s,x}$, i da želimo da u digitalnom domenu generišemo signal $y(m)$, identičan signalu koji bismo dobili odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ frekvencijom odmjeravanja $F_{s,y} = F_{s,x}/D$, pri čemu $D \in \mathbb{N}$. Tada govorimo o decimaciji, odnosno smanjenju učestanosti odmjeravanja, D puta. Pretpostavimo, takođe, da je prilikom odmjeravanja signala $x(t)$ frekvencijom $F_{s,x}$ poštovan Nikvistov kriterijum, tako da je $F_{s,x} \geq 2F_{g,x}$, gdje je $F_{g,x}$ gornja granična frekvencija signala $x(t)$, pa u spektru diskretizovanog signala $\tilde{X}_{s,x}(\Omega)$ ne dolazi do preklapanja. Spektar diskretnog signala $x(n)$ ćemo označiti sa $X\left(e^{j\omega_x}\right)$, i on odgovara spektru diskretizovanog signala, $\tilde{X}_{s,x}(\Omega)$, pri čemu je $\omega_x = \Omega/F_{s,x}$. U graničnom slučaju, za $F_{s,x} = 2F_{g,x}$, posmatrano na osnovnom periodu, spektar $X\left(e^{j\omega_x}\right)$ diskretnog signala zauzima cijeli frekvencijski opseg $0 \leq \omega_x < 2\pi$.

Ako bismo iz $x(n)$ rekonstruisali kontinualni signal i ponovo ga odmjerili nižom frekvencijom odmjeravanja, $F_{s,y}$, ne možemo biti sigurni da je ispoštovan Nikvistov kriterijum, $F_{s,y} \geq 2F_{g,x}$. U spektru $\tilde{X}_{s,y}(\Omega)$ tako diskretizovanog signala, a samim tim i u spektru $X\left(e^{j\omega_y}\right)$ diskretnog signala $y(m)$, gdje je $\omega_y = \Omega/F_{s,y}$, može doći do preklapanja zbog periodičnog ponavljanja spektra kontinualnog signala sa periodom $F_{s,y} = F_{s,x}/D$. Da se to ne bi desilo, neophodno je, prije odmjeravanja signala sa nižom frekvencijom, niskopropusnim filtrom ograničiti spektar kontinualnog signala na neku frekvenciju $F_{g,y}$, tako da i prilikom odmjeravanja sa manjom frekvencijom bude ispoštovan Nikvistov kriterijum, $F_{s,y} \geq 2F_{g,y}$. Na taj način gubimo visokofrekvencijske komponente signala, ali niskofrekvencijski sadržaj prilikom decimacije ostaje sačuvan.

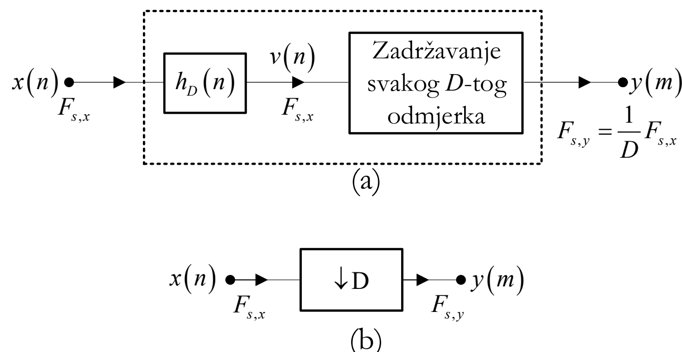
Postupak decimacije, za slučaj $D = 3$, ilustrovan je u frekvencijskom domenu na Slici 11.3. Na Slici 11.3(a) je prikazan amplitudni spektar frekvencijski ograničenog kontinualnog signala $x(t)$, a na Slici 11.3(b) amplitudni spektar tog signala diskretizovanog sa $F_{s,x} = 2F_{g,x}$. Slika 11.3(d) prikazuje osnovni period amplitudnog spektra tako dobijenog diskretnog signala $x(n)$. Taj spektar, uz $\omega_x = \Omega/F_{s,x}$, odgovara amplitudnom spektru diskretizovanog signala sa Slike 11.3(b). Prije smanjenja frekvencije odmjeravanja potrebno je niskopropusnim filtrom ograničiti spektar signala tako da bude zadovoljen Nikvistov kriterijum. U posmatranom slučaju se NP filtriranjem gornja granična učestanost smanjuje tri puta. Amplitudni spektar tako dobijenog signala, odmjerenog sa tri puta nižom učestanošću, je prikazan na Slici 11.3(c), a amplitudni spektar njemu odgovarajućeg diskretnog signala, $y(m)$, na osi digitalnih učestanosti $\omega_y = \Omega/F_{s,y}$, na Slici 11.3(f).

Umjesto D/A konverzije za vraćanje u kontinualni domen, zatim upotrebe analognog niskopropusnog prefiltra i ponovljene A/D konverzije, sada sa nižom frekvencijom odmjeravanja, mi želimo da na osnovu poznatog signala $x(n)$, odmjerenog sa $F_{s,x}$, direktno, u diskretnom domenu, generišemo signal $y(m)$, koji je odmjeren sa $F_{s,y}$. Spektar na ovaj način dobijenog diskretnog signala treba da odgovara spektru diskretizovanog signala kojeg bismo dobili odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ sa $F_{s,y}$. Upoređujući amplitudne spektre diskretnih signala $x(n)$ i $y(m)$ sa Slike 11.3(d) i Slike 11.3(f), respektivno, zaključujemo da spektar signala $y(m)$ možemo dobiti ograničavanjem spektra signala $x(n)$ na π/D, njegovim razvlačenjem D puta ($\omega_y = D\omega_x$) i dijeljenjem sa $D = \Delta t_y/\Delta t_x$.

Za digitalni filtar čiji elementi impulsnog odziva imaju realne vrijednosti dovoljno je posmatrati frekvencijsku karakteristiku u opsegu $0 \le \omega < \pi$. Idealni niskopropusni digitalni filtar treba da eliminiše sve spektralne komponente signala $x(n)$ iz opsega $\pi/D \le \omega_x < \pi$, tako da je njegova frekvencijska karakteristika data sa:



Slika 11.3 Smanjenje učestanosti odmjeravanja: (a-c) amplitudni spektri kontinualnog signala i istog signala odmjerenog sa $\Omega_{s,x}$ i $\Omega_{s,y}$, respektivno; (d) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa $\Omega_{s,x}$; (e) amplitudna karakteristika digitalnog NP filtra i (f) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa $\Omega_{s,y}$.



Slika 11.4 Decimacija: (a) blok šema sistema za smanjenje učestanosti odmjeravanja i (b) simbol decimatora.

$$H_D\left(e^{j\omega_x}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega_x < \pi/D, \\ 0, & \pi/D \le \omega_x < \pi. \end{cases} \tag{11.1}$$

Amplitudna karakteristika ovog filtra je prikazana na Slici 11.3(e). Filtriranjem dobijamo sekvencu:

$$v(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_D(k) x(n-k). \tag{11.2}$$

Nakon filtriranja, potrebno je razvući spektar signala i podijeliti ga sa D. Po osobini skaliranja Furijeove transformacije, razvlačenju signala u frekvencijskom domenu odgovara sabijanje signala u vremenskom domenu, te ćemo ovo postići pododmjeravanjem signala $x(n)$, tj. uzimanjem njegovog svakog D-tog odmjerka:

$$y(m) = v(mD) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_D(k) x(mD-k). \tag{11.3}$$

Operacija smanjivanja učestanosti odmjeravanja D puta, koja uključuje filtriranje, pa zadržavanje svakog D-tog odmjerka, označava se sa $\downarrow \mathrm{D}$:

$$y(m) = \downarrow \mathrm{D}\{x(n)\}, \tag{11.4}$$

i blokovski je prikazana na Slici 11.4(a). Simbol decimatora je dat na Slici 11.4(b).

Iako je filtriranje linearna i vremenski invarijantna operacija obrade signala, kompletan sistem za smanjenje učestanosti odmjeravanja nije vremenski invarijantan:

$$\begin{aligned}\downarrow \mathrm{D}\left\{x(n-n_0)\right\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_D(k)\, x(mD-n_0-k) \neq \\ &\neq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_D(k)\, x(mD-n_0D-k) = y(m-n_0).\end{aligned} \tag{11.5}$$

Potražimo sada analitički izraz koji uspostavlja vezu spektra ulaznog signala $x(n)$ i spektra izlaznog signala $y(m)$. U tu svrhu, definišimo pomoćnu sekvencu:

$$\bar{v}(n) = \begin{cases} v(n), & n = 0, \pm D, \pm 2D, \ldots \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{11.6}$$

Pomoćnu sekvencu $\bar{v}(n)$ možemo dobiti množenjem sekvence $v(n)$ sa $\tilde{p}_D(n)$:

$$\bar{v}(n) = v(n)\, \tilde{p}_D(n), \tag{11.7}$$

gdje je:

$$\tilde{p}_D(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm D, \pm 2D, \ldots \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{11.8}$$

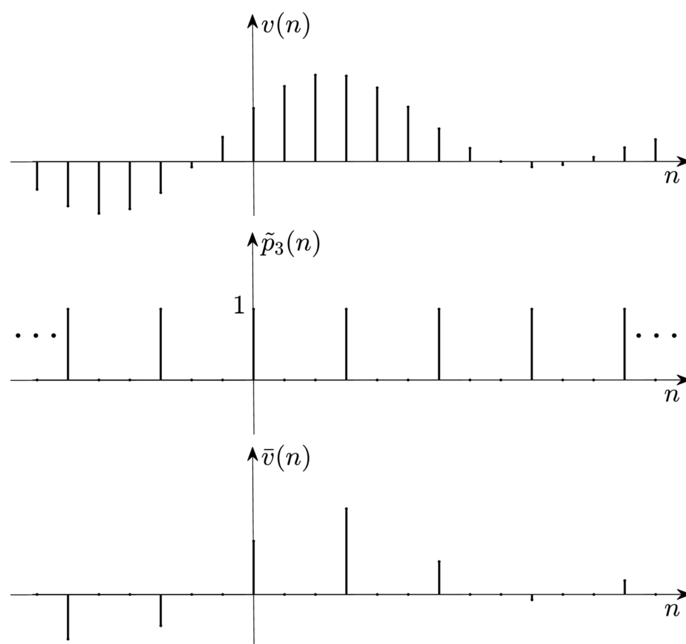
Primjer generisanja ove pomoćne sekvence, za $D = 3$, prikazan je na Slici 11.5. DTFS signala $\tilde{p}_D(n)$ je:

$$P(k) = \sum_{n=0}^{D-1} \tilde{p}_D(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{D}nk} = 1, \tag{11.9}$$

tako da se množenjem sa $\tilde{p}_D(n)$ ne mijenja spektar originalnog signala. Preko inverznog DTFS, signal $\tilde{p}_D(n)$ možemo zapisati kao:

$$\tilde{p}_D(n) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} P(k)\, e^{j\frac{2\pi}{D}nk} = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}nk}. \tag{11.10}$$

Za *z*-transformaciju izlaznog signala $y(m)$ dobijamo izraz:



Slika 11.5 Primjer generisanja sekvence $\bar{v}(n)$, sa $D=3$.

$$Y(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(mD)z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{v}(m)z^{-\frac{m}{D}}. \tag{11.11}$$

U (11.11) poslednja jednakost vrijedi jer je $\bar{v}(m)=0$ za svako *m* osim ako je *m* cjelobrojan umnožak od *D*. Uvrštavanjem (11.7) i (11.10) u (11.11) imamo da je:

$$\begin{aligned} Y(z)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}mk}\right]z^{-\frac{m}{D}}=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}k}\right)^{-m}= \\ &=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}k}\right)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}k}\right)\cdot X\left(z^{\frac{1}{D}}e^{-j\frac{2\pi}{D}k}\right). \end{aligned} \tag{11.12}$$

Uzimajući vrijednosti $Y(z)$ na jediničnoj kružnici u *z*-ravni, tako da je $z=e^{j\omega_y}$, dobijamo analitički izraz koji povezuje spektre signala $x(n)$ i $y(m)$:

$$Y\left(e^{j\omega_y}\right)=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}H_D\left(e^{j\frac{\omega_y-2k\pi}{D}}\right)\cdot X\left(e^{j\frac{\omega_y-2k\pi}{D}}\right). \tag{11.13}$$

Izraz (11.13) ukazuje na periodično ponavljanje spektra signala $x(n)$, koji je filtriran niskopropusnim filtrom u digitalnom domenu, sa periodom $2\pi/D$. Budući da je funkcija prenosa filtra $H_D\left(e^{j\omega_y}\right)$, data sa (11.1), jednaka nuli van opsega $0\le\omega_y<\pi/D$, prilikom tog periodičnog ponavljanja nema preklapanja spektra, pa možemo pisati da je:

$$Y\left(e^{j\omega_y}\right)=\frac{1}{D}H_D\left(e^{j\frac{\omega_y}{D}}\right)\cdot X\left(e^{j\frac{\omega_y}{D}}\right)=\frac{1}{D}X\left(e^{j\frac{\omega_y}{D}}\right). \tag{11.14}$$

Vidimo da smo pododmjeravanjem postigli razvlačenje spektra i dijeljenje faktorom *D*, što nam je i bio cilj.

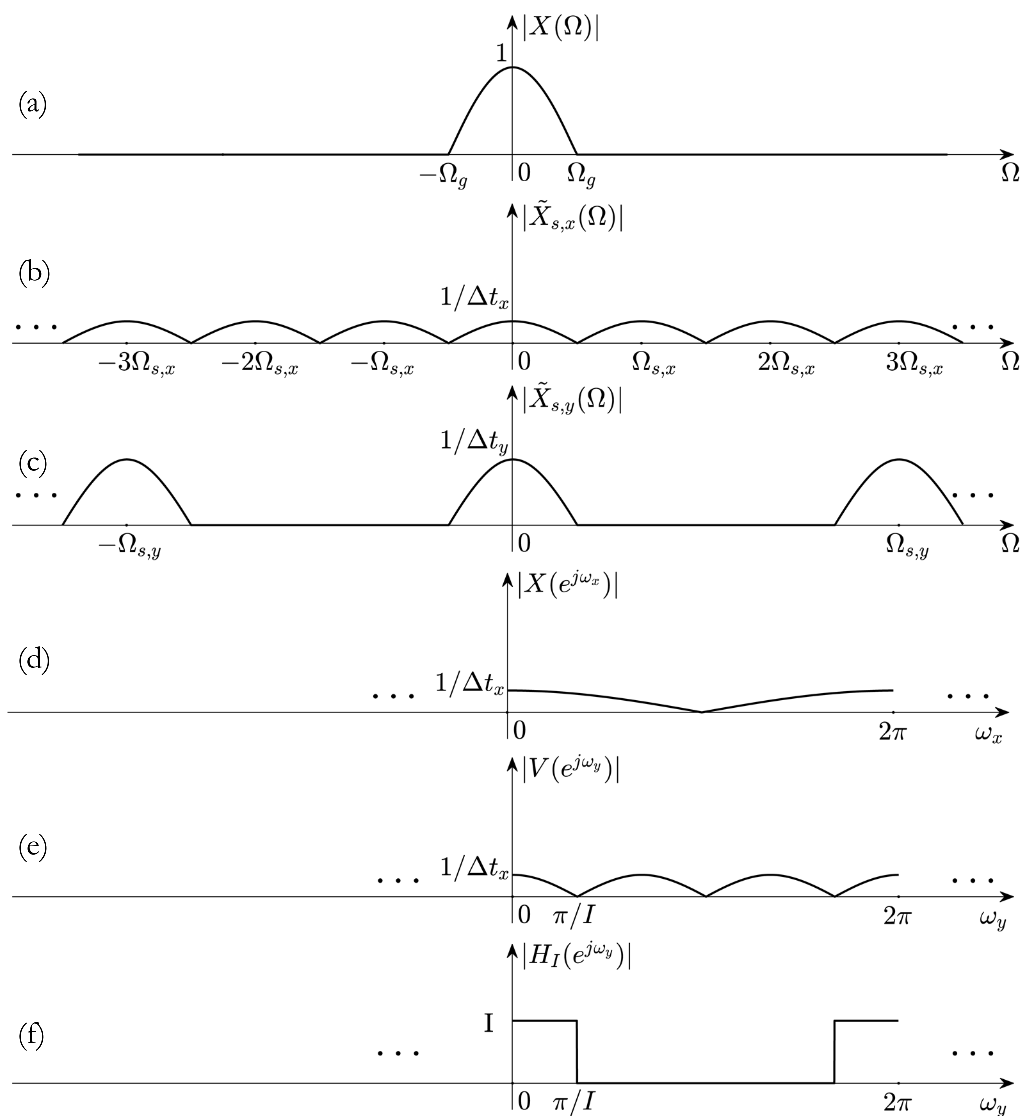
Ako je gornja granična učestanost u spektru kontinualnog signala manja ili jednaka $F_{s,y}/2=F_{s,\mathrm{x}}/2D$, onda je i iz $y(m)$ moguća idealna rekonstrukcija kontinualnog signala. Ako navedeni uslov nije ispunjen, pri smanjenju učestanosti odmjeravanja gube se visokofrekvencijske komponente originalnog signala za $F\ge F_{s,y}/2$, ali se, zbog filtriranja niskopropusnim filtrom, ne unose nikakva dodatna izobličenja u niskofrekvencijskom dijelu spektra signala za $F<F_{s,y}/2$.

11.1.2 Interpolacija

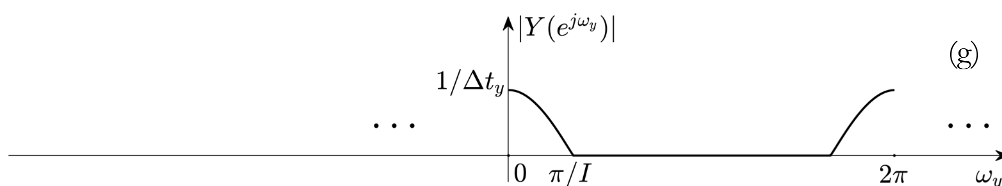
Interpolacijom u digitalnom domenu se iz jednog diskretnog signala $x(n)$, koji je dobijen odmjeravanjem kontinualnog signala $x(t)$ frekvencijom odmjeravanja $F_{s,x}$, generiše drugi diskretni signal $y(m)$, sličan signalu koji bismo dobili da smo isti kontinualni signal odmjerili većom frekvencijom odmjeravanja, koju ćemo označiti sa $F_{s,\mathrm{y}}$.

Zamislimo da odmjeravamo kontinualni signal čija je gornja granična frekvencija $F_{g,y}$. Odmjeravanjem signala frekvencijom $F_{s,y} \geq 2F_{g,y}$ ne dolazi do preklapanja spektra i možemo, teorijski gledano, iz njegovih odmjeraka bez greške rekonstruisati polazni kontinualni signal. Ako bismo koristili nižu frekvenciju odmjeravanja, $F_{s,x} < F_{s,y}$, bilo bi neophodno NP prefiltrom ograničiti spektar signala, tako da vrijedi da je $F_{s,x} \geq 2F_{g,x}$, gdje je $F_{g,x}$ granična frekvencija filtriranog signala. Teorijski gledano, ako primjenjujemo idealni NP prefiltar, visokofrekvencijski dio spektra filtriranog signala, za $F > F_{g,x}$, bi bio jednak nuli, dok bi njegov niskofrekvencijski dio, za $F < F_{g,x}$, bio jednak spektru originalnog signala. Niskopropusnim filtriranjem nepovratno bismo izgubili informaciju o visokofrekvencijskim komponentama sadržanim u polaznom kontinualnom signalu. Stoga povećanjem frekvencije odmjeravanja, bilo vraćanjem u kontinualni domen i ponovnim odmjeravanjem, ili direktno u domenu diskretnog vremena, nije moguće generisati isti signal koji bismo dobili odmjeravanjem originalnog signala sa većom frekvencijom odmjeravanja. Ako je ipak, iz nekog razloga, interpolacijom potrebno povećati frekvenciju odmjeravanja signala, potrebno je obratiti pažnju da pri tome ne narušimo niskofrekvencijski dio spektra i da na višim frekvencijama ne dodamo frekvencijske komponente koje ne postoje u originalnom kontinualnom signalu.

Pretpostavimo da učestanost odmjeravanja treba da povećamo *I* puta, gdje $I \in \mathbb{N}$. Osnovna ideja interpolacije sa cjelobrojnim faktorom *I* se sastoji u ubacivanju $I-1$ odmjerka između svaka dva susjedna odmjerka signala $x(n)$. Neka je spektar kontinualnog signala frekvencijski ograničen, kao na Slici 11.6(a). Amplitudni spektar tog signala, nakon odmjeravanja frekvencijom $F_{s,x}$, prikazan je na Slici 11.6(b). Ako bismo isti signal odmjerili *I* puta većom frekvencijom, amplitudni spektar odmjerenog signala bi imao oblik kao na Slici 11.6(c), za slučaj da je $I = 3$. Nama je cilj da učestanost odmjeravanja povećamo u digitalnom domenu, tj. da na osnovu signala $x(n)$, čiji je amplitudni spektar prikazan na Slici 11.6(d), generišemo diskretni signal $y(m)$, čiji će spektar odgovarati spektru odmjerenog signala na Slici 11.6(c). U tu svrhu, prvo treba u



Slika 11.6 Povećanje učestanosti odmjeravanja: (a-c) amplitudni spektri kontinualnog signala i istog signala odmjerenog sa $\Omega_{s,x}$ i $\Omega_{s,y}$, respektivno; (d) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa $\Omega_{s,x}$; (e) amplitudni spektar diskretnog signala nakon ubacivanja *I*-1 nula; (f) amplitudna karakteristika digitalnog NP filtra i (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 11.6 Povećanje učestanosti odmjeravanja: (g) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa $\Omega_{s,y}$ (nastavak sa prethodne stranice).

originalni diskretni signal $x(n)$ dodati odmjerke nultih vrijednosti, na sljedeći način:

$$v(m)=\begin{cases} x(m/I), & m=0,\pm I,\pm 2I,\ldots \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{11.15}$$

Posmatranjem *z*-transformacije tako dobijene sekvence:

$$V(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)z^{-m}=\sum_{\substack{m=-\infty \\ m=nI}}^{\infty} x(m/I)z^{-m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-nI}=X\left(z^{I}\right), \tag{11.16}$$

na jediničnoj kružnici u *z*-ravni:

$$V\left(e^{j\omega_y}\right)=X\left(e^{jI\omega_y}\right), \tag{11.17}$$

zaključujemo da ubacivanje $I-1$ nula između susjednih odmjeraka signala dovodi do sabijanja spektra signala i skraćivanja njegovog perioda sa 2π na $2\pi/I$, kao na Slici 11.6(e). Frekvencijske promjenljive ω_x i ω_y su vezane relacijom $\omega_x = I\omega_y$.

U željenom spektru signala treba da ostanu samo frekvencijske komponente za $0 \le \omega_y < \pi/I$, te je novonastale replike spektra van ovog opsega potrebno odbaciti niskopropusnim digitalnim filtrom, čija je frekvencijska karakteristika data sa:

$$H_I\left(e^{j\omega_y}\right)=\begin{cases}C, & 0\le\omega_y<\pi/I,\\ 0, & \pi/I\le\omega_y<\pi.\end{cases} \tag{11.18}$$

Amplitudna karakteristika ovog filtra je prikazana na Slici 11.6(f). Amplitudni spektar tako dobijenog signala odgovara amplitudnom spektru signala diskretizovanog sa I puta većom učestanošću, prikazanom na Slici 11.6(g), što smo i htjeli postići.

Spektar izlaznog signala nakon filtiranja postaje jednak:

$$Y\left(e^{j\omega_y}\right)=\begin{cases}CX\left(e^{jI\omega_y}\right), & 0\le\omega_y<\pi/I,\\ 0, & \pi/I\le\omega_y<\pi.\end{cases} \tag{11.19}$$

Faktor skaliranja C se koristi da normalizuje izlaznu sekvencu $y(m)$, tako da se vrijednosti postojećih odmjeraka zadrže nepromijenjene:

$$y(m)=x(m/I),\ m=0,\pm I,\pm 2I,\ldots \tag{11.20}$$

Za određivanje vrijednosti konstante C dovoljno je posmatrati jednu od jednačina iz (11.20), npr. onu za $m=0$, pa koristeći inverznu DTFT pišemo::

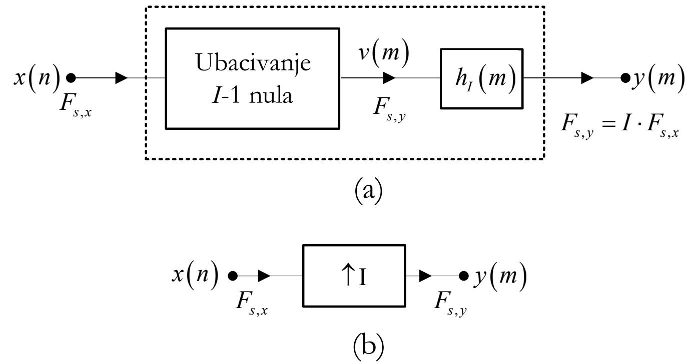
$$\begin{aligned}y(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y\left(e^{j\omega_y}\right)d\omega_y=C\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/I}^{\pi/I}X\left(e^{jI\omega_y}\right)d\omega_y\Bigg|_{\omega_y=\frac{\omega_x}{I}}=\\ &=\frac{C}{I}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega_x}\right)d\omega_x=\frac{C}{I}x(0)=x(0).\end{aligned} \tag{11.21}$$

odakle zaključujemo da je:

$$C=I\ . \tag{11.22}$$

Blok šema kompletnog sistema za povećanje učestanosti odmjeravanja je data na Slici 11.7(a), dok je simbol interpolatora dat na Slici 11.7(b). Operacija povećanja učestanosti odmjeravanja I puta, koja uključuje ubacivanje odmjeraka nultih vrijednosti između svaka dva odmjerka originalnog signala, a zatim filtriranje u digitalnom domenu, označava se sa $\uparrow \mathrm{I}$:

$$y(m)=\uparrow \mathrm{I}\{x(n)\}\,. \tag{11.23}$$



Slika 11.7 Interpolacija: (a) blok šema sistema za povećanje učestanosti odmjeravanja i (b) simbol interpolatora.

Posmatrano u vremenskom domenu, izlazni signal interpolatora, $y(m)$, je konvolucija signala $v(m)$, koji je dobijen ubacivanjem nula između susjednih odmjeraka signala $x(m)$, i impulsnog odziva $h_I(m)$ posmatranog niskopropusnog filtra:

$$y(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)h_I(m-k). \tag{11.24}$$

Budući da je $v(k)=0$ za svako $k\neq 0,\pm I,\pm 2I,\ldots$, te da je $v(kI)=x(k)$ za $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, operaciju interpolacije u vremenskom domenu zapisujemo sa:

$$\begin{aligned} y(m)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)h_I(m-k)\Bigg|_{k\to Ik}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kI)h_I(m-kI)=\\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_I(m-kI). \end{aligned} \tag{11.25}$$

11.1.3 Promjena učestanosti odmjeravanja racionalnim faktorom

Za promjenu učestanosti odmjeravanja I/D puta, $I,D \in \mathbb{N}$, prvo se uradi interpolacija faktorom I, a zatim decimacija faktorom *D*. Obrnut redoslijed bi mogao dovesti do gubljenja frekvencijskog sadržaja signala. Sam postupak je ilustrovan na Slici 11.8. Umjesto dva, dovoljno je koristiti jedan niskopropusni filtar za signal $v(l)$, kao na Slici 11.9. Taj filtar treba da ispunjava zahtjeve i interpolacije i decimacije:

$$H\left(e^{j\omega_v}\right)=\begin{cases} I, & |\omega_v|<\min\{\pi/D,\pi/I\}, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{11.26}$$

Interpolacija dovodi do sabijanja spektra signala:

$$W\left(e^{j\omega_v}\right)=\begin{cases} IX\left(e^{jI\omega_v}\right), & |\omega_v|<\min\{\pi/D,\pi/I\}, \\ 0, & inače, \end{cases} \tag{11.27}$$

a decimacija do njegovog širenja, tako da spektar izlaznog signala ima oblik:

$$Y\left(e^{j\omega_y}\right)=\frac{1}{D}W\left(e^{j\frac{\omega_y}{D}}\right)=\begin{cases} \frac{I}{D}X\left(e^{j\frac{I}{D}\omega_y}\right), & |\omega_y|<\min\left\{\pi,\frac{D}{I}\pi\right\}, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{11.28}$$

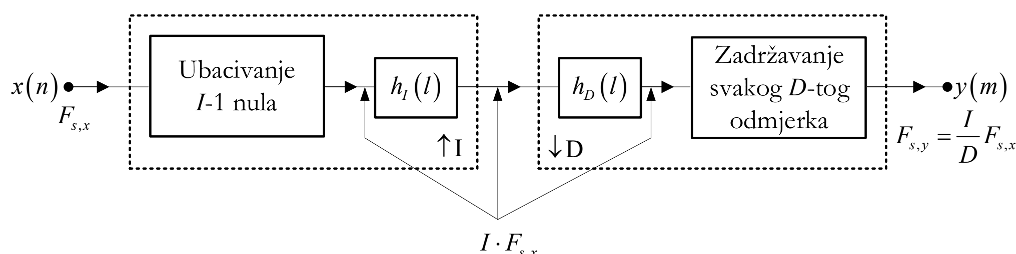
Analitički izrazi za vremenske oblike signala sa Slike 11.9 su sljedeći:

$$v(l)=\begin{cases} x(l/I), & l=0,\pm I,\pm 2I,\dots \\ 0, & inače, \end{cases} \tag{11.29}$$

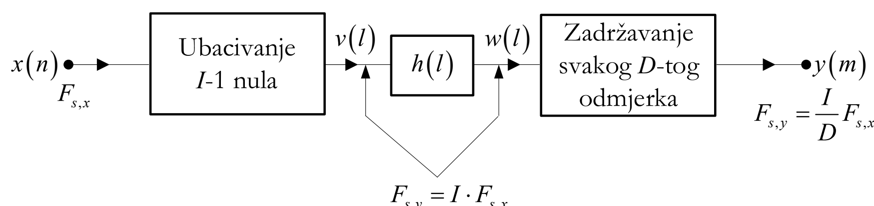
$$w(l)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)h(l-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(l-kI), \tag{11.30}$$

$$y(m)=w(mD)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(mD-kI), \tag{11.31}$$

gdje je $h(l)$ impulsni odziv filtra čija je frekvencijska karakteristika $H\left(e^{j\omega_v}\right)$ data sa (11.26).



Slika 11.8 Blok šema sistema za promjenu učestanosti odmjeravanja I/D puta.



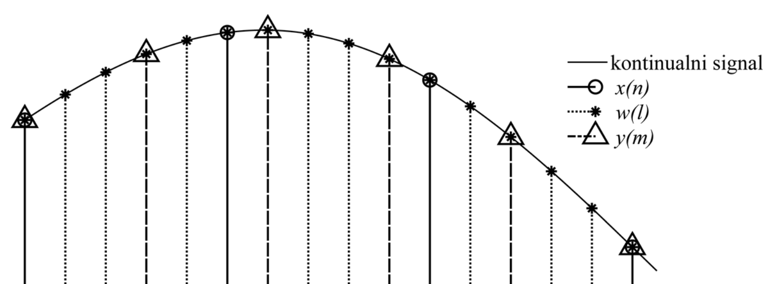
Slika 11.9 Blok šema sistema za promjenu učestanosti odmjeravanja I/D puta sa jednim filtrom.

11.2 Povezivanje sistema sa različitim učestanostima odmjeravanja

Jedna od osnovnih primjena promjene učestanosti odmjeravanja je povezivanje sistema koji rade na različitim učestanostima odmjeravanja. Umjesto vraćanja u analogni domen i ponovnog odmjeravanja, jednostavnije je koristiti interpolaciju i decimaciju, kao na Slici 11.10. Na Slici 11.11 je ilustrovan proces promjene učestanosti odmjeravanja prikazom diskretnih signala sa blok šeme date na Slici 11.10, kada je odnos učestanosti odmjeravanja sistema koje povezujemo racionalan broj, $F_{s,y}/F_{s,x}=I/D$. U ovom primjeru, prvo se uradi interpolacija signala $x(n)$ faktorom pet, a zatim decimacija tako dobijenog signala $w(l)$



Slika 11.10 Povezivanje sistema sa različitim učestanostima odmjeravanja.



Slika 11.11 Proces promjene učestanosti odmjeravanja faktorom $I/D = 5/3$.

faktorom tri, da bi se dobio signal $y(m)$. Ukoliko odnos učestanosti odmjeravanja sistema koje povezujemo nije racionalan broj, problem određivanja vrijednosti nedostajućih odmjeraka u procesu decimacije se riješava dodavanjem funkcijskog interpolatora, kojim se mogu izračunati vrijednosti u bilo kojoj tački između dva odmjerka putem neke funkcije, recimo kolom zadrške, linearnom funkcijom ili funkcijama višeg reda.

11.3 Primjena promjene učestanosti odmjeravanja kod diskretizacije i rekonstrukcije signala

Analogni prefiltar koji se koristi kod A/D konverzije da ograniči frekvencijski opseg signala, kao i analogni postfiltar kod rekonstrukcije signala, treba da budu veoma selektivni. Realizacija analognih filtara sa strmom karakteristikom u



Slika 11.12 Blok dijagram A/D konverzije sa decimacijom.

prelaznom opsegu je nepraktična i skupa. Kako bi se prevazišao ovaj problem, prilikom A/D konverzije moguće je signal odmjeriti frekvencijom odmjeravanja koja je *M* puta veća od $2\Omega_g$, gdje je Ω_g gornja granična učestanost korisnog spektra signala, pa nakon toga uraditi decimaciju faktorom *M*, da bi se dobio signal odmjeren manjom frekvencijom odmjeravanja, koja zadovoljava Nikvistov kriterijum. Blok dijagram ovakve A/D konverzije, kod koje se prvo koristi odmjeravanje frekvencijom koja je veća od zadate Nikvistovim kriterijumom, a zatim decimacija, je prikazan na Slici 11.12, a detaljno objašnjenje slijedi u nastavku izlaganja.

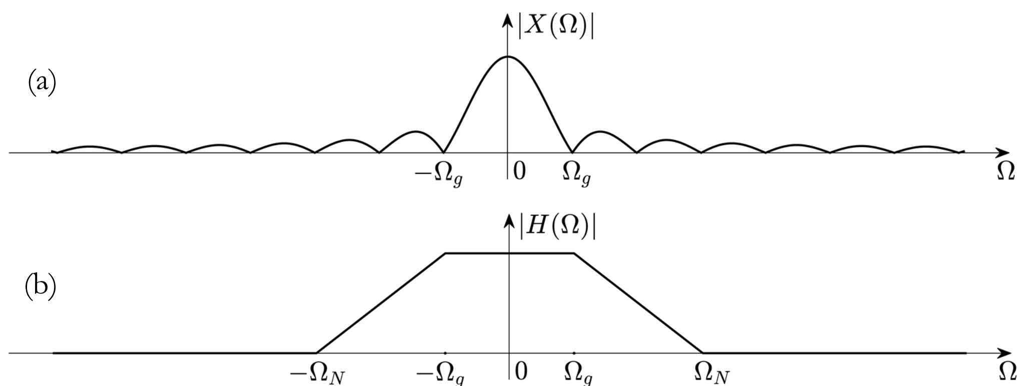
Pretpostavimo da se korisni dio spektra signala koga odmjeravamo, prikazan na Slici 11.13(a), nalazi u opsegu $\left[-\Omega_g, \Omega_g\right]$. Ako bi učestanost odmjeravanja bila jednaka $2\Omega_g$, signal bismo morali filtrirati sa analognim filtrom čija je karakteristika veoma strma, tako da ne naruši korisni dio spektra, a jako oslabi spektralne komponente van opsega $\left[-\Omega_g, \Omega_g\right]$, kako prilikom odmjeravanja signala ne bi došlo do preklapanja spektra. Realizacija takvih analognih filtara je veoma složena.

Međutim, ako odaberemo mnogo veću frekvenciju odmjeravanja, prelazni opseg $\left[\Omega_g, \Omega_N\right)$ niskopropusnog filtra, sa amplitudnom karakteristikom $\left|H(\Omega)\right|$, može biti mnogo širi, kao što je prikazano na Slici 11.13(b), što značajno olakšava realizaciju analognog prefiltra. Pri tome je važno osigurati da prilikom odmjeravanja tako filtriranog signala, prikazanog na Slici 11.13(c), ne dođe do preklapanja replika spektra sa korisnim dijelom spektra. Na Slici 11.13(d) su prikazane replike amplitudnog spektra koje nastaju prilikom odmjeravanja signala. Vidimo da je moguće, koristeći dovoljno visoku frekvenciju

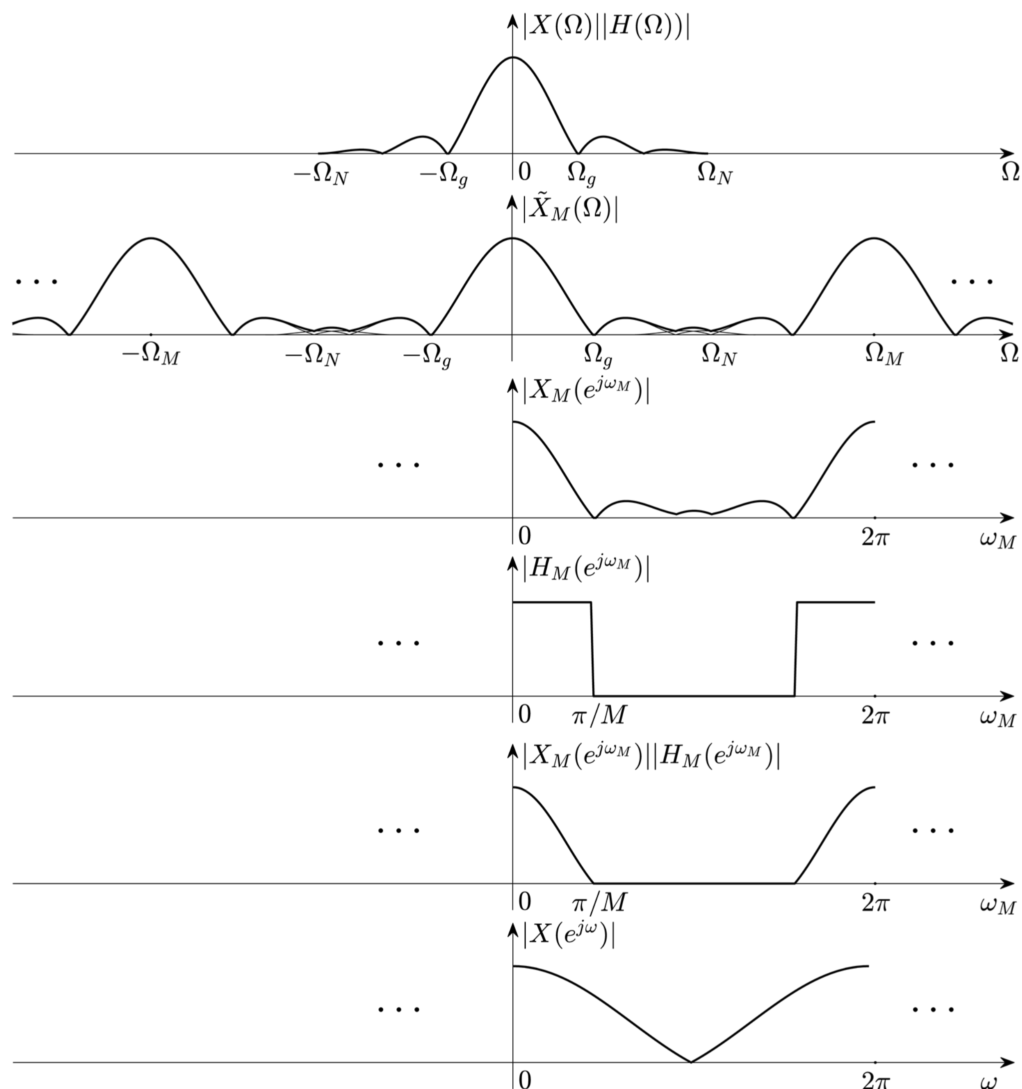
odmjeravanja, osigurati da se replike spektra ne preklapaju sa korisnim dijelom spektra signala, na učestanostima manjim od Ω_g. Kako bismo to postigli, učestanost odmjeravanja Ω_M treba da zadovoljava uslov:

$$\Omega_M \geq \Omega_g + \Omega_N . \tag{11.32}$$

Amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog korištenjem učestanosti odmjeravanja $\Omega_M = 2M\Omega_g$ je prikazan na Slici 11.13 (e). U procesu decimacije faktorom *M*, digitalni niskopropusni filtar, sa graničnom učestanošću π/M, Slika 11.13(f), potiskuje sve neželjene spektralne komponente koje se nalaze van korisnog dijela spektra u signalu na Slici 11.13(e), te dobijamo diskretni signal sa amplitudnim spektrom prikazanim na Slici 11.13(g). Nakon uzimanja svakog *M*-tog odmjerka, dobijamo signal odmjeren sa $2\Omega_g$. Amplitudni spektar tako dobijenog diskretnog signala, prikazan na Slici 11.13(h), odgovara amplitudnom spektru signala koji bismo dobili korištenjem analognog filtra koji ukida sve frekvencijske komponente veće od Ω_g i odmjeravanjem sa $2\Omega_g$. Na ovaj način smo, bez primjene visokoselektivnih analognih filtara, uspjeli da odmjerimo signal minimalno potrebnom frekvencijom odmjeravanja, tako da ne dođe do narušavanja korisnog dijela spektra signala.



Slika 11.13 Analogno/digitalna konverzija sa decimacijom: (a) amplitudni spektar kontinualnog signala; (b) amplitudna karakteristika analognog NP filtra (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 11.13 Analogno/digitalna konverzija sa decimacijom: (c) amplitudni spektar kontinualnog signala nakon filtriranja; (d) amplitudni spektar kontinualnog signala odmjerenog sa $\Omega_M = 2M\Omega_g$; (e) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa Ω_M; (f) amplitudna karakteristika digitalnog NP filtra; (g) amplitudni spektar diskretnog signala nakon filtriranja i (h) amplitudni spektar diskretnog signala odmjerenog sa $2\Omega_g$. (nastavak sa prethodne stranice).



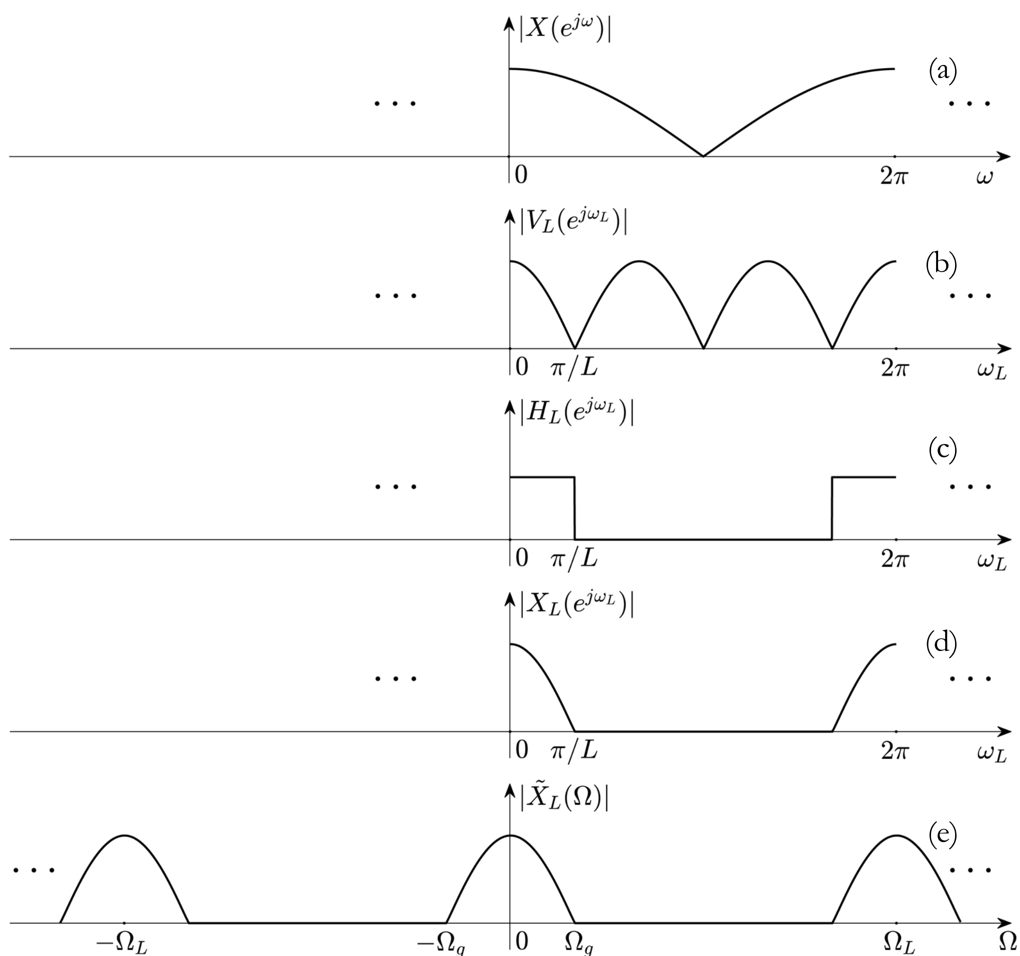
Slika 11.14 Blok dijagram D/A konverzije sa interpolacijom.

Sličan postupak, prikazan blok dijagramom na Slici 11.14, koristi se kod D/A konverzije, sa ciljem da se izbjegne korištenje visoko selektivnog analognog filtra prilikom rekonstrukcije signala. Na Slici 11.15(a) je prikazan amplitudni spektar diskretnog signala iz kog je potrebno rekonstruisati kontinualni signal.

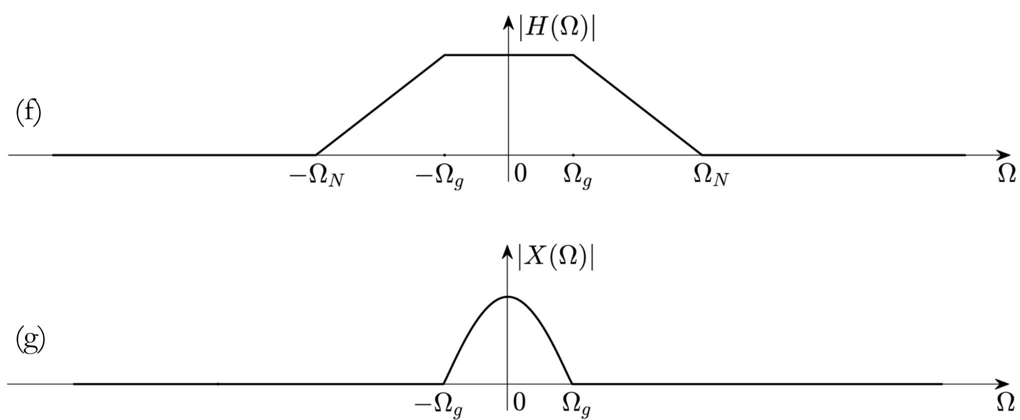
Pretpostavimo da je prilikom odmjeravanja poštovan Nikvistov kriterijum, tako da je učestanost odmjeravanja tog signala jednaka $2\Omega_g$, gdje je Ω_g gornja granična učestanost u spektru kontinualnog signala. Nakon interpolacije, koja se sastoji od ubacivanja $L-1$ nula, čime se sužava spektar signala, Slika 11.15(b), i filtriranja niskopropusnim filtrom, čija je amplitudna karakteristika data na Slici 11.15(c), dobijamo signal kod koga su odsječene nepotrebne replike signala, i čija je učestanost odmjeravanja L puta veća, $\Omega_L = 2L\Omega_g \gg \Omega_g$. Amplitudni spektar tog signala je prikazan na Slici 11.15(d), a amplitudni spektar njemu odgovarajućeg diskretizovanog signala na Slici 11.15(e). Sada analogni filtar, kojim se izdvaja spektar iz kog se rekonstruiše kontinualni signal, Slika 11.15(g), može imati širok prelazni opseg, kao na Slici 11.15(f). Sa Slike 11.15 zaključujemo da je uslov koji treba ispuniti pri projektovanju ovog analognog niskopropusnog filtra, vezan za graničnu učestanost nepropusnog opsega Ω_N, dat sa:

$$\Omega_N \leq (2L-1)\Omega_g. \tag{11.33}$$

Na ovaj način, korištenjem interpolacije prije A/D konverzije, izbjegavamo korištenje visokoselektivnih filtara koji su složeni za realizaciju i skupi.



Slika 11.15 Digitalno/analogna konverzija sa interpolacijom: (a) amplitudni spektar diskretnog signala dobijenog odmjeravanjem sa $2\Omega_g$; (b) amplitudni spektar tog signala nakon ubacivanja L-1 nula u procesu interpolacije; (c) amplitudna karakteristika digitalnog NP filtra; (d) amplitudni spektar diskretnog signala nakon kompletnog procesa interpolacije; (e) amplitudni spektar rekonstruisanog kontinualnog signala, diskretizovanog sa $\Omega_M = 2L\Omega_g$ (nastavak na sljedećoj stranici);

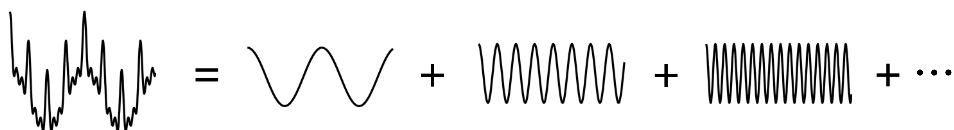


Slika 11.15 Digitalno/analogna konverzija sa interpolacijom: (f) amplitudna karakteristika analognog NP filtra i (h) amplitudni spektar rekonstruisanog kontinualnog signala (nastavak sa prethodne stranice).

Glava 12

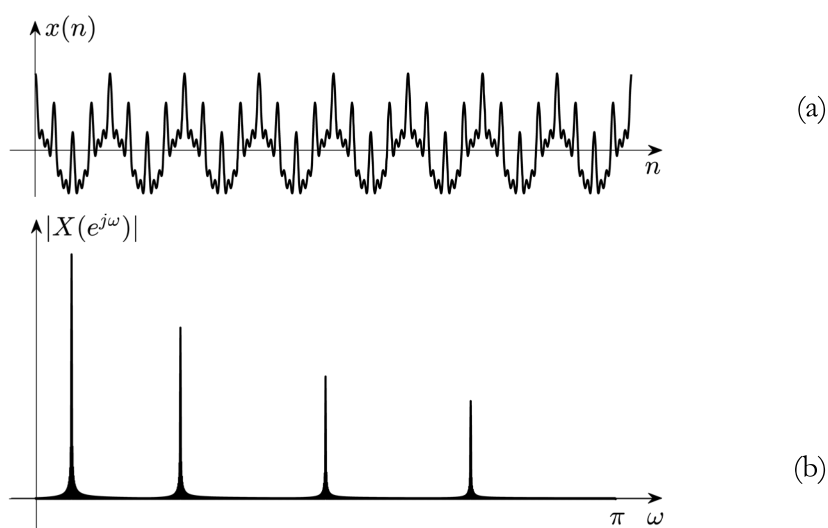
VREMENSKO - FREKVENCIJSKA I VIŠEREZOLUCIONA ANALIZA SIGNALA

U analizi signala u prethodnim poglavljima smo smatrali da se radi o *stacionarnim signalima*, tj. o signalima čiji se frekvencijski sadržaj ne mijenja u toku vremena. Za njihovu analizu smo koristili Furijeove metode predstave signala u frekvencijskom domenu, preko elementarnih prostoperiodičnih signala. Furijeova analiza daje informaciju o frekvencijskom sadržaju signala, ali je u slučaju *nestacionarnih signala*, kod kojih se frekvencijski sadržaj signala tokom vremena mijenja, nemoguće zaključiti kada se koja od spektralnih komponenti pojavljuje. Stoga je za analizu nestacionarnih signala neophodno koristiti metode koje uključuju i vremensku komponentu, kao što su vremenski zavisna kratkotrajna Furijeova transformacija, koja frekvencijski sadržaj signala predstavlja u ravni vrijeme-frekvencija, ili vejvlet transformacija, koja signal razlaže na skalirane talasiće i informaciju o tome predstavlja u ravni vrijeme-skala.

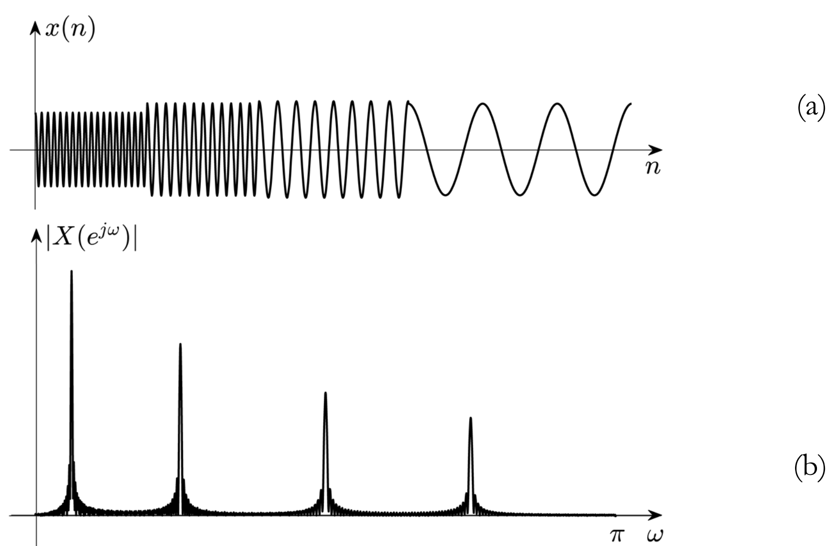


Slika 12.1 Razlaganje signala na elementarne prostoperiodične komponente.

Koristeći Furijeove metode analize, signal razlažemo na elementarne prostoperiodične komponente, kao što je ilustrovano na Slici 12.1. Posmatrajući amplitudne spektre signala sa slika 12.2(a) i 12.3(a), koji su dati na slikama 12.2(b) i 12.3(b), respektivno, zaključujemo da veoma različiti signali, koji sadrže prostoperiodične komponente istih učestanosti, ali tako da se one pojavljuju u različitim vremenskim intervalima, imaju sličan amplitudni spektar. Posmatrajući samo u frekvencijskom domenu, zanemarujući dimenziju vremena, možemo izvesti pogrešan zaključak da se radi o signalima koji su slični i u vremenskom domenu. Stoga Furijeov red i Furijeova transformacija nisu pogodni metodi za analizu nestacionarnih signala, kakav je i signal sa Slike 12.3(a). Budući da je većina signala u prirodi nestacionarna, kao npr. govorni, radarski i sonarski signali, poželjno je pronaći odgovarajući metod njihove analize u frekvencijskom domenu.



Slika 12.2 Stacionarni signali: (a) primjer stacionarnog diskretnog signala (grafički prikazan kontinualnom krivom) i (b) njegov amplitudni spektar.



Slika 12.3 Nestacionarni signali: (a) primjer nestacionarnog diskretnog signala (grafički prikazan kontinualnom krivom) i (b) njegov amplitudni spektar.

12.1 Kratkotrajna Furijeova transformacija kontinualnih signala

Sa ciljem prevazilaženja opisanog problema analize nestacionarnih signala, signal se analizira Furijeovim metodima u kratkim vremenskim intervalima, u kojima se pretpostavlja da se spektar signala ne mijenja, tj. da je signal stacionaran. Postupak ovakve analize ćemo prvo razmotriti kod kontinualnih, a zatim i kod diskretnih signala. Zamislimo da kontinualni signal posmatramo kroz prozor fiksne širine, matematički opisan prozorskom funkcijom $p(t)$, koja klizi preko signala, kao što je ilustrovano na Slici 12.4. Pri svakom pomaku τ prozorske funkcije $p(t)$, određuje se spektar samo dijela signala koji se vidi kroz prozor.

Matematički opisano, vršimo množenje signala $x(t)$ prozorskom funkcijom $p(t)$, čiji oblik može biti i drugačiji od pravougaonog, pomjerenom za vremenski iznos τ, a zatim određujemo Furijeovu transformaciju tako dobijenog signala. To nas vodi ka definiciji *Kratkotrajne Furijeove transformacije* (eng. *Short-Time Fourier Transform* - STFT) kontinualnih signala:

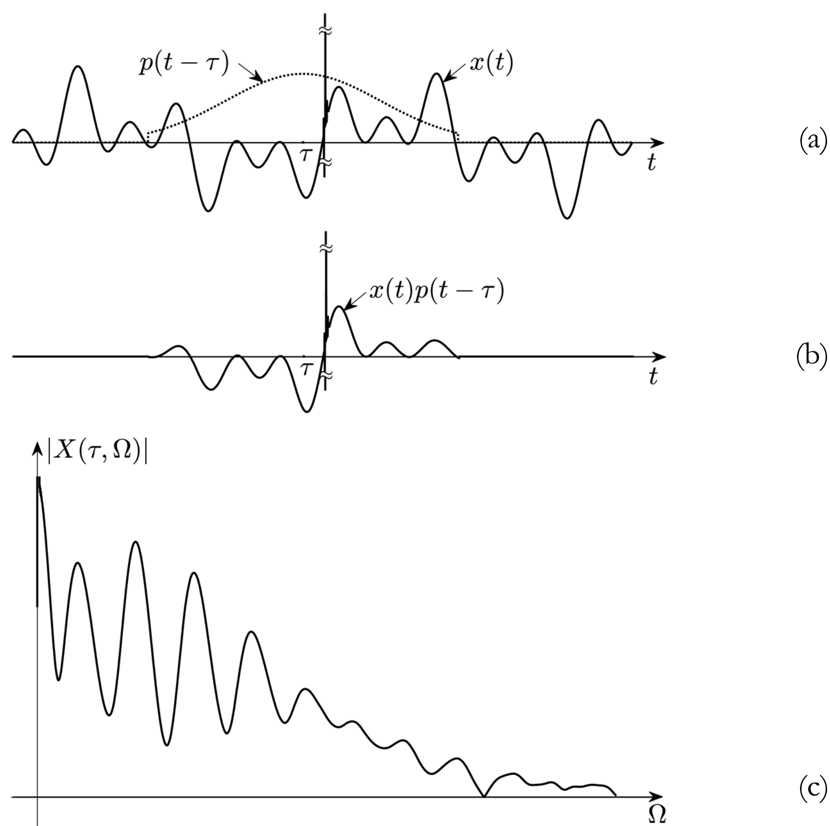
$$\mathrm{STFT}\{x(t)\} = X(\tau,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)p^*(t-\tau)\right]e^{-j\Omega t}dt. \qquad (12.1)$$

U definicionom izrazu se koristi konjugovano-kompleksna prozorska funkcija $p^*(t)$, ali ćemo mi u daljnjem izlaganju podrazumijevati da je prozorska funkcija realna i parna, jer se takve prozorske funkcije najčeće koriste u praksi. Pod tim pretpostavkama vrijedi da je $p^*(t-\tau) = p(\tau - t)$, pa STFT poprima sljedeći oblik:

$$X(\tau,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)p(\tau-t)\right]e^{-j\Omega t}dt. \qquad (12.2)$$

Budući da je, za svaku vrijednost pomaka τ, STFT signala $x(t)$ zapravo Furijeova transformacija dijela signala koji se vidi kroz dati prozor, taj isječak signala se može lako odrediti inverznom Furijeovom transformacijom:

$$x(t)p(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau,\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega. \qquad (12.3)$$



Slika 12.4 STFT posmatrana kao Furijeova transformacijom isječka signala koji se izdvaja množenjem signala sa prozorskom funkcijom: (a) orginalni signal (oznaka $\approx$ je korištena za grafički prikaz kratkotrajnog impulsa velike amplitude, koju nije moguće prikazati u istoj razmjeri kao preostali dio signala) i prozorska funkcija; (b) dio signala koji se vidi kroz prozor i (c) Furijeova transformacija tog dijela signala.

Pretpostavimo da egzistira Furijeova transformacija, $P(\Omega)$, prozorske funkcije $p(t)$. Tada je:

$$P(0)=\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)d\tau, \tag{12.4}$$

pa pomnožimo i podijelimo $x(t)$ sa $P(0)$:

$$x(t)=x(t)\frac{1}{P(0)}\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)d\tau=\frac{1}{P(0)}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(t-\tau)d\tau. \tag{12.5}$$

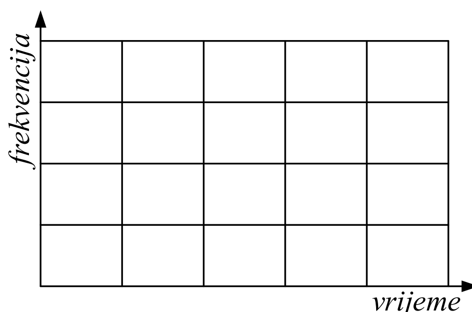
Pri tome smo koristili činjenicu da se vrijednost integrala prozorske funkcije ne mijenja pri njenom reflektovanju i konačnom pomaku τ, tj. da je $\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)d\tau$. Uvrštavajući (12.3) u (12.5) dobijamo izraz za *Inverznu kratkotrajnu Furijeovu transformaciju* (eng. *Inverse Short-Time Fourier Transform* - ISTFT) kontinualnih signala:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi P(0)}\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau,\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega\right]d\tau, \tag{12.6}$$

koji nam govori da sintezu originalnog signala $x(t)$ možemo dobiti integrirajući sve njegove isječke koji nastaju množenjem sa prozorskom funkcijom, za sve moguće pomake prozorske funkcije (12.5), a koje rekonstruišemo iz STFT inverznom Furijeovom transformacijom datom sa (12.3). Redundansa u preklapajućim segmentima i sabiranje na dijelovima preklapanja poništavaju efekat množenja signala prozorskom funkcijom.

Ukoliko je $p(0)\neq 0$, iz (12.3) jednostavno dobijamo alternativni izraz za inverznu kratkotrajnu Furijeovu transformaciju kontinualnih signala, ako stavimo da je $\tau=t$:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi p(0)}\int_{-\infty}^{\infty} X(t,\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega. \tag{12.7}$$

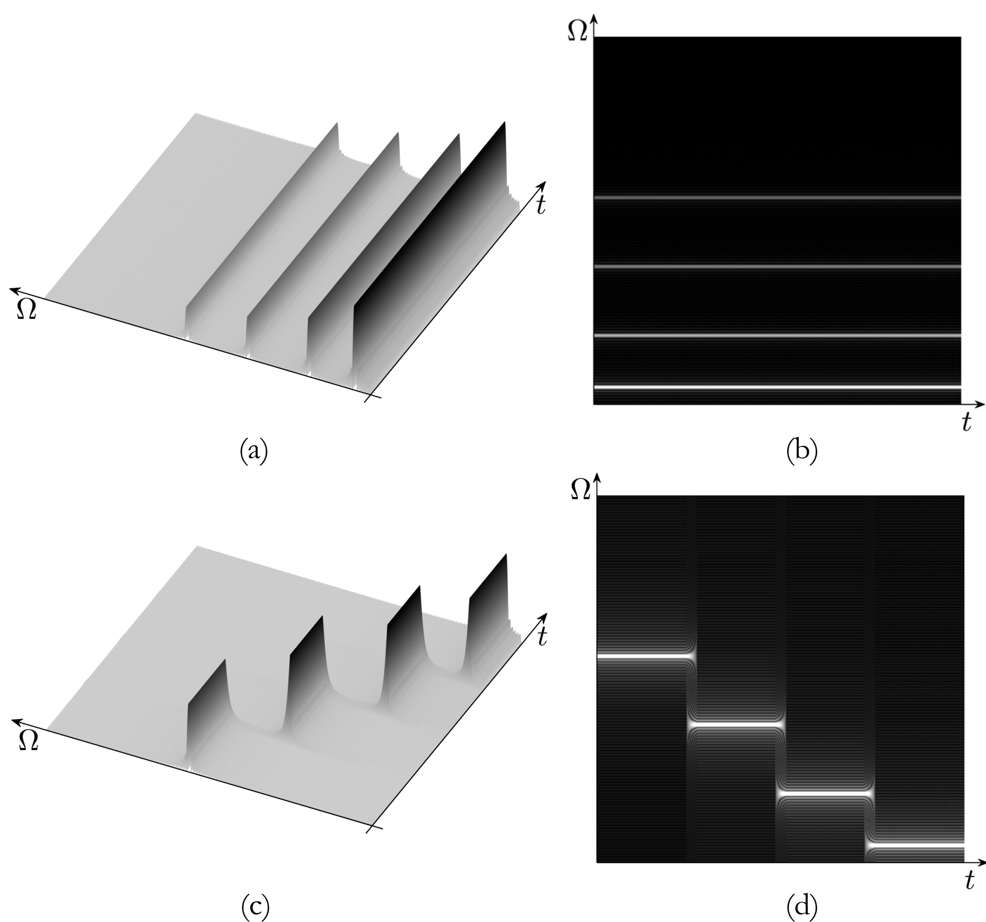


Slika 12.5 Podjela vremensko-frekvencijske ravni spektrograma.

Slično kao kad radimo inverznu Furijeovu transformaciju stacionarnih signala, signal rekonstruišmo sumiranjem njegovih frekvencijskih komponenti. Međutim, kada su u pitanju nestacionarni signali, prilikom rekonstrukcije signala na način dat sa (12.7), integral je potrebno izračunati svaki put ponovo pri promjeni vremenske promjenljive, jer su amplitude i faze frekvencijskih komponenti $X(t,\Omega)e^{j\Omega t}$ vremenski zavisne.

Kratkotrajna Furijeova transformacija je funkcija učestanosti, ali i vremenskog pomaka prozorske funkcije, tj. trenutka posmatranja signala, pa stoga govorimo o *vremensko-frekvencijskoj analizi* signala. Vizualizaciju modula STFT u ravni vrijeme-frekvencija, prikazanoj na Slici 12.5, nazivamo *spektrogram*. Podjela vremensko-frekvencijske ravni po vremenskoj osi odgovara širini prozorske funkcije, dok podjela po frekvencijskoj osi odgovara širini spektra prozorske funkcije. Frekvencijske komponente sadržane u signalu u vremenskom intervalu čije je trajanje jednako širini prozorske funkcije nazivamo *lokalne frekvencijske komponente*.

Za spektrogram, kao grafičku predstavu dvodimenzionalne funkcije, možemo koristi 3D, ali se češće koristi 2D prikaz, pri čemu se različite vrijednosti funkcije prikazuju različitim bojama iz odabrane palete boja (tzv. kolor mape). Boje u kolor mapi se uglavnom biraju tako da se velike vrijednosti funkcije prikazuju jarkim bojama (npr. crvenom, žutom i sl.), dok se male vrijednosti prikazuju slabije uočljivim bojama (npr. plavom, ljubičastom i sl.). Radi jednostavnije štampe, mi ćemo koristiti kolor mapu kojom se vrijednosti funkcije



Slika 12.6 Primjeri spektrograma: (a) 3D spektrogram signala sa Slike 12.2(a); (b) 2D spektrogram signala sa Slike 12.2(a); (c) 3D spektrogram signala sa Slike 12.3(a) i (d) 2D spektrogram signala sa Slike 12.3(a).

prikazuju nijansama sive, pri čemu, u 3D prikazu, većim vrijednostima odgovaraju tamnije, a u 2D prikazu svjetlije nijanse. Kao primjer, na Slici 12.6 su prikazani spektrogrami signala sa slika 12.2(a) i 12.3(a) u 3D i 2D prikazu. Prilikom računanja spektrograma, korišten je Hamingov prozor čija je širina 4,5 puta manja od trajanja signala sa preklapanjem od 50%, što ćemo detaljnije objasniti nakon uvođenja STFT za diskretne signale. Za razliku od amplitudnih spektara ova dva signala, datih na slikama 12.2(b) i 12.3(b), iz spektrograma jasno

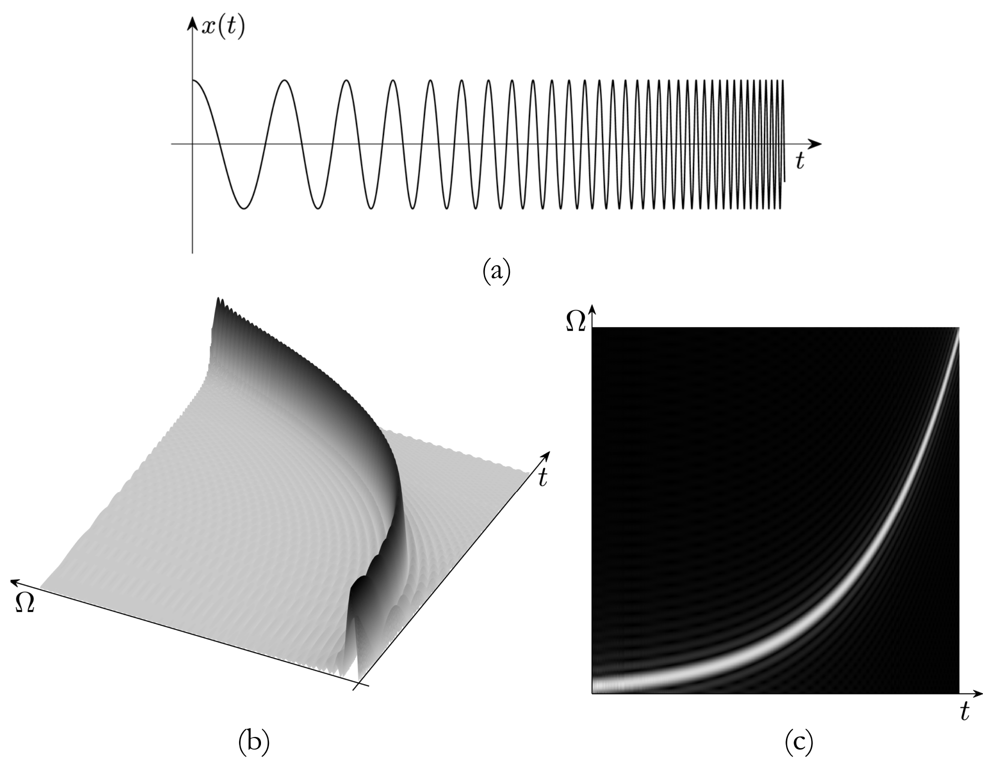
vidimo kako se u toku vremena mijenja njihov frekvencijski sadržaj: u prvom signalu su sve četiri frekvencijske komponente stalno prisutne, dok se u drugom signalu prvo pojavljuje frekvencijska komponenta najviše učestanosti, a zatim, redom prema nižim učestanostima, slijede tri preostale frekvencijske komponente.

Ovakav način prikaza je sličan notaciji koja se koristi u muzici: notama se prikazuju tonovi (svakom tonu odgovara određena frekvencija) i njihovo trajanje za svaki instrument u orkestru. Kada orkestar svira po tim notama, u jednom vremenskom intervalu istovremeno čujemo više tonova. Postoje dokazi koji sugerišu da ljudsko uho izdvaja informacije iz spektrogramskog načina prikaza signala, a istraživači koji se bave analizom govora mogu vizuelno "čitati" spektrograme.

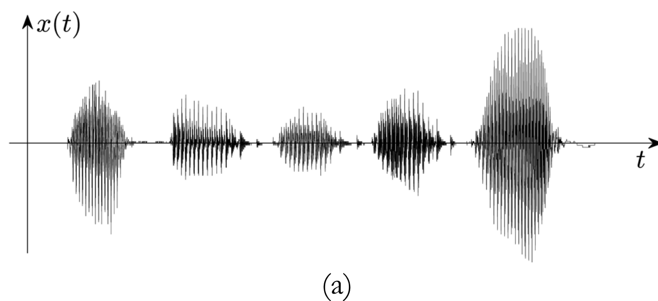
Karakterističan primjer nestacionarnog signala je čirp signal. Na Slici 12.7(a) je prikazan čirp signal sa logaritamskom promjenom frekvencije. Amplitudni spektar ovog signala, računat Furijeovom transformacijom, je skoro ravan u frekvencijskom opsegu od minimalne do maksimalne frekvencije sadržane u čirp signalu, dok njegov spektrogram, dat u 3D i 2D prikazu na Slici 12.7(b) i Slici 12.7(c), respektivno, jasno ukazuje na promjenu učestanosti u toku vremena.

Kratkotrajna Furijeova transformacija je moćan alat za analizu audio signala. Vremensko-frekevencijskom analizom govornog signala, koji je stacionaran u vremenskim intervalima trajanja 10-30 ms, jasno uočavamo razlike u obliku spektrograma izgovorenih glasova, kao što je prikazano na Slici 12.8. Iz spektrograma je moguće procijeniti osnovnu frekvenciju tona govornika, svojstvenu svakoj osobi. Osim za analizu govora, STFT se može koristiti i za mnoge druge primjene u oblasti audio signala, npr. da imitira ljudsku percepciju prilikom prepoznavanja zvučne scene, ili za automatsku transkripciju muzike.

Prilikom računanja STFT, vremensko-frekvencijsku ravan možemo popunjavati na dva načina: računanjem spektra signala koji se vidi kroz klizeći prozor konačne širine u vremenskom domenu, ili filtriranjem signala klizećim filtrom propusnikom opsega. Ova dva načina popunjavanja vremensko-frekvencijske ravni ilustrovana su na Slici 12.9.

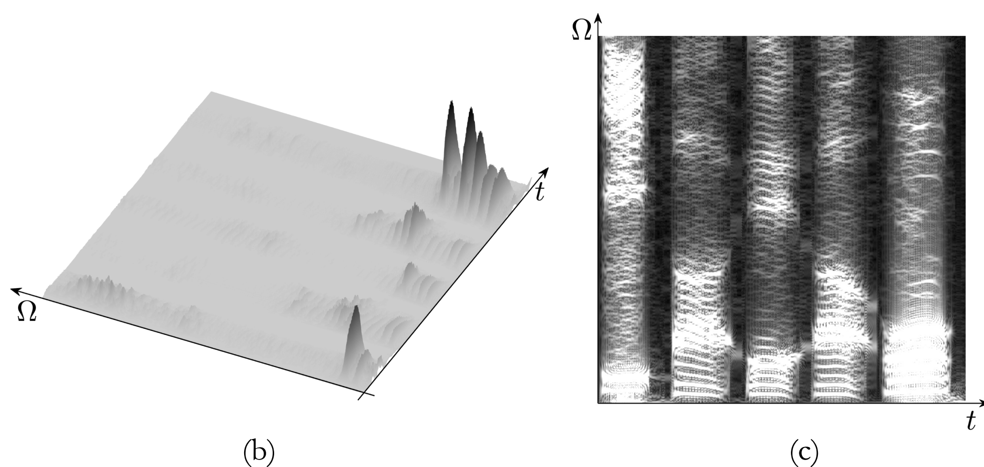


Slika 12.7 Spektrogram čirp signala: (a) čirp signal; (b) njegov spektrogram u 3D i (c) 2D prikazu.

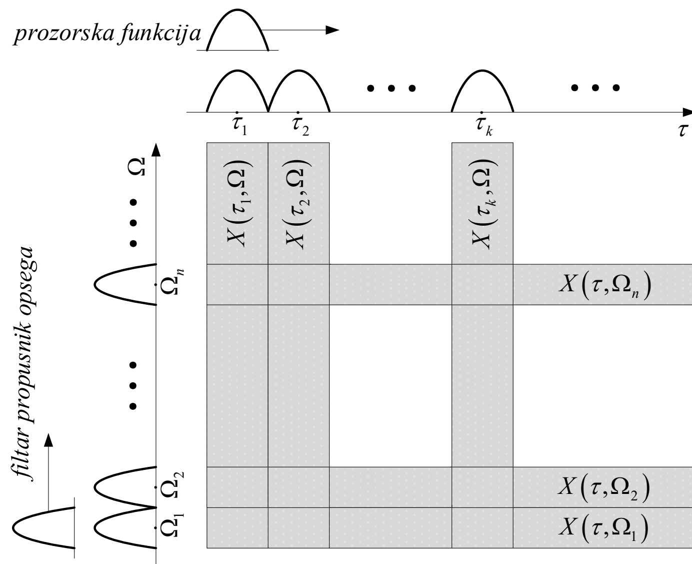


(a)

Slika 12.8 Spektrogram govornog signala: (a) primjer govornog signala (glasovi: "i", "a", "e", "a", "o", izgovoreni jedan iza drugog) (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 12.8 Spektrogram govornog signala: (b) njegov spektrogram u 3D i (c) 2D prikazu (nastavak sa prethodne stranice).



Slika 12.9 Popunjavanje vremensko-frekvencijske ravni primjenom klizećeg prozora po vremenskoj osi i primjenom klizećeg prozora po frekvencijskoj osi.

Pretpostavimo, prvo, da fiksiramo vremensku promjenljivu, $\tau = \tau_k$, tako da $X(\tau_k, \Omega)$ postaje funkcija samo učestanosti Ω, i računa se kao Furijeova transformacija isječka signala izdvojenog množenjem sa pomjerenom prozorskom funkcijom $p(t - \tau_k)$. Vertikalne trake u vremensko-frekvencijskoj ravni popunjavamo pomjerajući prozorsku funkciju $p(t)$ po vremenskoj osi i unoseći, pri svakom pomaku τ_k, $k = 1, 2, \ldots$ vrijednosti Furijeove transformacije signala $x(t)p(t - \tau_k)$, po frekvencijskoj osi.

Kako bismo objasnili popunjavanje vremensko-frekvencijske ravni primjenom klizećeg prozora po frekvencijskoj osi, fiksirajmo frekvencijsku promjenljivu, stavljajući da je $\Omega = \Omega_k$, a vremensku promjenljivu τ u izrazu (12.2) zamijenimo oznakom *t*. Onda kratkotrajnu Furijeovu transformaciju $X(t, \Omega_k)$ možemo posmatrati kao konvoluciju signala $x(t)$ i modulisane prozorske funkcije $p(t)e^{j\Omega_k t}$, dodatno pomnoženu sa $e^{-j\Omega_k t}$:

$$\begin{aligned} X(t, \Omega_k) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left[p(t-u) e^{j\Omega_k (t-u)} \right] du \right\} e^{-j\Omega_k t} = \\ &= \left\{ x(t) * \left[p(t) e^{j\Omega_k t} \right] \right\} e^{-j\Omega_k t}. \end{aligned} \tag{12.8}$$

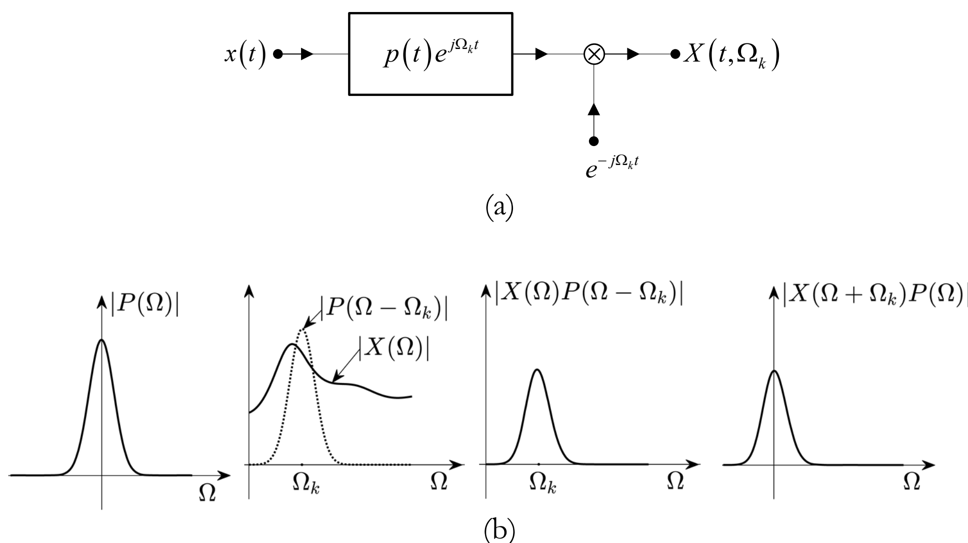
Dakle, STFT dobijamo propuštanjem signala $x(t)$ kroz sisteme sa impulsnim odzivima oblika $p(t)e^{j\Omega_k t}$. Pri fiksiranim vrijednostima učestanosti Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, STFT postaje funkcija samo vremenske promjenljive. Računanju ove konvolucije u vremenskom domenu, u frekvencijskom domenu odgovara množenje spektra signala sa pomjerenim spektrom prozorske funkcije, $P(\Omega - \Omega_k)$. Za popunjavanje kompletne vremensko-frekvencijske ravni, frekvencijska karakteristika $P(\Omega)$ se pomjera po frekvencijskoj osi, tako da postaje frekvencijska karakteristika filtara propusnika opsega, centriranih oko konkretnih učestanosti Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$ Signal se filtrira kroz sve tako dobijene filtre i rezultati se unose u vremensko-frekvencijsku ravan, na konkretnim učestanostima, za sve vrijednosti vremenske promjenljive. Na taj način se vremensko-frekvencijska ravan popunjava po horizontalnim trakama. Prozorska

funkcija $p(t)$ treba da ima oblik impulsnog odziva niskopropusnog filtra, kako bi se, množenjem sa $e^{j\Omega_k t}$, formirao filtar propusnik opsega, centriran oko konkretne učestanosti Ω_k. U skladu sa (12.8), demodulacijom sa $e^{-j\Omega_k t}$ se, filtriranjem prethodno izdvojen frekvencijski podopseg signala $x(t)$, pomjera u ishodište, kao što je ilustrovano na Slici 12.10, na primjeru jednog filtra propusnika opsega, centriranog oko učestanosti Ω_k. Na izlazu filtra se tako dobija niskofrekvencijska predstava dijela signala iz propusnog opsega filtra, $X(\Omega+\Omega_k)P(\Omega)$, koja ukazuje na promjenu frekvencijskog sadržaja signala, iz tog opsega, tokom vremena.

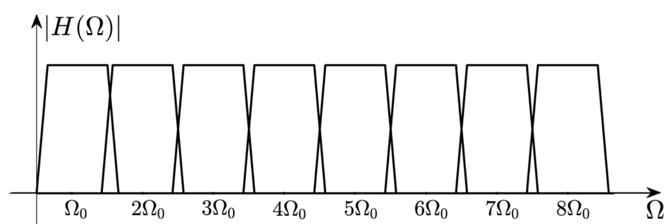
Umjesto da se postupak ponavlja za svaku učestanost za koju se vrši popunjavanje vremensko-frekvencijske ravni, signal se istovremeno propušta kroz niz filtara propusnika opsega, tzv. *banku filtara*, koji imaju jednake širine propusnih opsega, kao na Slici 12.11. Banka filtara razdvaja signal na podopsege frekvencijskih komponenti izvornog signala, centrirane oko učestanosti $\Omega_k = k\Omega_0$, $k = 1,2,\ldots$. Na taj način se, u svakom trenutku, na izlazima pojedinačnih filtara dobijaju niskofrekvencijske predstave dijelova signala iz odgovarajućih propusnih opsega.

Impulsni odzivi filtara propusnika opsega u banci filtara se dobijaju modulacijom impulsnog odziva niskopropusnog filtra, $p(t)$. U slučaju da $p(t)$ ima oblik Gausove funkcije, kao na Slici 12.12(a), primjeri impulsnih odziva filtara propusnika opsega su dati na slikama 12.12(b-d). Zbog osobina realnosti i parnosti impulsnih odziva, konvoluciji signala sa ovakvim impulsnim odzivima odgovara korelacija. Stoga STFT možemo tumačiti i kao korelaciju, koja predstavlja mjeru sličnosti dva signala. Prema tome, vrijednost konvolucije/korelacije signala na izlazu nekog od filtara propusnika opsega iz banke filtara, a samim tim i vrijednost STFT za odgovarajuću učestanost, u nekom trenutku, ukazuje na mjeru sličnosti signala u tom trenutku sa oblikom impulsnog odziva tog filtra.

Iako izloženi metod filtriranja bankom filtara sa konstantnom širinom propusnih opsega jasno ilustruje način popunjavanja vremensko-frekvencijske ravni, sam postupak filtriranja se može pojednostaviti sa stanovišta praktične



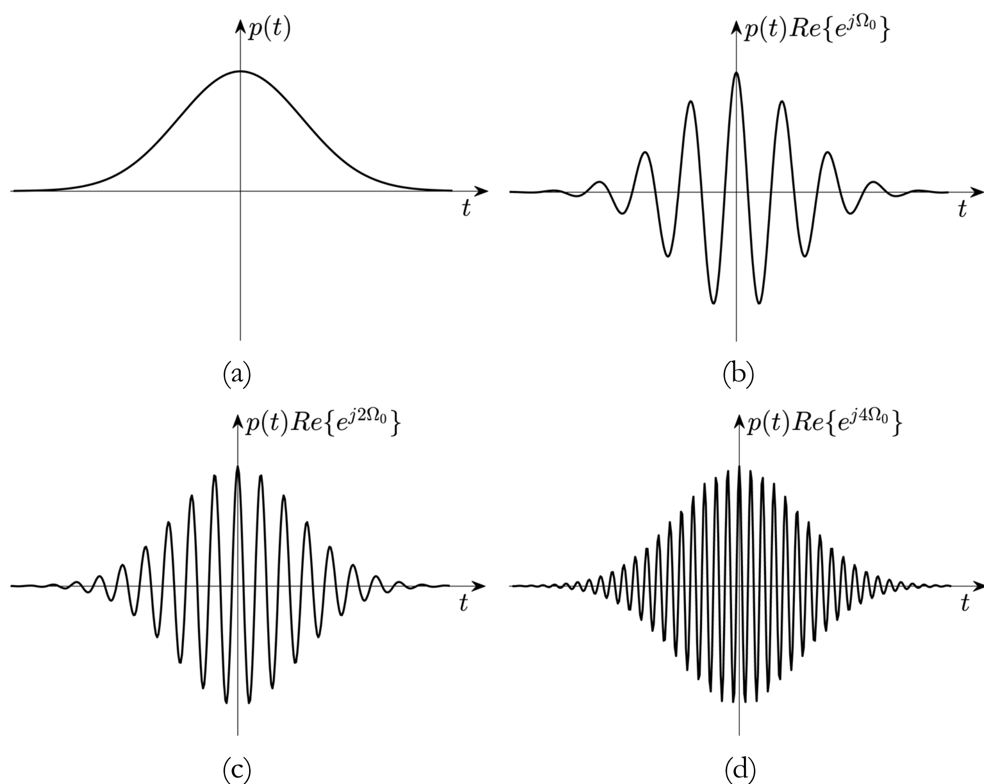
Slika 12.10 Određivanje STFT filtriranjem signala filtrima propusnicima opsega: (a) blok šema i (b) postupak filtriranja.



Slika 12.11 Raspored propusnih opsega banke filtara pri određivanju STFT.

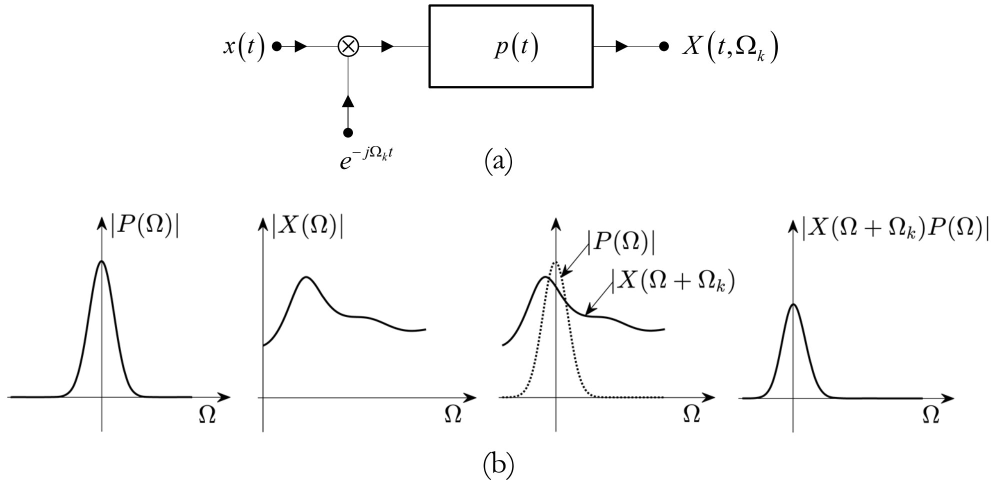
realizacije. Umjesto filtriranja signala $x(t)$ bankom filtara propusnika opsega, STFT možemo dobiti filtriranjem modulisanih signala $x(t)e^{-j\Omega_k t}$, $k=1,2,\ldots$ jednakim niskopropusnim filtrima sa impulsnim odzivom $p(t)$, što lako vidimo ako (12.2) zapišemo kao konvoluciju u sljedećem obliku:

$$X(t,\Omega_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(u)e^{-j\Omega_k u}\right]p(t-u)du\,. \tag{12.9}$$



Slika 12.12 Primjeri impulsnih odziva filtara za određivanje STFT: (a) niskopropusni filtar i (b-d) filtri propusnici opsega.

Računajući STFT u dijelu vremensko-frekvencijske ravni oko konkretne učestanosti Ω_k na ovaj način, prvo modulišemo signal $x(t)$ sa $e^{-j\Omega_k t}$. Ovoj modulaciji signala $x(t)$ u vremenskom domenu odgovara pomjeranje njegovog spektra za vrijednost Ω_k prema ishodištu. Modulisani signal $x(t)e^{-j\Omega_k t}$ se zatim filtrira niskopropusnim filtrom čiji je impulsni odziv $p(t)$. Postupak je ilustrovan na Slici 12.13. Nakon modulacije signala sa različitim učestanostima Ω_k, koristeći jednake niskopropusne filtre, na izlazima filtara dobijamo niskofrekvencijske predstave segmenata analiziranog signala, koji sadrže frekvencijske komponente iz okolina odabranih učestanosti.



Slika 12.13 Određivanje STFT niskopropusnim filtriranjem modulisanog signala: (a) blok šema i (b) postupak filtriranja.

12.2 Diskretna kratkotrajna Furijeova transformacija

Nakon što smo uveli kratkotrajnu Furijeovu transformaciju za kontinualne signale, definišimo sada *Kratkotrajnu Furijeovu transformaciju diskretnih signala* (*Discrete Time Short-Time Fourier Transform* – DTSTFT) sa:

$$X\left(m,e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x\left(n\right)p\left(m-n\right)\right]e^{-j\omega n}\ . \tag{12.10}$$

Jednako kao STFT kontinualnih signala, DTSTFT možemo interpretirati na dva načina. Prvi način, iskazan sa (12.10), posmatra DTSTFT kao DTFT dijela signala $x(n)$, koji se izdvaja njegovim množenjem sa pomjerenom prozorskom sekvencom $p(m-n)$. Drugi način posmatra DTSTFT kao filtriranje signala impulsnim odzivima $p(n)e^{j\omega n}$, koji odgovaraju filtrima propusnicima opsega centriranim oko konkretnih učestanosti ω, pri čemu se izlaz iz svakog filtra demoduliše, tj. množi sa $e^{-j\omega n}$:

$$X\left(n,e^{j\omega}\right)=\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[p(n-m)e^{j\omega(n-m)}\right]\right\}e^{-j\omega n}. \tag{12.11}$$

To je ekvivalentno filtriranju modulisanog signala $x(n)e^{-j\omega n}$ niskopropusnim filtrom sa impulsnim odzivom $p(n)$:

$$X\left(n,e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[x(m)e^{-j\omega m}\right]p(n-m). \tag{12.12}$$

Odmjeravanjem u frekvencijskom domenu u N ravnomjerno raspoređenih tačaka, po analogiji kako smo definisali DFT, iz (12.10) dolazimo do definicije *Diskretne kratkotrajne Furijeove transformacije* (*Discrete Short-Time Fourier Transform* – DSTFT), iskazane u obliku DFT isječka signala:

$$X(m,k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)p(m-n)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k=0,1,\ldots,N-1. \tag{12.13}$$

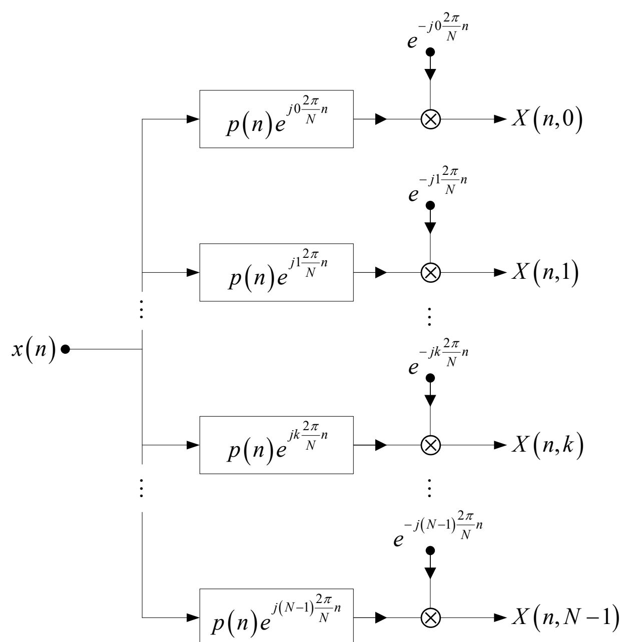
Ako DTSTFT posmatramo kao filtriranje signala filtrima propusnicima opsega, uz demodulisanje signala na izlazima filtara, odmjeravanjem u frekvencijskom domenu iz (12.11) dobijamo:

$$X(n,k)=\left\{\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\left[p(n-m)e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right]\right\}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k=0,1,\ldots,N-1. \tag{12.14}$$

Odmjeravanjem (12.12) u frekvencijskom domenu, gdje DTSTFT posmatramo preko filtriranja modulisanih signala niskopropusnim filtrima, dobijamo:

$$X(n,k)=\sum_{m=-0}^{N-1}\left[x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}\right]p(n-m),\ k=0,1,\ldots,N-1. \tag{12.15}$$

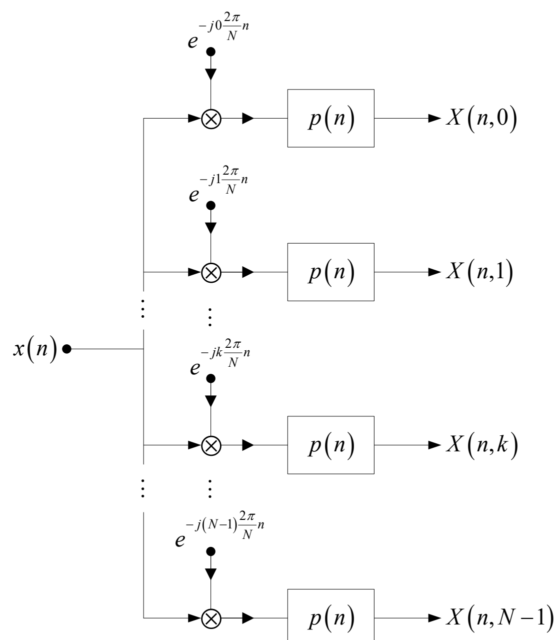
Prilikom odmjeravanja u frekvencijskom domenu, zbog računanja DFT, sekvence u vremenskom domenu moraju biti konačnog trajanja, te su sume u (12.13)-(12.15) konačne. Ako želimo da iz (12.13) rekonstruišemo isječak signala $x(n)p(m-n)$, broj tačaka N u kojima se radi DSTFT treba da bude veći od trajanja prozorske sekvence $p(n)$.



Slika 12.14 DFT banka filtara za analizu signala, sa filtrima propusnicima opsega.

Komponente $X(n,k)$ se mogu tumačiti kao izlazi iz DFT banke filtara za analizu signala, koju čine filtri propusnici opsega, sa dodatnim modulisanjem signala na njihovim izlazima, kao na Slici 12.14, ili niskopropusni filtri sa modulisanim signalima na njihovim ulazima, kao na Slici 12.15. Svaka od komponenti $X(n,k)$ je niskofrekvencijska reprezentacija dijela signala iz opsega centiranog oko učestanosti $2k\pi/N$.

Na ovim interpretacijama su zasnovana i dva osnovna metoda za određivanje inverzne DSTFT, odnosno za sintezu signala na osnovu poznavanja vrijednosti DSTFT. Prvi metod određivanja inverzne DSTFT koristi preklapanje i sabiranje segmenata koji se dobiju inverznom DFT. Drugi metod rekonstruiše signal sabiranjem frekvencijskih komponenti sa izlaza banke filtara za analizu signala.



Slika 12.15 DFT banka filtara za analizu signala, sa niskopropusnim filtrima.

12.2.1 Preklopi i saberi metod inverzne DSTFT

Preklopi i saberi (eng. *Overlap Add* – OLA) metod inverzne DSTFT se zasniva na posmatranju DSTFT kao DFT segmenata signala koji se izdvajaju prozorskom sekvencom konačnog trajanja. Prilikom određivanja DSTFT, DFT se računa za svaki pomak prozorske sekvence po vremenskoj osi, pa je, shodno tome, svaki segment moguće rekonstruisati inverznom DFT. Poznato nam je da inverznom DFT možemo idealno rekonstruisati sekvencu u vremenskom domenu samo ako je ona konačnog trajanja i ako je broj tačaka u kojima se računa DFT veći od trajanja sekvence u vremenu. Stoga je neophodno da prozorska sekvenca $p(n)$ bude konačnog trajanja, tako da su sve njene vrijednosti jednake nuli van intervala širine N_p, te da je odmjeravanje po frekvencijskoj osi izvršeno u $N \geq N_p$ tačaka. Za konkretnu vrijednost pomaka u

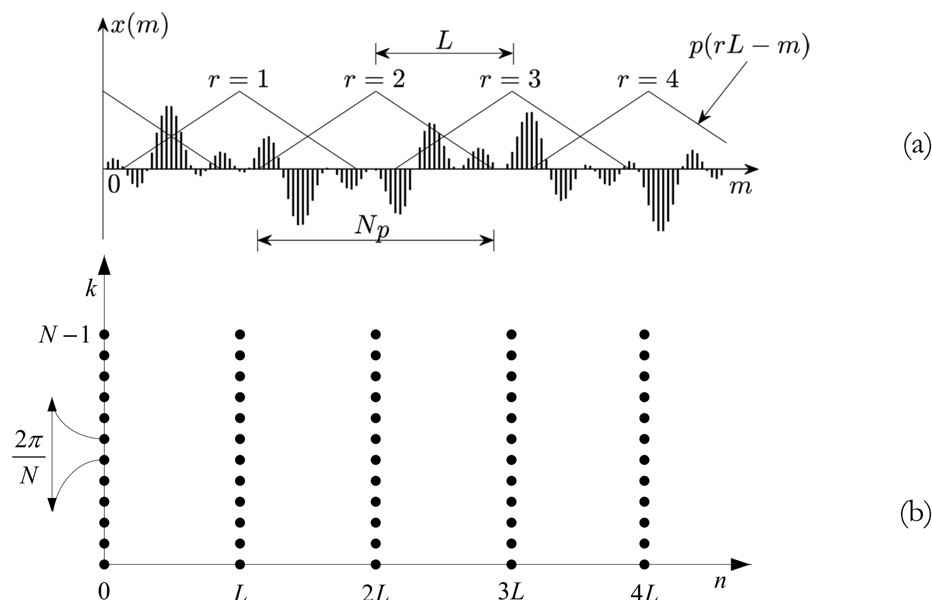
vremenu m, iz $X(m,k)$, inverznom DFT, rekonstruišemo sekvencu $x(n)p(m-n)$. Kao što smo radili pri određivanju inverzne STFT kontinualnih signala, $x(n)p(m-n)$ možemo odrediti preko inverzne DFT, te uz trivijalan uslov da je $p(0)\neq 0$, jednostavno dobijamo analitički izraz za inverznu DSTFT:

$$x(n)=\frac{1}{Np(0)}\sum_{k=0}^{N-1}X(n,k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\ n=0,1,\ldots,N-1. \qquad (12.16)$$

Primijetimo da, koristeći ovaj pristup, sumiranje u (12.16) mora da se radi za svaku vrijednost vremenske promjenljive n ponaosob. Postupak se može donekle pojednostaviti, pod uslovom da su sve vrijednosti prozorske sekvence različite od nule. Tada je za rekonstrukciju N_p elemenata signala dovoljno inverznom DFT rekonstruisati sekvencu $x(n)p(m-n)$, pa uraditi član po član dijeljenje elemenata rekonstruisane sekvence sa elementima prozorske sekvence $p(m-n)$.

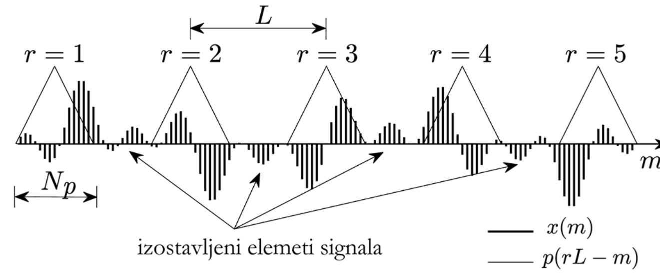
Ako je korak prilikom pomjeranja prozorske sekvence jednak jedinici, onda se isječak signala rekonstruisan na osnovu $X(n,k)$ djelimično preklapa sa isječcima signala rekonstruisanim na osnovu $X(n+l,k)$, $l=1,\ldots,N_p-1$. Primijetimo da N_p-2 istih elemenata signala možemo rekonstruisati iz $X(n+1,k)$ kao iz $X(n,k)$. Zapravo se svaki odmjerak signala može rekonstruisati iz N_p različitih rekonstruisanih isječaka oblika $x(n)p(m-n)$. Zaključujemo da je DSTFT veoma redundantna, ako je korak pri pomjeranju prozorske sekvence po vremenskoj osi jednak jedinici. Stoga se prilikom njenog računanja koristi prorjeđivanje u vremenu, tako da se prozorska sekvenca pomjera sa korakom L, većim od jedinice.

Posmatrajući Sliku 12.16(a), intuitivno je jasno da bi trebalo biti moguće rekonstruisati kompletan signal kombinujući segmente signala koji su izdvojeni pomjeranjem prozorske sekvence na različite lokacije vremenske ose. Ako znamo da je te segmente signala moguće rekonstruisati iz DSTFT koristeći IDFT, onda je iz DSTFT moguće rekonstruisati i kompletan signal u vremenskom domenu.



Slika 12.16 Preklopi i saberi metod inverzne DSTFT: (a) Rekonstrukcija signala iz segmenata i (b) pododmjeravanje vremensko-frekvencijske ravni po vremenskoj osi.

Sada nam je cilj da odredimo minimalan broj tačaka i njihov raspored u vremensko-frekvencijskoj ravni prilikom računanja DSTFT, tako da idealna rekonstrukcija signala i dalje bude moguća. Pretpostavimo da izvršimo pododmjeravanje u vremenskom domenu, tako da $X(n,k)$, umjesto za svako *n*, računamo za $n = rL,\ r \in \mathbb{Z}$. To znači da prozorsku sekvencu pri svakom računanju DSTFT pomjeramo po vremenskoj osi sa korakom *L*. Tako odabrane tačke u vremensko-frekvencijskoj ravni, u kojima se računa DSTFT, su prikazane na Slici 12.16(b). Korak pomjeranja *L* ne smije biti veći od širine prozorske sekvence N_p. Ako bi vrijedilo da je $L > N_p$, postojali bi elementi signala koji nisu uključeni u računanje DSTFT, kao na Slici 12.17. Ti elementi mogu poprimiti proizvoljne vrijednosti, dajući iste vrijednosti $X(n,k)$, za $n = rL,\ r \in Z$, pa DSTFT ne bi bila invertibilna.



Slika 12.17 Primjer pododmjeravanja po vremenskoj osi kod neinvertibilne DSTFT.

Pogledajmo koji još uslovi moraju biti zadovoljeni za idealnu rekonstrukciju signala iz DSTFT, ako radimo pododmjeravanje u vremenskom domenu. Inverzna DFT od $X(rL,k)$ daje isječak signala koji se vidi kroz prozor pomjeren za rL:

$$x(n)p(rL-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(rL,k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \tag{12.17}$$

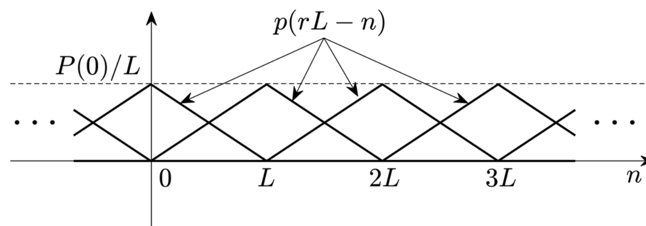
Zaključujemo da će normalizovana suma svih tako dobijenih sekvenci:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n)&=\frac{L}{P(0)}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n)p(rL-n)=\\&=\frac{L}{P(0)}x(n)\sum_{r=-\infty}^{\infty}p(rL-n),\end{aligned} \tag{12.18}$$

biti jednaka originalnom signalu $x(n)$, ako je prozorska sekvenca takva da je ispunjen uslov:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}p(rL-n)=\frac{P(0)}{L}, \tag{12.19}$$

gdje je $P(0)$ vrijednost DFT prozorske sekvence u nuli. Dakle, prozorski signal treba da bude takvog oblika da pri pomjeranju za L zbir svih pomjerenih prozorskih sekvenci bude konstantan u svakom trenutku vremena, kao u primjeru na Slici 12.18.



Slika 12.18 Primjer oblika prozorskog signala pri OLA rekonstrukciji.

U relaciji (12.19), $\sum_{r=-\infty}^{\infty} p(rL-n)$ predstavlja periodično proširenje prozorske sekvence sa periodom L, pa se može iskazati preko IDTFS. Zbog poznate veze DFT sa koeficijentima DTFS, $P(k)=L\cdot c_k$, $k=0,1,2,...,L-1$, vrijedi da je:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} p(rL-n)=\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} P(k)e^{jk\omega_0 n}=\frac{P(0)}{L},\ \omega_0=\frac{2\pi}{L},\ n\in\mathbb{Z}. \tag{12.20}$$

Da bi uslov (12.19), sada iskazan i u frekvencijskom domenu sa (12.20), bio ispunjen, potrebno je odabrati prozorsku sekvencu $p(n)$, čiji će spektar $P(e^{j\omega})$ biti jednak nuli za $\omega=2k\pi/L$, $k=1,2,\ldots,L-1$, što je potreban i dovoljan uslov za idealnu rekonstrukciju signala iz DSTFT.

Pod navedenim uslovima, izraz za rekonstrukciju originalnog signala iz pododmjerene DSTFT je dat sa:

$$x(n)=\frac{L}{p(0)}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(rL,k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right]. \tag{12.21}$$

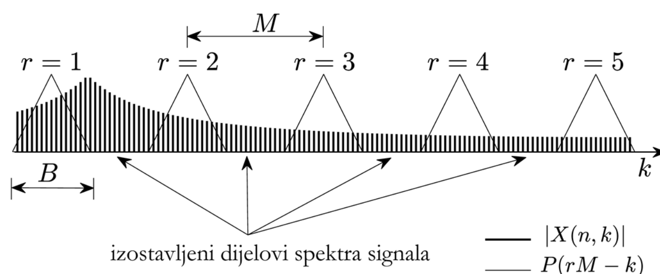
Napomenimo još da, ako se nakon DSTFT u transformacionom domenu vrši filtriranje signala, odmjeravanje po frekvencijskoj osi treba povećati najmanje do dužine sekvence koja se dobije konvolucijom, $N\geq N_p+M-1$, gdje je M dužina impulsnog odziva korištenog filtra.

12.2.2 Metod inverzne DSTFT na osnovu sumiranja izlaza banke filtara

Prilikom projektovanja banke filtara ukupan broj filtara propusnika opsega i način njihovog rasporeda po frekvencijskoj osi treba da bude takav da je moguće rekonstruisati spektar originalnog signala u svakom trenutku vremena. Ukoliko bi se desilo da je korak pomjeranja *M*, pri rasporedu frekvencijskih karakteristika propusnika opsega po frekvencijskoj osi, veći od širine propusnog opsega filtara *B*, kao na Slici 12.19, vrijednosti frekvencijskih komponenti iz izostavljenih dijelova spektra ne bi uticale na vrijednosti signala na izlazima filtara. Tada bi se uz proizvoljne vrijednosti spektra u izostavljenim segmentima rekonstruisao isti signal u vremenskom domenu. U tom slučaju, preslikavanje ne bi bilo 1-1 i DSTFT ne bi bila invertibilna.

Budući da se preko banke filtara DSTFT posmatra kao kolekcija sekvenci na izlazima filtara propusnika opsega, od kojih svaka sadrži frekvencijske komponente čije učestanosti su iz propusnog opsega odgovarajućeg filtra, pomjerene u osnovni opseg, signal $x(n)$ je moguće rekonstruisati njihovim modulisanjem i sabiranjem. Ovaj metod rekonstrukcije signala iz DSTFT je poznat pod nazivom sumiranje izlaza banke filtara (eng. *Filter Bank Summation* - FBS).

Slično kao ranije, kod pomjeranja prozorske sekvence po vremenskoj osi, zbog redundantnosti koja sada nastaje pomjeranjem frekvencijske karakteristike filtra po frekvencijskoj osi, moguće je odrediti minimalan broj tačaka oko kojih se centriraju frekvencijske karakteristike propusnika opsega, a da idealna rekonstrukcija i dalje bude moguća. Raspored tačaka u koje se postavljaju centri frekvencijskih karakteristika filtara propusnika opsega na frekvencijskoj osi ne mora biti ravnomjeran. Ipak, najčešće se koristi DFT banka filtara, tako da su te tačke ravnomjerno raspoređene i nalaze se na cjelobrojnim umnošcima $2\pi/N$, gdje je *N* ukupan broj filtara, koji ujedno odgovara broju tačaka u kom se vrši odmjeravanje po frekvencijskoj osi prilikom računanja DSTFT.



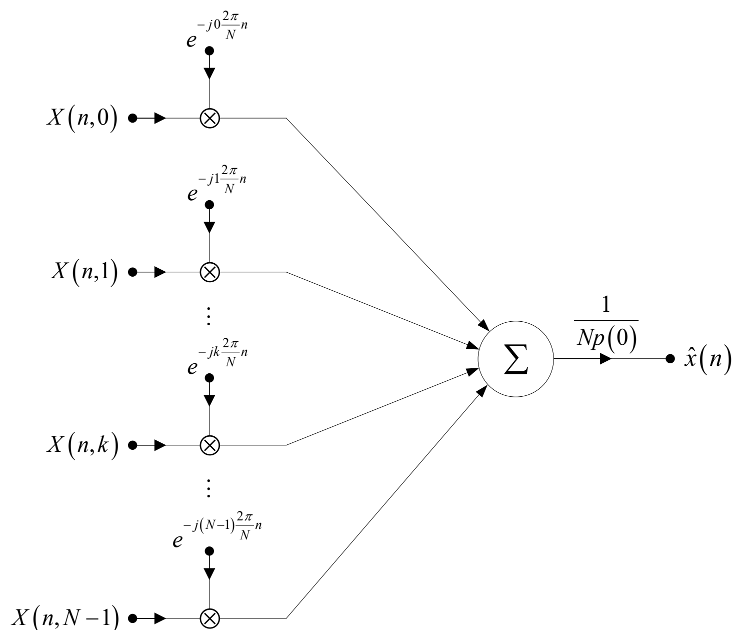
Slika 12.19 Primjer pododmjeravanja po frekvencijskoj osi kod neinvertibilne DTSTFT.

Razmotrimo sada koje uslove je neophodno ispuniti za idelanu rekonstrukciju signala ovim metodom. Pretpostavimo da se vrijednosti rekonstruisanog signala u svakom vremenskom trenutku dobijaju sumiranjem modulisanih frekvencijskih komponenti sa izlaza banke filtara za analizu signala sa propusnicima opsega, kao na Slici 12.20.

U cilju rekonstrukcije originalnog signala, tj. postizanja da je $\hat{x}(n)=x(n)$, ulazi u DFT banku filtara na Slici 12.20 su ponovo modulisani, čime se poništavaju demodulacije na izlazima filtara DFT banke filtara za analizu signala sa Slike 12.14. Signal na izlazu DFT banke filtara sa Slike 12.20 se može zapisati kao:

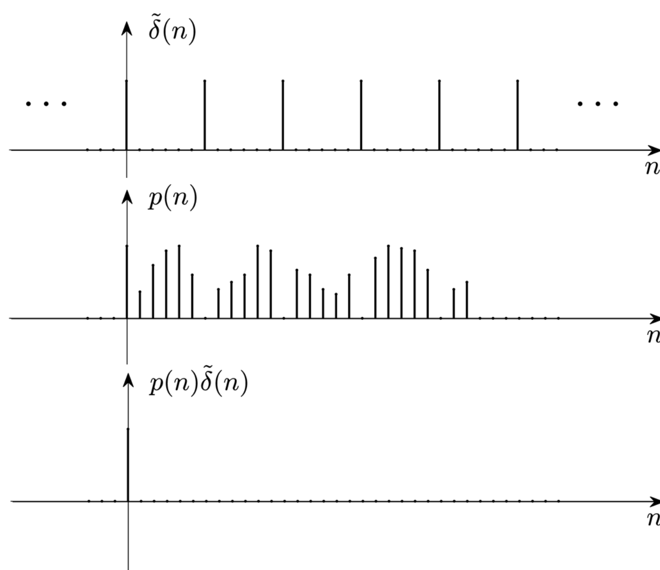
$$\hat{x}(n)=\frac{1}{Np(0)}\sum_{k=0}^{N-1}X(n,k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\ . \qquad (12.22)$$

Koristeći interpretaciju DSTFT (12.9) preko filtriranja modulisanih signala niskopropusnim filtrima, datu sa (12.12), na izlazu iz DFT banke filtara za sintezu signala dobijamo:



Slika 12.20 DFT banka za sintezu signala.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(n) &= \frac{1}{Np(0)} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] p(n-m) \right\} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \\
&= \frac{1}{Np(0)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left\{ p(n-m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)k} \right\} = \\
&= \frac{1}{p(0)} x(n) * \left\{ p(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right\} = \\
&= \frac{1}{p(0)} x(n) * \left\{ p(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) \right\}.
\end{aligned} \tag{12.23}$$



Slika 12.21 Izbor prozorke sekvence kod FBS metoda.

Iz (12.23) zaključujemo da će signal $\hat{x}(n)$ na izlazu DFT banke filtara za sintezu signala biti jednak originalnom signalu $x(n)$ ako je ispunjen uslov da je:

$$p(n)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n-rN)=p(0)\delta(n). \qquad (12.24)$$

Ukoliko je prozorska sekvenca $p(n)$ konačnog trajanja, tako da je $N \geq N_p$, uslov (12.24) je uvijek ispunjen, neovisno o obliku prozorske sekvence. Ovaj uslov osigurava da zbog pododmjeravanja u frekvencijskom domenu ne dođe do preklapanja u vremenskom domenu. Za $N_p > N$ navedeni uslov je moguće ostvariti i ako se odabere takva prozorska sekvenca kod koje je svaki *N*-ti element jednak nuli, kao na Slici 12.21. To znači da, sa stanovišta rekonstrukcije signala, čak nije neophodno ni da prozorska sekvenca bude konačnog trajanja.

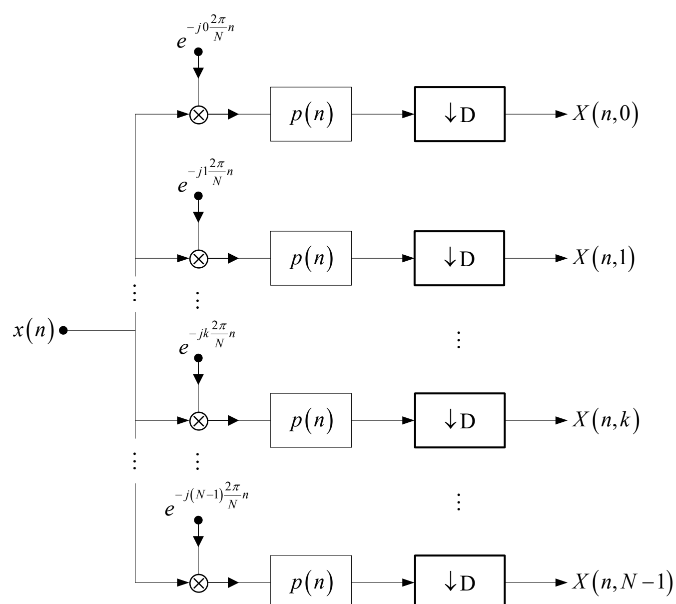
U frekvencijskom domenu se uslov (12.24) može predstaviti na sljedeći način:

$$\sum_{k=0}^{N-1} P\left(e^{j\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)}\right) = Np(0), \tag{12.25}$$

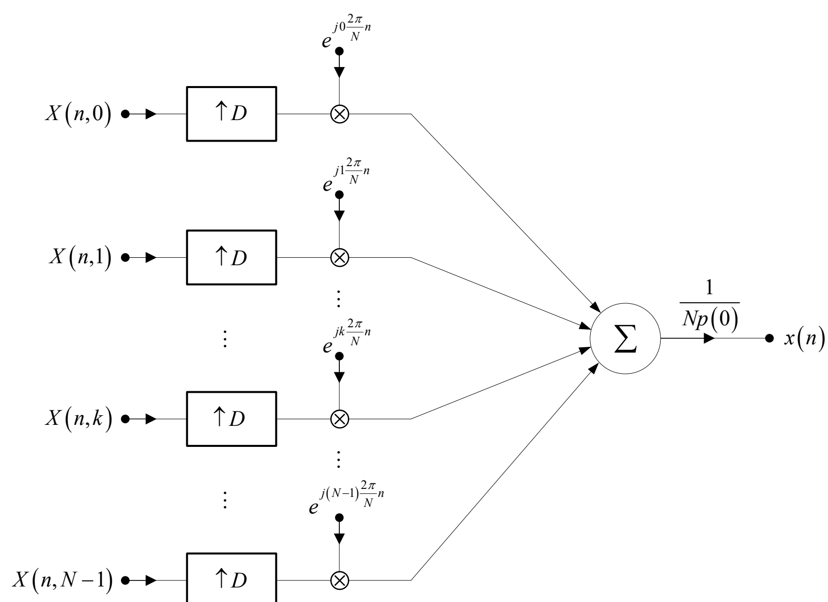
što znači da zbir frekvencijskih karakteristika filtara propusnika opsega, koji služe za analizu signala, treba da bude konstantan preko cijelog frekvencijskog opsega signala. Dakle, ako je zadovoljen uslov (12.24), odnosno, ekvivalentno, uslov (12.25), izraz za rekonstrukciju signala iz njegove DSTFT korištenjem FBS metoda je dat sa:

$$x(n) = \frac{1}{Np(0)} \sum_{k=0}^{N-1} X(n,k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} . \tag{12.26}$$

Ako su širine propusnih opsega svih filtara jednake i iznose B, tada su gornje granične frekvencije sekvenci na izlazima banke filtara $2\pi/B$ puta manje od gornje granične frekvencije originalnog signala $x(n)$, te ove sekvence mogu biti pododmjerene faktorom $D \leq 2\pi/B$, Slika 12.22. Prije rekonstrukcije signala iz pododmjerenih sekvenci, nephodno je uraditi njihovu interpolaciju, kao na Slici 12.23. Sa praktičnog stanovišta idealna rekonstrukcija izgleda neizvodiva, jer bi prilikom interpolacije trebalo koristiti idealne filtre. Na sreću, ovo vrijedi samo za pojedinačne kanale, a ne i za signal koji se dobije sumiranjem na izlazu banke filtara. Naime, pododmjereni signali sadrže dovoljno informacija za rekonstrukciju spektra originalnog signala, a ukoliko je zadovoljen uslov OLA metoda, onda je moguća i idealna rekonstrukcija signala iz njegovog spektra putem inverzne DSTFT.



Slika 12.22 Pododmjerena DFT banka filtara za analizu signala.

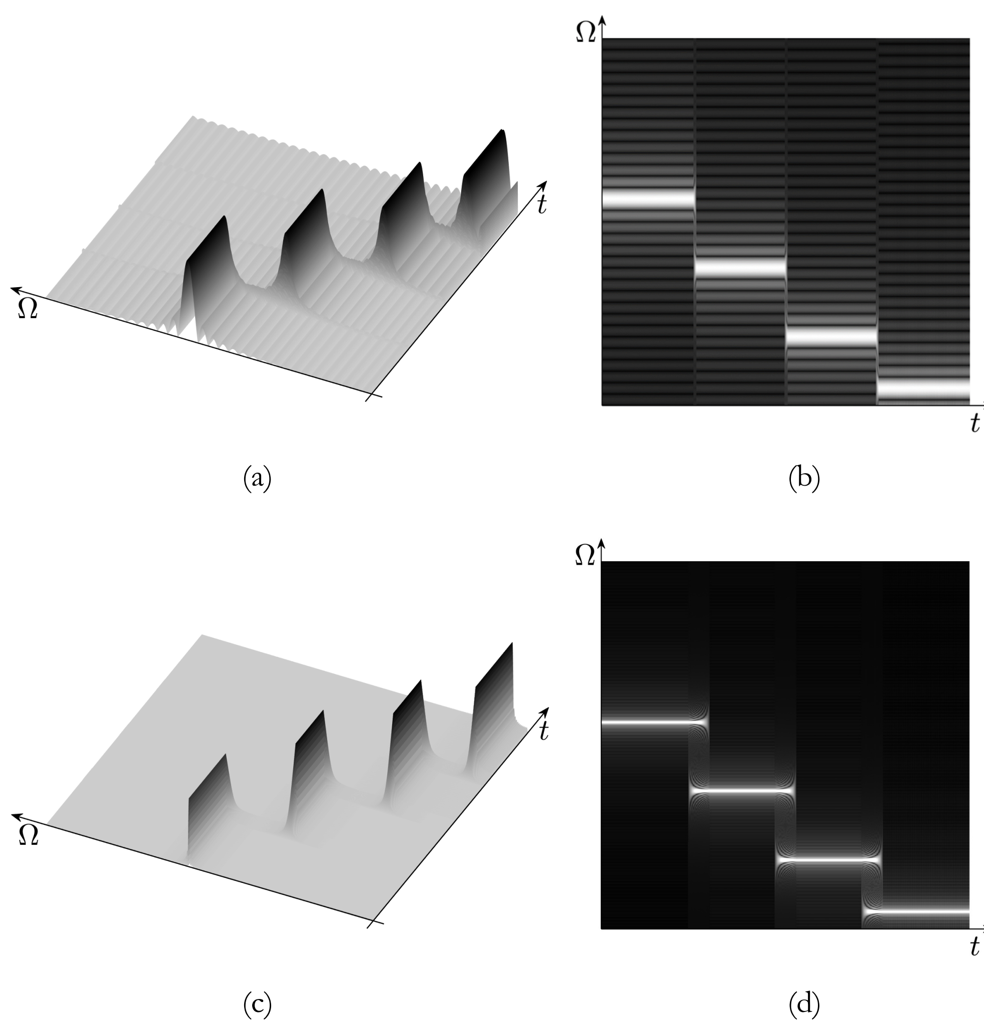


Slika 12.23 Rekonstrukcija signala iz pododmjerene banke filtara.

12.3 Rezolucija STFT u vremenu i frekvenciji

Budući da kratkotrajna Furijeova transformacija vrši analizu spektra signala u kratkim vremenskim intervalima, u kojima se pretpostavlja da je signal stacionaran, podložna je curenju spektra, koje zavisi od trajanja i oblika prozorske funkcije. Za dobru rezoluciju u frekvencijskom domenu trajanje prozorske funkcije treba da bude što veće. Međutim, širina prozorske funkcije ograničena je uvedenom pretpostavkom o stacionarnosti signala, tako da ne bi trebalo da bude veća od širine intervala u kom se smatra da je signal stacionaran. S druge strane, da bismo mogli detektovati brze promjene frekvencijskog sadržaja signala i što tačnije odrediti trenutke u kojima se one dešavaju, treba nam dobra rezolucija u vremenu, zbog čega bi širina prozorske funkcije trebala da bude što manja. Primijetimo da su zahtjevi za širinu prozorske funkcije sa stanovišta dobre rezolucije u vremenskom i frekvencijskom domenu oprečni.

Na Slici 12.24 je dat primjer STFT, koji ilustruje kako širina prozorske funkcije utiče na rezoluciju STFT u vremenskom i frekvencijskom domenu. Za STFT analizu je odabran signal sa Slike 12.3(a), sastavljen od četiri nepreklapajuće sinusoide različitih učestanosti. Sa slika 12.24(a) i 12.24(b) se jasno vidi da pri korištenju prozorskih funkcija male širine dolazi do značajnog preklapanja u spektru signala, te je teško precizno odrediti frekvencije komponenti sadržanih u signalu. Ako povećamo širinu prozorske funkcije, njen spektar će se suziti, pa će preklapanje u frekvencijskom domenu biti manje. Sada se frekvencije komponenti signala mogu preciznije očitati, što se jasno vidi na slikama 12.24(c) i 12.24(d). Međutim, na slikama 12.24(a) i 12.24(b) se mogu precizno detektovati trenuci u kojima je došlo do promjene frekvencijskog sadržaja signala, dok sa povećanjem širine prozorske funkcije to postaje sve teže. Zaključujemo da se sa povećanjem širine prozorske funkcije poboljšava rezolucija u frekvencijskom domenu, na uštrb rezolucije u vremenskom domenu, te je nemoguće istovremeno postići proizvoljno visoku rezoluciju i u vremenskom i u frekvencijskom domenu. Sličan problem vezan za rezoluciju se javlja i u drugim oblastima nauke. Po prvi put je opisan u kvantnoj mehanici 1927. godine, kada je njemački fizičar Verner Hajzenberg (Werner Heisenberg) utvrdio da nije moguće istovremeno i sa potpunom preciznošću odrediti dvije



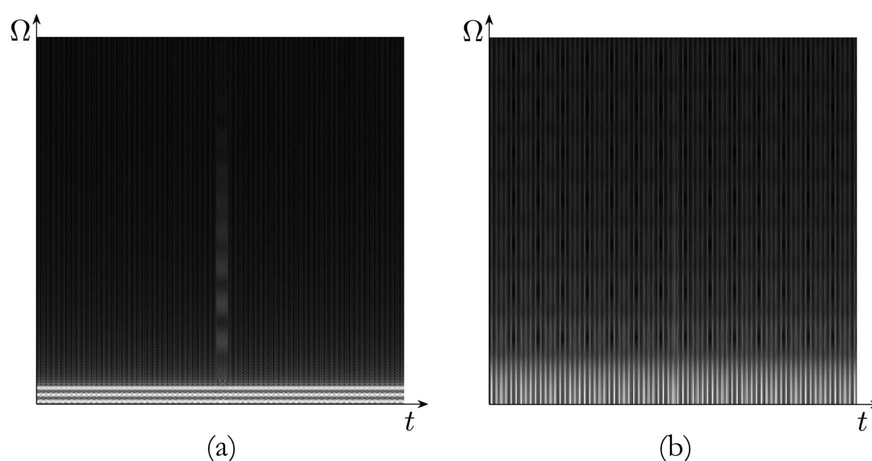
Slika 12.24 Spektrogrami signala sa Slike 12.3(a): (a) 3D i (b) 2D prikaz spektrograma dobijenih korištenjem uske prozorske funkcije; (c) 3D i (d) 2D prikaz spektrograma dobijenih korištenjem široke prozorske funkcije.

povezane fizičke veličine, kao što su pozicija i impuls čestice. Povećanje preciznosti pri određivanju pozicije smanjuje preciznost određivanja impulsa čestice, pa se od tada ovaj fenomen pojavljuje pod nazivom *Hajzenbergov princip neodređenosti*. Kad je riječ o principu neodređenosti vezanom za rezoluciju u vremenu i frekvenciji, vremensko trajanje Δ_t i spektralna širina Δ_f bilo kog signala su vezani relacijom:

$$\Delta_t \cdot \Delta_f \geq 1. \tag{12.27}$$

Lako se pokaže da (12.27) vrijedi za mnoge specijalne oblike prozorskih sekvenci, dok dokaz ove relacije u opštem slučaju, koji je dao Denis Gabor (Dennis Gabor), nije nimalo jednostavan i nećemo ga razmatrati. U često korištenom primjeru pravougaone prozorske sekvence širine Δ_t u vremenskom domenu skloni smo da spektralnu širinu definišemo kao polovinu širine glavnog luka sinc funkcije, $\Delta_f = 1/\Delta_t$, te je dokaz (12.27) u ovom slučaju očigledan.

Zbog svega navedenog vezanog za rezoluciju STFT u vremenskom i frekvencijskom domenu, vidimo da STFT nije pogodan metod za analizu signala kada želimo da precizno odredimo i frekvencije komponenti sadržanih u signalu i trenutke kada dolazi do kratkotrajnih brzih promjena signala, kao npr. kod signala sa Slike 12.4(a). Korištenjem relativno široke prozorske funkcije, kao na Slici 12.25(a), jasno razlučujemo tri prostoperiodične frekvencijske komponente sadržane u signalu, ali visokofrekvencijske komponente koje ukazuju na brze promjene nisu dobro lokalizovane u vremenu. Iako je za očekivati da bi uz korištenje jako uske prozorske funkcije iz spektrograma mogli precizno detektovati vremenske trenutke kada dolazi do naglih krakotrajnih promjena u signalu, to nije uvijek moguće. Posmatrajući spektrogram na Slici 12.25(b), koji se dobije analizom pomoću veoma uske prozorske funkcije, primijetno je da je kratkotrajna promjena značajno maskirana zbog velikog curenja spektra.

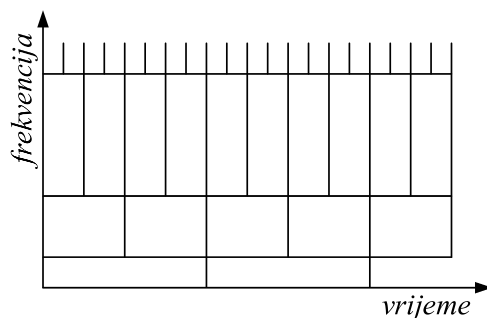


Slika 12.25 2D prikaz spektrograma signala sa Slike 12.4(a): (a) određen sa velikom i (b) malom širinom prozorske funkcije.

12.4 Kontinualna vejvlet transformacija

U prethodnim razmatranjima smo sagledali ograničenja STFT u pogledu istovremenog postizanja dobre rezolucije i u vremenskom i u frekvencijskom domenu. Pored toga, značajno je napomenuti da je rezolucija jednaka u cijeloj vremensko-frekvencijskoj ravni. Povećanjem rezolucije u frekvenciji smanjuje se rezolucija u vremenu i obrnuto, pa je pri upotrebi STFT potrebno tražiti kompromis za svaku pojedinačnu primjenu.

Signali koje susrećemo u prirodi vrlo često imaju osobinu da dugo traju ako su sporopromjenljivi, dok su brzopromjenljivi signali obično kratkog trajanja. Ograničavajući se na analizu takvih signala moguće je prevazići navedena ograničenja STFT u pogledu rezolucije. Ako analiziramo sporopromjenljive signale koji dugo traju najčešće nas ne zanima da precizno odredimo kad su počeli i završili, te nema potrebe za dobrom rezolucijom u vremenu. Kod takvih signala želimo da što preciznije odredimo koje frekvencijske komponente su sadržane u signalu, tj. tražimo dobru rezoluciju u frekvenciji. S druge strane, kod



Slika 12.26 Podjela vremensko-frekvencijske ravni sa promjenljivom rezolucijom.

brzopromjenljivih signala koji kratko traju važnije nam je da odredimo kad se desila promjena, nego da precizno razlučimo visokofrekvencijske komponente sadržane u ovoj kratkotrajnoj promjeni. Dakle, sa porastom frekvencije rezolucija u vremenu treba da raste, kako bismo bili u mogućnosti da uočimo kratkotrajne nagle promjene signala, pri čemu možemo dopustiti smanjenje rezolucije u frekvenciji. Uopšteno, dopuštamo da rezolucije u vremenu i frekvenciji variraju, tako da koristimo prozorske funkcije kratkog trajanja pri popunjavanju vremensko-frekvencijske ravni u oblasti visokih frekvencija, a prozorske funkcije dugog trajanja u oblasti niskih frekvencija. Kao posljedica toga, vremensko-frekvencijska ravan više nije podijeljena na jednake dijelove kao kod STFT. Na Slici 12.26 prikazan je izgled vremensko-frekvencijske ravni sa promjenljivom rezolucijom u vremenu i frekvenciji. Na ovaj način se prividno zaobilazi ograničenje dato principom neodređenosti i postiže visoka rezolucija u vremenu u oblasti visokih frekvencija i visoka rezolucija u frekvenciji u oblasti niskih frekvencija. Naglasimo još jednom da je ovakav pristup analizi signala dobar za signale koji sadrže visokofrekvencijske komponente kratkog trajanja i niskofrekvencijske komponente dugog trajanja.

Promjena rezolucije se najčešće radi po logaritamskoj skali, jer je logaritamska promjena rezolucije primjećena i u biološkim sistemima, npr. kod čula sluha i vida kod razvijenijih bioloških vrsta. Dobro je poznato da čovjek može bolje da razluči u frekvenciji bliske tonove niskih nego visokih frekvencija. Vjerovatno

zbog ove analogije sa pojavama u prirodi, analiza signala koju ćemo u nastavku opisati, a koja se zasniva na promjenljivoj vremenskoj i frekvencijskoj rezoluciji, u praksi daje veoma dobre rezultate.

Kontinualna transformacija u talasiće (eng. *Continuous Wavelet Transform* – CWT), koju često nazivamo i *kontinualna vejvlet transformacija*, ili kratko *vejvlet transformacija*, je metod analize signala koji koristi princip promjenljive rezolucije u vremensko-frekvencijskoj ravni. Kako bi se to postiglo, impulsni odziv svakog filtra iz banke filtara za analizu signala se dobija kao skalirana verzija impulsnog odziva $\psi^*(t)$ osnovnog filtra prototipa, te se CWT definiše sa:

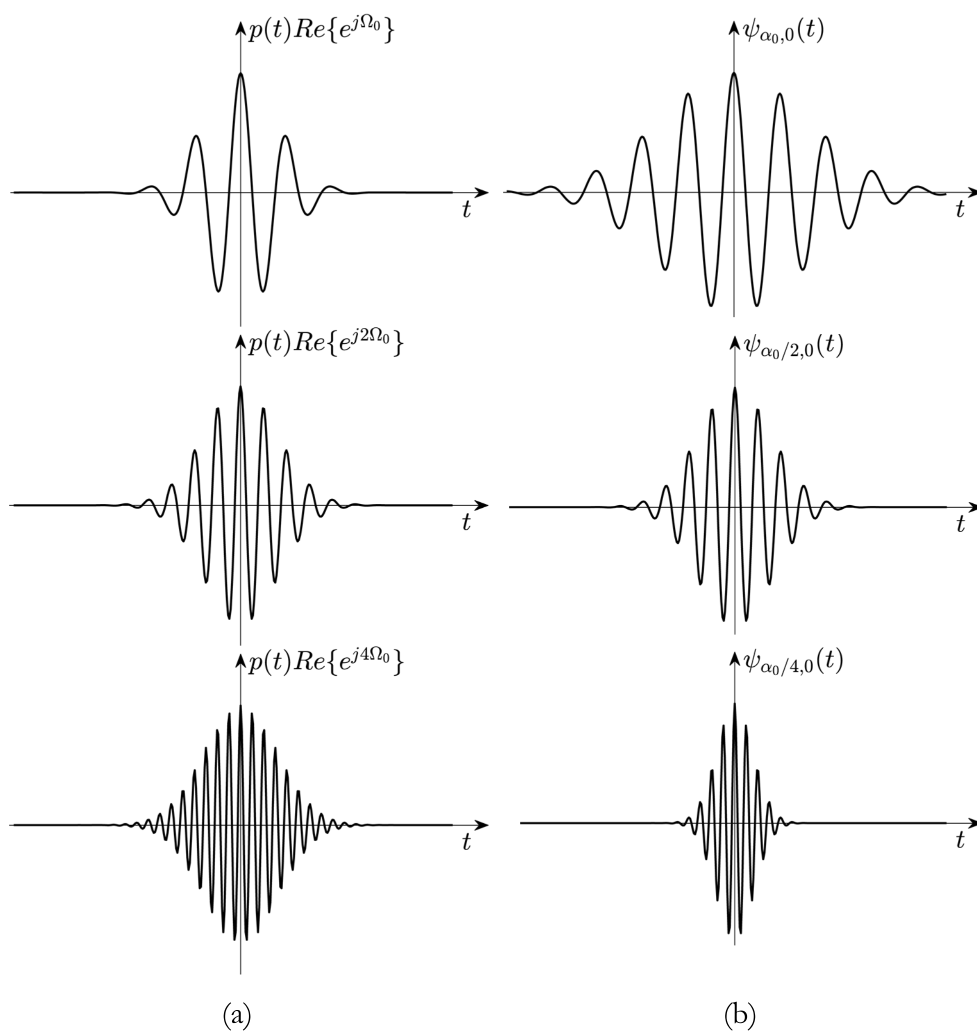
$$\mathrm{CWT}_x(\tau,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int x(t)\psi^*\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)dt\,. \tag{12.28}$$

Impulsni odziv $\psi^*(t)$ filtra prototipa se naziva *prototipni talasić*, ili *majka talasić*, a njegove skalirane i pomjerene verzije se označavaju sa:

$$\psi^*_{\alpha,\tau}(t)=\psi^*\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right). \tag{12.29}$$

Kao i kod STFT parametar τ označava pomak po vremenskoj osi, dok parametar α ukazuje na skaliranje talasića i naziva se *skala*. Bez detaljnog ulaženja u matematičku teoriju talasića, razmotrićemo osnovne osobine ove transformacije i mogućnosti njene primjene. Smatraćemo da su talasići realni i umjesto $\psi^*_{\alpha,\tau}(t)$ koristiti oznaku $\psi_{\alpha,\tau}(t)$.

Slično kao STFT, CWT možemo posmatrati na dva načina. Sa stanovišta banke filtara za analizu signala primjećujemo da se, za razliku od STFT, gdje se konvolucije rade sa impulsnim odzivima filtara propusnika opsega, oblika $p(t)e^{j\Omega t}$, fiksne širine, širine impulsnih odziva u obliku talasića u konvoluciji (12.28) mijenjaju sa promjenom parametra α. Na Slici 12.27 uporedno su prikazani primjeri impulsnih odziva STFT banke filtara i impulsnih odziva CWT banke filtara. Posmatrajući s lijeva na desno, kod impulsnih odziva STFT banke filtara na Slici 12.27(a) primjećujemo porast frekvencije, dok se na Slici 12.27(b), kod impulsnih odziva CWT banke filtara, smanjuje skala. Iako se u definiciji CWT ne pojavljuje frekvencija kao nezavisna promjenljiva, posmatrajući

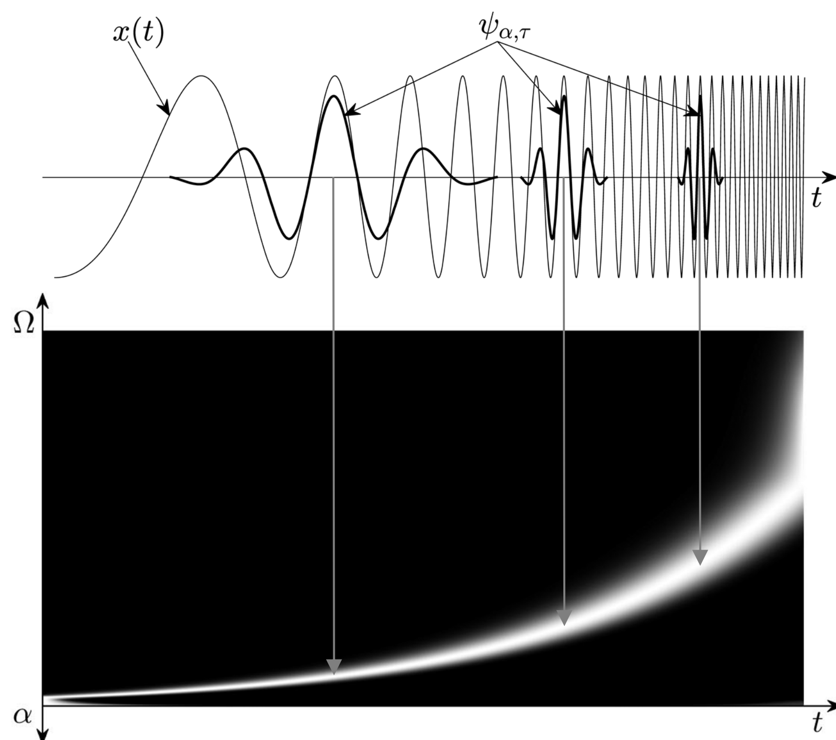


Slika 12.27 Primjeri impulsnih odziva: (a) STFT banke filtara i (b) CWT banke filtara.

skalirane impulsne odzive CWT banke filtara, primjećujemo da sa smanjenjem skale raste brzina oscilacija impulsnih odziva i obrnuto. Skala je kod CWT preuzela ulogu frekvencije i nalazi se sa frekvencijom u recipročnom odnosu.

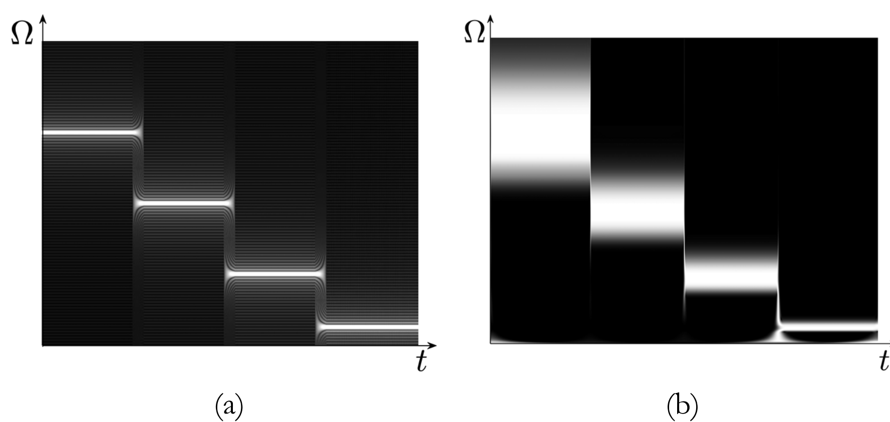
Kratkotrajnu Furijeovu transformaciju možemo na drugi način posmatrati kao razlaganje dijela signala, koji se vidi kroz klizeći prozor, na lokalne frekvencijske komponente. Dobijene vrijednosti Furijeove transformacije nose informaciju o mjeri doprinosa lokalnih frekvencijskih komponenti dijelu signala koji se vidi kroz prozor kad se on nađe na određenoj poziciji. Ukoliko je doprinos neke frekvencijske komponente veći, utoliko je veća i sličnost analiziranog signala sa tom frekvencijskom komponentom. Po analogiji, kod CWT se vrši pomjeranje talasića različitih skala duž vremenske ose. Za talasić $\psi_{\alpha,\tau}(t)$, odabrane skale α, za svaki pomak τ se, na osnovu (12.28), određuje korelacija (zbog parnosti talasića konvolucija je jednaka korelaciji) talasića sa analiziranim signalom $x(t)$. Postupak se ponavlja za talasiće svih skala. Ukoliko je sličnost talasića $\psi_{\alpha,\tau}(t)$ sa analiziranim signalom veća, utoliko su veće i vrijednosti CWT. U tom smislu, CWT se može interpretirati kao mjera doprinosa talasića $\psi_{\alpha,\tau}(t)$ analiziranom signalu $x(t)$.

Postupak određivanja CWT je prikazan na Slici 12.28, na primjeru čirp signala sa logaritamskom promjenom frekvencije. Dvostruka strelica, korištena za oznaku ordinate, ukazuje na recipročan odnos skale i frekvencije. Prevlačenjem talasića različitih skala preko signala, velike vrijednosti CWT se dobiju prilikom otkrivanja sličnosti signala sa datim oblicima talasića. Radi ilustracije postupka, preko analiziranog signala su docrtana tri talasića različitih skala. U ovom konkretnom primjeru, na početku signala postoji sličnost sa talasićima visokih skala, pa su vrijednosti CWT velike na niskim frekvencijama. Kako vrijeme protiče, signal postaje sličniji sa talasićima sve manjih i manjih skala, te vrijednosti CWT rastu prema višim frekvencijama, odnosno nižim skalama. Curenje spektra postaje izraženije sa povećanjem učestanosti, zbog sve kraćeg trajanja talasića koji se koriste za analizu signala.

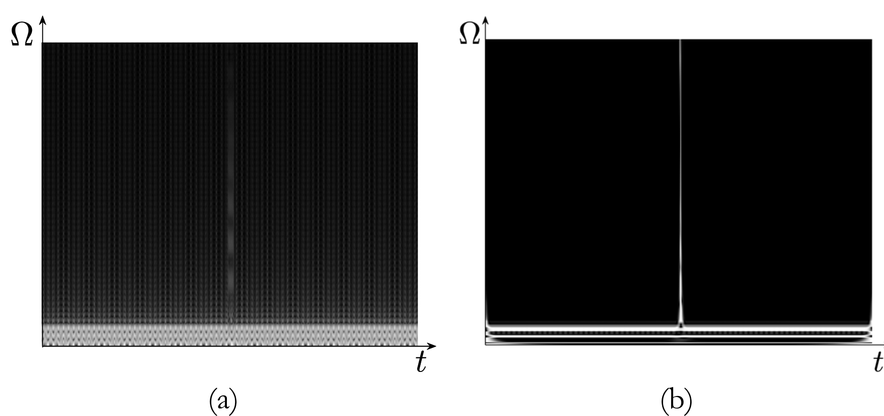


Slika 12.28 Određivanje CWT putem mjere sličnosti sa talasićima.

Za razliku od STFT koja se predstavlja spektrogramom u ravni vrijeme-frekvencija, CWT se grafički predstavlja u ravni vrijeme-skala i takvu predstavu vejvlet transformacije nazivamo *skalogram*. Zbog recipročnog odnosa skale i frekvencije, možemo umjesto skale koristi frekvencijsku osu za prikaz skalograma. Na Slici 12.29 je dat uporedni prikaz STFT i CWT signala sa Slike 12.3(a). Kod STFT i vremenska i frekvencijska rezolucija su jednake u cijeloj ravni vrijeme-frekvencija. Kod CWT, zbog promjenljive širine talasića, u skalogramu imamo dobru rezoluciju u frekvencijskom, a lošu u vremenskom domenu u oblasti niskih učestanosti, dok u oblasti visokih učestanosti imamo dobru rezoluciju u vremenskom, a lošu u frekvencijskom domenu. To nam omogućava da kod klase signala sa pretpostavljenim osobinama, koji sadrže sporopromjenljive komponente dugog, a brzopromjenljive komponente kratkog

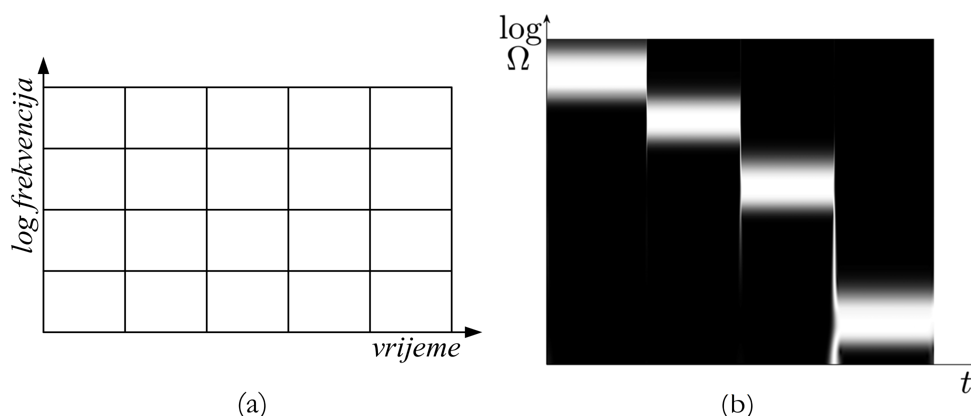


Slika 12.29 Uporedni prikaz STFT i CWT: (a) spektrogram i (b) skalogram signala sa Slike 12.3(a).



Slika 12.30 Uporedni prikaz STFT i CWT: (a) spektrogram i (b) skalogram signala sa Slike 12.4(a).

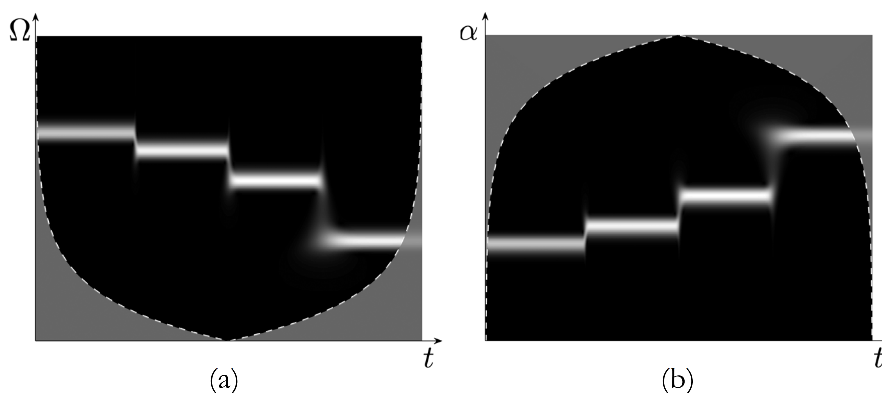
trajanja, kao što je npr. signal sa Slike 12.4(a), koristeći CWT postignemo veoma dobru lokalizaciju trenutka pojave visokofrekvencijskih komponenti i precizno određivanje učestanosti niskofrekvencijskih komponenti, što nije moguće ako se za analizu koristi STFT, kao što se vidi na uporednom prikazu spektrograma i skalograma ovog signala na Slici 12.30.



Slika 12.31 CWT sa logartiamskom skalom frekvencija: (a) podjela vremensko-frekvencijske ravni i (b) skalogram signala sa Slike 12.3(a).

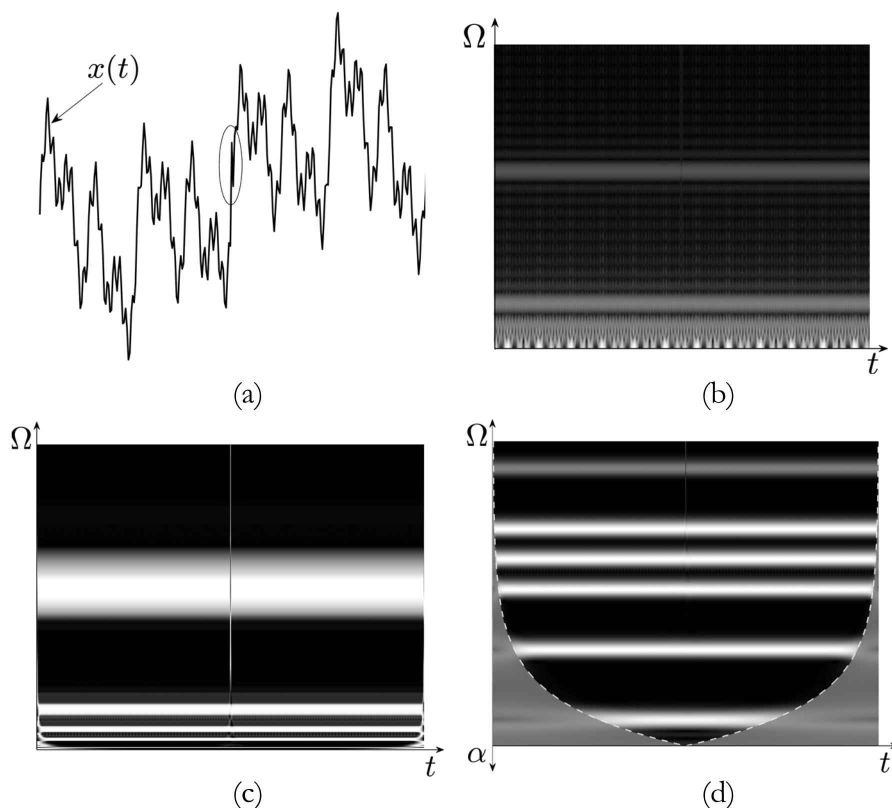
Lošija rezolucija vejvlet transformacije u frekvencijskom domenu u području visokih učestanosti u odnosu na STFT se može tolerisati, imajući u vidu već pomenutu logaritamsku prirodu selektivnosti ljudskih čula. Zbog toga se često za prikaz skalograma koristi logaritamska osa frekvencija. Podjela vremensko-frekvencijske ravni skalograma sa logaritamskom osom frekvencija prikazana je na Slici 12.31(a), dok je skalogram signala sa Slike 12.3 (a), koristeći logaritamsku osu frekvencija, prikazan na Slici 12.31(b). Posmatrajući skalogram sa logaritamskom osom frekvencija, vizuelno se stiče utisak da je rezolucija u frekvencijskom domenu jednaka u cijeloj vremensko-frekvencijskoj ravni, slično kao kad posmatramo selektivnost ljudskih čula.

Kada se, sa ciljem što bolje rezolucije u području niskih frekvencija, skalogram računa i prikazuje počevši od talasića veoma dugog trajanja, maksimalno jednakog trajanju signala, dijelovi vremensko-frekvencijske ravni, u kojima se rubni efekti značajni zbog izlaska talasića van signala, prikazuju se kao zamućena siva područja, kao na Slici 12.32. Radi jednostavnosti prikaza, na samoj slici se najčešće ne naglašava da li se radi o linearnoj ili logaritamskoj skali, već je to jasno iz konteksta. Kad se koristi logaritamska razmjera često se koristi dvostruka strelica za oznaku ose, koja ukazuje na porast frekvencija u jednom, a skala u drugom smjeru.



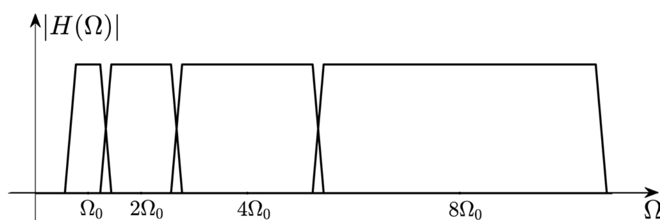
Slika 12.32 Prikaz skalograma bez dijelova koji sadrže rubne efekte: (a) u ravni vrijeme-frekvencija i (b) u ravni vrijeme-skala.

Prednosti vejvlet transformacije posebno dolaze do izražaja kada je potrebno pronaći artefakte malih amplituda, kao u primjeru sa Slike 12.33(a). Slični artefakti se javljaju npr. u signalima snimljenim elektroencefalogramom. Mogu biti posljedica moždanih aktivnosti i ukazivati npr. na epileptičke napade, ali mogu biti i vještački generisani usljed smetnji prilikom mjerenja, te je njihova detekcija od velike važnosti. Analiza signala u vremenskom domenu, bilo da se radi o vizuelnom pregledu signala ili nekoj od metoda automatske analize, ne može da se izbori sa ovakvim problemima. Kada se radi o artefaktu visoke amplitude, kao što smo imali slučaj u signalu sa Slike 12.4(a), STFT je donekle upotrebljiva, ali u slučaju artefakata malih amplituda, kao u ovom primjeru, skoro je nemoguće podesiti širinu prozorske funkcije tako da u spektrogramu, Slika 12.33(b), možemo očitati osnovne frekvencijske komponente signala i detektovati artefakt. Nasuprot tome, u skalogramu, datom na slikama 12.33(c) i 12.33(d), jasno uočavamo šest značajnih frekvencijskih komponenti i preciznu lokaciju artefakta.

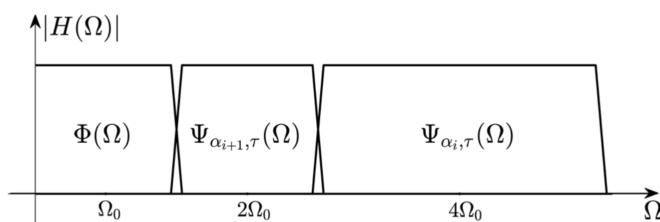


Slika 12.33 Primjer skalograma signala sa artefaktom male amplitude: (a) signal sa (zaokruženim) artefaktom male amplitude, (b) njegov spektrogram i (c) skalogram u ravni vrijeme-frekvencija, te (d) skalogram u ravni vrijeme-frekvencija/skala, sa logaritamskom podjelom na osi frekvencija/skala.

Ako je skaliranje talasića logaritamsko, tako da je svaka sljedeća vrijednost skale dva puta veća od prethodne, propusni opseg svakog sljedećeg filtra je dvostruko uži, kao na Slici 12.34. Pri tome se zadržava konstantan relativni propusni opseg, definisan kao količnik širine propusnog opsega i centralne frekvencije filtara propusnika opsega. Posmatrajući interpretaciju CWT preko banke filtara, zaključujemo da koeficijenti CWT predstavljaju dio signala filtriran



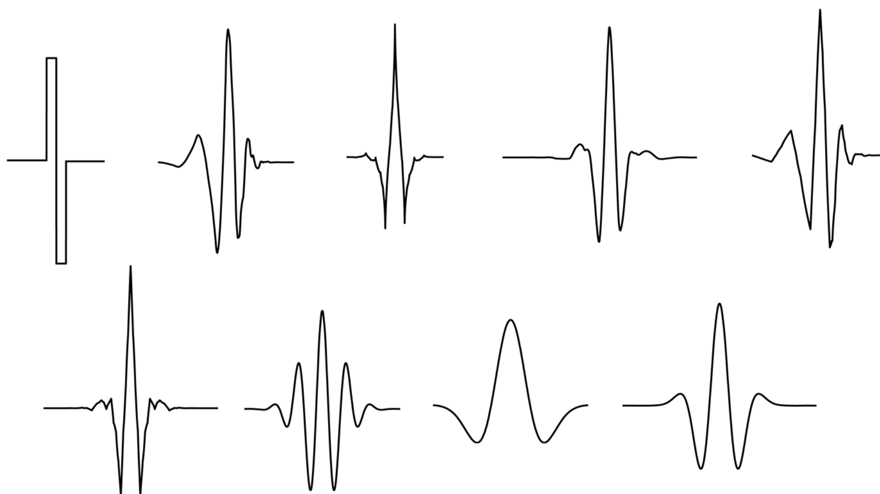
Slika 12.34 Raspored propusnih opsega CWT banke filtara.



Slika 12.35 Raspored propusnih opsega CWT banke filtara nakon uključivanja niskopropusnog filtra.

kroz odgovarajuće filtre propusnike opsega, čije su amplitudne karakteristike prikazane na Slici 12.34.

Povećavajući skalu, filtar propušta sve niže i niže frekvencije, pri čemu se širine propusnih opsega sve više smanjuju. Teorijski gledano, trebalo bi nam beskonačno mnogo filtara propusnika opsega, odnosno beskonačno mnogo talasića sa različitim skalama, da obuhvatimo sve frekvencijske komponente do učestanosti jednake nuli. Umjesto toga, proces povećanja skale se završava nakon nekoliko koraka, što ovisi o samoj aplikaciji, a preostali dio spektra signala se dobije filtriranjem kroz niskopropusni filtar, kao na Slici 12.35, čiji impulsni odziv je označen sa $\varphi(t)$ i nazvan *skalirajuća funkcija*, dok je njegova Furijeova transformacija označena sa $\Phi(\Omega)$.



Slika 12.36 Primjeri talasića iz najčešće korištenih klasa, s lijeva na desno, odozgo prema dole: Harovi (Haar), Dobjićevi (Daubechies), Kofletovi (Coiflet), simlet (Symlets), Fejer-Korovkinovi (Fejér-Korovkin), biortogonalni (Biorthogonal), Morletovi (Morlet), meksički šešir ili Rikerovi (Mexican hat, Ricker) i Gausovi (Gaussian).

Oblici talasića mogu biti različiti, a primjeri talasića iz najčešće korištenih familija su prikazani na Slici 12.36. Izbor oblika talasića uveliko zavisi od same aplikacije i prirode signala. Tako, na primjer, Harovi talasići daju dobre rezultate u analizi signala koji su konstantni po segmentima.

Za postojanje inverzne CWT:

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \iint_{\tau,\alpha} \mathrm{CWT}(\tau,\alpha) \frac{\psi_{\alpha,\tau}(t)}{\alpha^2} d\alpha d\tau \,, \tag{12.30}$$

potrebno je ispuniti *uslov prihvatljivosti prototipnog talasića*, koji je dala Dobji 1992. godine, a koji navodimo bez dokaza:

$$c_{\psi}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\Psi(\Omega)\right|^{2}}{|\Omega|}d\Omega<\infty, \tag{12.31}$$

gdje je $\Psi(\Omega)$ Furijeova transformacija prototipnog talasića $\psi(t)$. Pokazuje se da prototipni talasići koji predstavljaju filtre propusnike opsega sa konačnom energijom ispunjavaju ovaj uslov prihvatljivosti. Iako matematički pristup teoriji talasića prevazilazi okvire ovog izlaganja, značajno je pomenuti da postoji i opštija formula za rekonstrukciju signala:

$$x(t)=\frac{1}{c_{\psi\tilde{\psi}}}\iint_{\tau,\alpha}\mathrm{CWT}(\tau,\alpha)\frac{\tilde{\psi}_{\alpha,\tau}(t)}{\alpha^{2}}d\alpha d\tau, \tag{12.32}$$

gdje je rekonstrukcijski talasić $\tilde{\psi}_{\alpha,\tau}(t)$, koji se koristi prilikom sinteze signala, različit od talasića $\psi_{\alpha,\tau}(t)$, koji se koristi prilikom analize signala. Pokazuje se da jedan od ova dva talasića ne mora zadovoljavati uslov prihvatljivosti da bi rekonstrukcija bila moguća, ali treba da vrijedi da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\Psi(\Omega)\right|\cdot\left|\tilde{\Psi}(\Omega)\right|}{|\Omega|}d\Omega<\infty, \tag{12.33}$$

$$c_{\psi\tilde{\psi}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi^{*}(\Omega)\cdot\tilde{\Psi}(\Omega)}{|\Omega|}d\Omega\neq 0. \tag{12.34}$$

Iz dosadašnjeg izlaganja smo vidjeli da je moguće, koristeći CWT, signal predstaviti preko skaliranih i pomjerenih verzija prototipnog talasića. Baze talasića se ponašaju slično kao baze ortogonalnih funkcija. Sinteza signala se dobije kad se sumiraju sve ortogonalne projekcije signala na talasiće. Čak i kad talasići ne čine ortogonalnu bazu i CWT sadrži velik stepen redundantnosti, sinteza je moguća ako je ispunjen uslov prihvatljivosti prototipnog talasića. Iako ortogonalnost nije neophodan uslov za izbor talasića, neki od njih, kao npr. Haar-ovi talasići, jesu ortogonalni.

12.5 Diskretizacija ravni vrijeme-skala

Vejvlet transformacija je projektovana sa ciljem postizanja dobre rezolucije u frekvenciji za sporopromjenljive signale i dobre rezolucije u vremenu za brzopromjenljive signale. Sa povećanjem skale talasići postaju širi, tako da se povećava rezolucija u frekvenciji, a smanjuje rezolucija u vremenu. Po principu neodređenosti znamo da ne možemo egzaktno odrediti koje frekvencijske komponente su sadržane u signalu u određenom vremenskom trenutku, već jedino možemo zaključiti koji opseg frekvencijskih komponenti signal sadrži u određenom vremenskom intervalu. Imajući to u vidu, diskretizacija ravni vrijeme-skala se ne vrši linearno, već u skladu sa njenom podjelom prikazanom na Slici 12.37. Zbog sve lošije rezolucije u frekvenciji kako se ona smanjuje, odnosno kako se skala povećava, vrši se logaritamska podjela skale:

$$\alpha = \alpha_0^k \ , \tag{12.35}$$

gdje je α_0 osnovni korak odmjeravanja po skali. Prilikom ove diskretizacije skale podešava se i diskretizacija po vremenskoj osi, tako da se ispoštuje Nikvistov kriterijum. To znači da se, pri svakom povećanju skale, odnosno smanjenju frekvencije, α_0 puta, toliko puta može smanjiti i učestanost odmjeravanja, te je korak diskretizacije u vremenskom domenu dat sa:

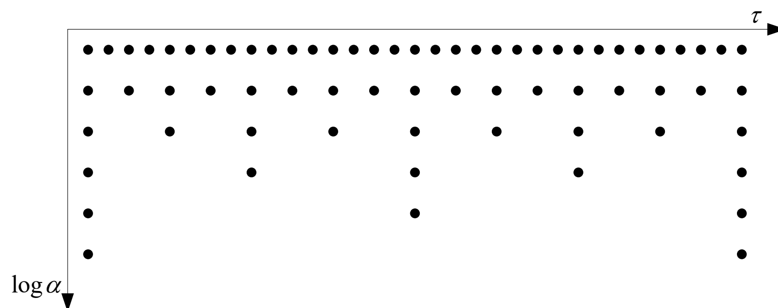
$$\tau = l\alpha_0^k \tau_0 , \tag{12.36}$$

gdje je τ_0 osnovni korak odmjeravanja u vremenskom domenu. Najčešće se koristi logaritamska skala po bazi 2, tako da se odmjeravanje u ravni vrijeme-skala radi na osnovu tzv. dijadične rešetke ($\alpha_0 = 2$, $\tau_0 = 1$), prikazane na Slici 12.37.

Odmjeravanjem se dobiju *diskretni talasići* :

$$\psi_{k,l}(t) = \alpha_0^{-k/2} h\left(\alpha_0^{-k} t - l\tau_0\right). \tag{12.37}$$

Diskretni talasići $\psi_{k,l}(t)$ nisu diskretni, već kontinualni signali, jer su funkcije kontinualne vremenske promjenljive *t*, ali nisu kontinualno skalabilni i translatorni, već se mogu skalirati i translirati samo za diskretne vrijednosti *k* i *l*. Analiza kontinualnih signala koja koristi diskretne talasiće:



Slika 12.37 Diskretizacija ravni vrijeme-skala u vidu dijadične rešetke.

$$c_{k,l} = \mathrm{DWT}_x\left(k,l\right) = \int x(t)\psi^*_{k,l}(t)dt\ , \tag{12.38}$$

naziva se *transformacija u diskretne talasiće*, *red diskretnih talasića* ili *vejvlet red* (eng. *Wavelet Series* – WS). U literaturi se ponekad transformacija koja koristi diskretne talasiće označava kao *diskretna transformacija u talasiće* ili *diskretna vejvlet transformacija* (eng. *Discrete Wavelet Transform* - DWT), ali ćemo mi taj naziv rezervisati za transformaciju u diskretne talasiće koja se koristi za analizu vremenski diskretnih signala, pri čemu se propusni opsezi filtara u banci filtara nalaze u oktavi (što znači da su frekvencijski opsezi filtara dva puta uži pri svakom povećanju skale).

Sve dok se diskretni talasići koriste samo za analizu signala, bez potrebe za njegovom rekonstrukcijom, korak diskretizacije može biti proizvoljan. Ipak, izbor koraka diskretizacije utiče na rezultate analize, pa je preporuka da se poštuje Nikvistov kriterijum. Nakon diskretizacije u ravni vrijeme-skala, postavlja se pitanje pod kojim uslovima je moguće rekonstruisati signal u vremenu, ako prototipni talasić ispunjava uslov prihvatljivosti. Inverzna transformacija u obliku:

$$x\left(t\right) = \sum_k \sum_l c_{k,l}\psi_{k,l}\left(t\right), \tag{12.39}$$

rekonstruiše originalni signal ako talasići čine ortonormalnu bazu. U literaturi je pokazano da je rekonstrukcija moguća i pod nekim manje strožim uslovima čije razmatranje prevazilazi okvire ovog izlaganja. Napomenućemo samo da postoje

redundantne transformacije, kod kojih skup talasića za rekonstrukciju signala ne mora biti identičan skupu talasića za direktno računanje transformacije. Ovo je važno za praktične primjene, jer se na taj način značajno proširuje izbor prototipnih talasića.

12.6 Diskretna vejvlet transformacija i višerezoluciona analiza

Transformacija u diskretne talasiće ima visok nivo redundantnosti, što značajno opterećuje računarske resurse. Zbog toga se uvodi *diskretna transformacija u talasiće* ili *diskretna vejvlet transformacija* (eng. *Discrete Wavelet Transform* - DWT), koja smanjuje nivo redundantnosti, zadržavajući dovoljno informacija kako za analizu, tako i za sintezu signala. Začeci DWT se protežu unazad do 1976. godine, kada su Krojzer (Croiser), Esteban (Esteban) i Galant (Galand) iskoristili diskretne talasiće za analizu diskretnih signala. Iste godine, Krošijer (Crochiere), Veber (Weber) i Flanagan (Flanagan) su veoma sličan pristup koristili za kodovanje govora i nazvali ga *podopsežno kodovanje*. Godine 1983 Burt (Burt) je definisao *piramidalno kodovanj*e, uvodeći osnovnu ideju *višerezolucione analize (eng. Multiresolution Analysis* - MRA*).*

Vejvlet transformacija u osnovi ima ideju posmatranja signala na različitim skalama i sa različitim rezolucijama. Jednostavnom smjenom pod integralom, izraz (12.28) za CWT se može svesti na sljedeći oblik:

$$\mathrm{CWT}_x(\tau,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)dt=\sqrt{\alpha}\int x(\alpha t)\psi\left(t-\frac{\tau}{\alpha}\right)dt\,. \qquad (12.40)$$

Vratimo se na trenutak na interpretaciju definicionog izraza (12.28) za CWT. Sa porastom skale α talasići se šire u vremenu i pri pomjeranju preko signala koji se analizira zahvataju sve duže segmente. Suprotno tome, posmatrajući alternativni izraz za CWT dat sa (12.40), zaključujemo da sa porastom skale α širina talasića ostaje konstantna, ali se signal sažima. Pri odabranoj vrijednosti za

skalu α, neovisno da li koristimo (12.28) ili (12.40), analiziramo segmente jednake dužine. Na koji god od ova dva načina da posmatramo CWT, zaključujemo da se sa porastom skale analizira sve veći dio signala. Slično, ako se skala smanjuje, u analizi učestvuje manji isječak signala.

Ako posmatramo talasiće konstantne širine, kao u (12.40), na visokim skalama signal je sabijen, tako da unutar datog prozora staje veliki isječak signala. Tada se radi se o globalnom pogledu na signal, pa posmatrano u vremenskom domenu ne možemo dobro uočiti detalje. Dakle, na visokim skalama je rezolucija u vremenu loša. Suprotno, na niskim skalama se kroz dati prozor vidi mali isječak signala, ali sa visokom rezolucijom u vremenu. Vidimo da skala kod vejvlet transformacije ima slično značenje kao skala na mapama: visoka skala odgovara globalnom pogledu, dok niska skala odgovara detaljnom pogledu na neko geografsko područje.

Ovakav način razmišljanja vodi nas ka ideji kako vejvlet transformaciju možemo koristiti za kompresiju signala. Rekonstrukcijom signala uz korištenje samo koeficijenata vejvlet transformacije na visokim skalama dobijamo globalni pogled na signal. Dodavanjem informacija sa nižih skala uključujemo u signal sve više detalja, te rekonstruisani signal postaje sve sličniji originalnom signalu.

Glava 13

DIGITALNI FILTRI

Filtriranje signala, u najširem smislu, se odnosi na proces kojim se umanjuju ili naglašavaju određeni aspekti signala, poput uklanjanja šuma, naglašavanja visokofrekvencijskih komponenata ili izdvajanja specifičnih frekvencijskih opsega. Sistem čija je funkcija filtriranje signala nazivamo *filtar*. Signali koje filtriramo mogu biti analogni ili digitalni, te se, shodno tome, filtri dijele na analogne i digitalne filtre. U ovom poglavlju ćemo se zadržati na razmatranju digitalnih filtara. *Digitalni filtar* možemo definisati kao bilo koji sistem čija funkcionalnost omogućava modifikaciju određenih aspekata signala, a koji se, u vidu algoritma, može implementirati digitalnim tehnologijama. Filtriranje možemo posmatrati kao uobličavanje signala u vremenskom domenu ili, češće, kao uobličavanje spektra signala. U ovom poglavlju ćemo se prvo pozabaviti osobinama digitalnih filtara u frekvencijskom domenu, a zatim ćemo dati pregled najčešće korištenih filtara za uobličavanje signala u vremenskom domenu. Digitalni filtri se najčešće realizuju kao LTI sistemi, te ćemo njima posvetiti najveći dio razmatranja u ovom poglavlju, ali ćemo se osvrnuti i na nelinearne filtre. U samom izlaganju ćemo, osim ako drugačije ne naglasimo, podrazumijevati da je digitalni filtar LTI sistem.

Ako filtriranje signala posmatramo sa stanovišta njegovog frekvencijskog sadržaja, onda se ono najčešće odnosi na proces kojim neke spektralne komponente signala pojačavamo, propuštamo bez slabljenja ili sa malim dozvoljenim slabljenjem, dok druge spektralne komponente signala slabimo ili u potpunosti uklanjamo. To se izvodi množenjem spektra signala sa frekvencijskom karakteristikom filtra, koja ima takav oblik da, prilikom množenja, jako potisne neželjene frekvencijske komponente, dok bi željeni dio signala trebalo da ostane nepromijenjen. U idealnom slučaju, vrijednost amplitudne karakteristike filtra bi trebalo da bude jednaka nuli u oblasti neželjenih frekvencijskih komponenti, dok bi u oblastima željenih frekvencijskih komponenti amplitudna karakteristika trebalo da bude jednaka jedinici, a fazna karakteristika linearna.

Opseg frekvencija iz kog se komponente signala propuštaju kroz filtar sa slabljenjem koje nije veće od maksimalno dozvoljenog naziva se *propusni opseg* filtra, dok se opseg frekvencija iz kog se komponente signala slabe više od minimalno propisanog slabljenja naziva *nepropusni opseg* filtra. *Prelazni opseg* je onaj opseg frekvencija iz kog se komponente signala slabe više od maksimalno dozvoljenog slabljenja u propusnom opsegu, a manje od minimalno propisanog slabljenja u nepropusnom opsegu.

Saglasno opsegu frekvencija iz kog propuštaju spektralne komponente, frekvencijski selektivni filtri se dijele na:

- *niskopropusne* (NP) filtre,
- *visokopropusne* (VP) filtre,
- filtre *propusnike opsega* (PO),
- filtre *nepropusnike opsega* (NO),
- *svepropusne* (SP) filtre ili *ekvalizatore kašnjenja*.

Digitalni filtri obuhvataju mnogo širu klasu diskretnih sistema od navedenih frekvencijski selektivnih filtara. U ovom poglavlju ćemo, pored pregleda najvažnijih osobina frekvencijski selektivnih filtara, predstaviti i često korištene filtre za uklanjanje šuma u vremenskom domenu. To su filtri sa pomičnim usrednjavanjem i medijan filtar, koji pripada klasi nelinearnih filtara. Za filtriranje skokovitih promjena u signalu koristi se diskretni diferencijator, koji

takođe pripada klasi nelinearnih filtara. Predstavićemo i Hilbertov transformator, koji se široko primjenjuje u telekomunikacionim sistemima, a na kraju ćemo se pozabaviti homomorfnim procesiranjem, koje omogućava razdvajanje nelinearno kombinovanih signala.

13.1 Frekvencijske karakteristike digitalnih filtara

Digitalni LTI filtri imaju sve osobine diskretnih LTI sistema, uz dodatno ograničenje da se pri implementaciji vrijednosti koeficijenata funkcije prenosa i vrijednosti signala zapisuju sa konačnom preciznošću. U ovom poglavlju ćemo detaljno analizirati amplitudne i fazne karakteristike digitalnih filtara.

13.1.1 Funkcija prenosa digitalnih filtara

Način kako digitalni filtar mijenja ulazni signal određen je funkcijom prenosa:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} , \tag{13.1}$$

gdje je $h(n)$ impulsni odziv filtra. Funkcija prenosa digitalnog filtra jednaka je *z*-transformaciji njegovog impulsnog odziva. Ako na ulaz digitalnog filtra dovedemo kompleksnu eksponencijalnu sekvencu $x(n) = z^n,\ z \in C$, signal na izlazu filtra će biti jednak $y(n) = H(z) z^n$. Poznavajući pravilo konvolucije u vremenskom domenu, $y(n) = h(n) * x(n) \leftrightarrow Y(z) = H(z) X(z)$, koje se koristi pri radu sa *z*-transformacijom, funkcija prenosa digitalnog filtra se može izraziti i kao količnik *z*-transformacije odziva i *z*-transformacije eksitacije, $H(z) = Y(z)/X(z)$. Funkcija prenosa digitalnog filtra je racionalna funkcija. Nule i polove funkcije prenosa koji se ne nalaze u beskonačnosti označavamo sa z_k i p_k, respektivno. Funkcija prenosa digitalnog filtra može da se zapiše u

jednom od sljedećih oblika, kao količnik dva polinoma, po z^{-1} ili po z, u razvijenom ili faktorizovanom obliku:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=z^{N-M}\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{M-k}}{z^N+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{N-k}}=$$
$$=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k z^{-1}\right)}=b_0 z^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(z-z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(z-p_k\right)}. \tag{13.2}$$

Kod digitalnih filtara opisanih rekurzivnom jednačinom diferencija $y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k),\ a_N=1$, sa konstantnim koeficijentima, impulsni odziv je u opštem slučaju beskonačnog trajanja. Ako je digitalni filtar opisan nerekurzivnom jednačinom diferencija $y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$, onda je njegov impulsni odziv konačnog trajanja. Funkcija prenosa:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}=z^{-M}\sum_{k=0}^{M}b_k z^{M-k}\ , \tag{13.3}$$

ima *M* konačnih nula i pol reda *M* u nuli. Digitalni filtar sa konačnim trajanjem impulsnog odziva nazivamo *FIR* (eng. *Finite Impulse Response*) *filtar*, a ako je impulsni odziv beskonačnog trajanja, onda kažemo da se radi o *IIR* (eng. *Infinite Impulse Response*) *filtru*. Posebnu klasu IIR filtara čine filtri koji imaju samo polove, bez konačnih nula transmisije. Kod tih filtara su svi koeficijenti b_k za $k\neq 0$ jednaki nuli, pa njihova funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=z^N\frac{b_0}{z^N+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{N-k}}. \tag{13.4}$$

13.1.2 Stabilnost digitalnih filtara

Digitalni filtar je stabilan ako i samo ako je njegov impulsni odziv apsolutno sumabilan:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty . \qquad (13.5)$$

Iz ovog uslova stabilnosti iskazanog u vremenskom domenu slijedi da funkcija prenosa stabilnog digitalnog filtra konvergira na jediničnoj kružnici u z-ravni:

$$\left| H(z) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| \left| z^{-n} \right| \Bigg|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty . \qquad (13.6)$$

Kako bismo pokazali da vrijedi i obrnuto, tj. da je digitalni filtar stabilan ako oblast konvergencije njegove funkcije prenosa obuhvata jediničnu kružnicu, posmatrajmo funkciju prenosa digitalnog filtra sa polovima $p_k = r_k e^{j\omega_k}$, $r_k \in \mathbb{R}^+$. Oblast konvergencije funkcije prenosa, koja je z-transformacija impulsnog odziva, je u opštem slučaju prsten u kompleksnoj z-ravni, $R^- < |z| < R^+$. Pri određivanju inverzne z-transformacije (vidjeti poglavlje 5.6.3) u impulsnom odzivu se pojavljuju članovi oblika $p_k^n = r_k^n e^{j\omega_k n}$. Polovi za koje je $r_k \le R^-$ generišu kauzalni dio impulsnog odziva. Da bi kauzalni dio impulsnog odziva bio apsolutno sumabilan, moduli svih takvih polova moraju biti manji od jedinice, kako r_k^n ne bi beskonačno raslo sa beskonačnim porastom diskretne vremenske promjenljive n. S druge strane, polovi za koje je $r_k \ge R^+$ generišu antikauzalni dio impulsnog odziva. Za apsolutnu sumabilnost antikauzalnog dijela impulsnog odziva neophodno je da moduli tih polova budu veći od jedinice kako za vrijednosti vremenske promjenljive koje teže minus beskonačno r_k^n ne bi beskonačno raslo. Oba navedena uslova će biti ispunjena ako oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu u z-ravni, te je na taj način moguće u domenu z-transformacije ispitati stabilnost digitalnog filtra. Kod kauzalnih digitalnih filtara oblast konvergencije je spoljašnost kruga, pa je uslov stabilnosti da se svi polovi nalaze unutar jediničnog kruga.

Funkcija prenosa digitalnog filtra sa konačnim koeficijentima koja nema drugih polova osim višestrukog pola u nuli:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_M z^{-M} , \tag{13.7}$$

ima za transformacioni par impulsni odziv konačnog trajanja:

$$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + ... + b_M\delta(n-M) , \tag{13.8}$$

koji je apsolutno sumabilan, pa zaključujemo da su FIR filtri uvijek stabilni.

13.1.3 Amplitudna i fazna karakteristika

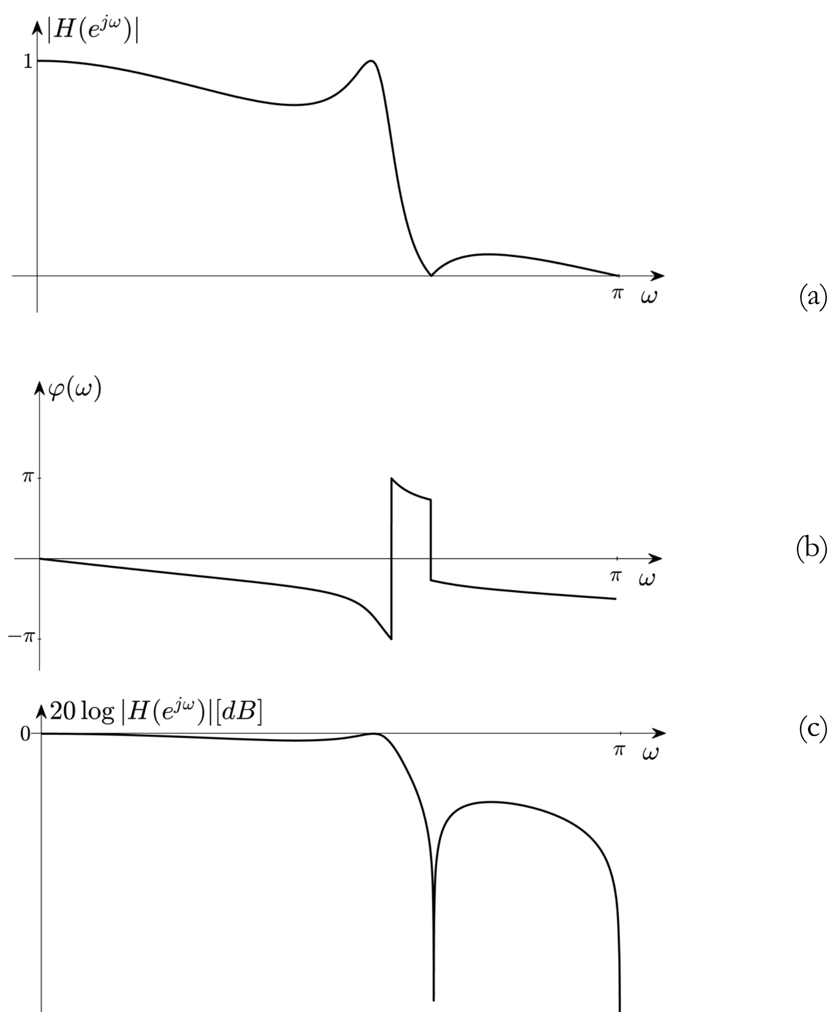
Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} , \tag{13.9}$$

je periodična, neprekidna i glatka funkcija digitalne učestanosti ω sa periodom 2π . Njen modul je amplitudna, a argument fazna karakteristika digitalnog filtra. Primjeri amplitudne i fazne karakteristke digitalnog filtra dati su na Slici 13.1.

Za filtre čiji je impulsni odziv realan, amplitudna karakteristika je parna, a fazna karakteristika neparna funkcija učestanosti, te je u tom slučaju frekvencijsku karakteristiku dovoljno posmatrati u osnovnom opsegu $[0,\pi]$, tj. duž gornje polovine jedinične kružnice u *z*-ravni. Ukoliko ne bude drugačije naglašeno, u daljnjem razmatranju ćemo podrazumijevati da je impulsni odziv filtra realan i prikazivati frekvencijsku karakteristiku samo u osnovnom opsegu.

Skokovite promjene od $\pm 2\pi$ rad u grafičkom prikazu fazne karakteristike posljedica su konvencije da se vrijednosti fazne karakteristike prikazuju u opsegu $[-\pi,\pi]$ rad. Pri izlasku iz tog opsega faznoj karakteristici se dodaje ili oduzima 2π rad , kako bi njen grafik mogao biti prikazan u zadatom opsegu. Amplitudna karakteristika je neprekidna funkcija, dok se u faznoj karakteristici, na mjestima gdje frekvencijska karakteristika ima nultu vrijednost, pojavljuje skokovita promjena za $\pm\pi$ rad. Analiziraćemo to posmatrajući uticaj dvije



Slika 13.1 Primjer grafičkog prikaza karakteristika digitalnog filtra: (a) amplitudna karakteristika; (b) fazna karakteristka i (c) funkcija pojačanja.

konjugovano-kompleksne nule, $e^{\pm j\omega_z}$, koje se nalaze na jediničnoj kružnici, na frekvencijsku karakteristiku digitalnog filtra. Faktori funkcije prenosa koji potiču od tih nula su oblika:

$$N(z) = \left(z - e^{j\omega_z}\right)\left(z - e^{-j\omega_z}\right) = z^2 - 2\cos\omega_z \cdot z + 1 . \tag{13.10}$$

Posmatrajući dio frekvencijske karakteristike $N(e^{j\omega})$ koji potiče od tih faktora:

$$\begin{aligned} N(e^{j\omega}) &= e^{j2\omega} - 2\cos\omega_z \cdot e^{j\omega} + 1 = 2\left(\cos\omega - \cos\omega_z\right)e^{j\omega} = \\ &= \begin{cases} 2\left|\left(\cos\omega - \cos\omega_z\right)\right|e^{j\omega}, & \omega \le \omega_z , \\ -2\left|\left(\cos\omega - \cos\omega_z\right)\right|e^{j\omega} = 2\left|\left(\cos\omega - \cos\omega_z\right)\right|e^{j(\omega \pm \pi)}, & \omega > \omega_z , \end{cases} \end{aligned} \tag{13.11}$$

vidimo da se na učestanosti ω_z u faznoj karakteristici pojavljuje skokovita promjena za π rad.

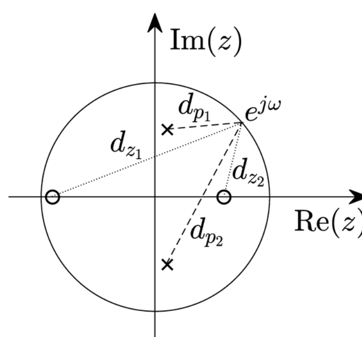
Pored amplitudne karakteristike često se posmatra i njen kvadrat:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = H\left(z\right)H\left(z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} , \tag{13.12}$$

a pri grafičkoj predstavi koristi logaritamska skala, u vidu $20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\left[\mathrm{dB}\right]$, kao na Slici 13.1(c). Ovaj logaritamski oblik zapisa amplitudne karakteristike nazivamo *funkcija pojačanja* ili *magnituda* filtra.

Kompleksni polovi i nule funkcije prenosa se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima. Oni imaju velik uticaj na amplitudnu karakteristiku filtra, posebno na učestanostima u njihovoj blizini. Amplitudna karakteristika na nekoj učestanosti ω je direktno proporcionalna udaljenosti d_{z_k} tačke $e^{j\omega}$, koja se nalazi na jediničnoj kružnici, od nule z_k, a obrnuto proporcionalna njenoj udaljenosti d_{p_k} od pola p_k, jer vrijedi da je:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega} - z_k\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega} - p_k\right|} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M} d_{z_k}}{\prod_{k=1}^{N} d_{p_k}} . \tag{13.13}$$



Slika 13.2 Geometrijska interpretacija uticaja položaja nula i polova funkcije prenosa na amplitudnu karakteristiku.

To je grafički ilustrovano na Slici 13.2 u slučaju funkcije prenosa sa dvije nule i dva pola.

Posmatrajmo u kompleksnoj z-ravni kretanje tačke, koja odgovara vrhu vektora $e^{j\omega}$, pri promjeni učestanosti ω. Sa približavanjem te tačke bilo kom polu p_k funkcije prenosa smanjuje se udaljenost $\left|e^{j\omega} - p_k\right|$, pa amplitudna karakteristika raste. Kada se pri promjeni učestanosti ω tačka koja odgovara vrhu vektora $e^{j\omega}$ približava nekoj od nula z_k funkcije prenosa, smanjuje se udaljenost $\left|e^{j\omega} - z_k\right|$, pa amplitudna karakteristika opada. Uticaj nula i polova na amplitudnu karakteristiku je to veći što se nule i polovi nalaze bliže jediničnoj kružnici. Ako se nula funkcije prenosa nalazi na jediničnoj kružnici, vrijednost amplitudne karakteristike je na toj učestanosti jednaka nuli i komponenta signala te učestanosti će biti potpuno uklonjena iz signala. Vrijednost amplitudne karakteristike na učestanosti pola koji se nalazi na jediničnoj kružnici je beskonačno velika. Filtar se u tom slučaju nalazi na granici stabilnosti.

13.1.4 Fazno i grupno kašnjenje

Ako je ulazni signal u LTI digitalni filtar sa realnim impulsnim odzivom prostoperiodičan, oblik izlaznog signala u ustaljenom stanju određen je amplitudnom i faznom karakteristikom na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega n} + \frac{1}{2}\left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(-\omega)} e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega n} + \frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{-j\varphi(\omega)} e^{-j\omega n} = \\ &= \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi(\omega)\right). \end{aligned} \tag{13.14}$$

Pri tome smo koristili osobinu da je, kod sistema sa realnim impulsnim odzivom, amplitudna karakteristika parna, a fazna karakteristika neparna funkcija učestanosti.

Fazno kašnjenje, $\tau_\varphi(\omega)$, koje se definiše kao vremenski pomjeraj prostoperiodičnog signala pri prolasku kroz LTI sistem, određeno je vrijednošću fazne karakteristike na učestanosti ulaznog signala:

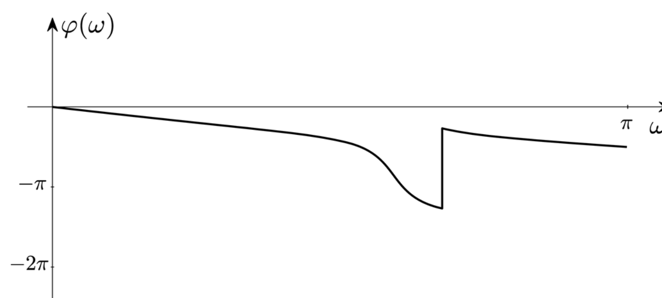
$$y(n) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left[\omega\left(n - \tau_\varphi(\omega)\right)\right], \tag{13.15}$$

i iznosi:

$$\tau_\varphi(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}. \tag{13.16}$$

Za određivanje faznog kašnjenja fazna karakteristika treba da bude neprekidna.

Skokovite promjene fazne karakteristike na učestanostima gdje je frekvencijska karakteristika jednaka nuli nisu od značaja, jer je u tim tačkama i amplitudna karakteristika jednaka nuli, pa fazno kašnjenje komponente nulte amplitude gubi smisao. Pri definisanju fazne karakteristike se pretpostavlja da je diskretni sistem pobuđen sinusnim signalom beskonačnog trajanja. U tom slučaju, promjene faznog kašnjenja u iznosu punog perioda dovode do vremenskog pomaka sinusnog signala koji je neprimjetan. Ali, ako je potrebno izračunati stvarno kašnjenje koje unosi digitalni filtar, mora se uraditi tzv.



Slika 13.3 Primjer odmotane fazne karakteristike digitalnog filtra.

odmotavanje faze, tj. računati faznu karakteristiku bez svođenja u opseg veličine $[-\pi,\pi]$ rad. Fazna karakteristika filtra iz primjera sa Slike 13.1, nakon odmotavanja faze, prikazana je na Slici 13.3.

Ako je fazna karakteristika linearna, $\varphi(\omega)=-n_0\omega$, fazno kašnjenje je konstantno i iznosi n_0. Budući da u tom slučaju fazno kašnjenje ne zavisi od učestanosti ulaznog signala, ako se na ulaz filtra dovede složenoperiodični signal, svaka komponenta signala će pri prolasku kroz filtar biti pomjerena u vremenu za isti iznos. Ako zanemarimo uticaj amplitudne karakteristike (pretpostavimo da je jednaka jedinici), oblik signala pri prolasku kroz filtar se neće promijeniti, samo će izlazni signal biti pomjeren u odnosu na ulazni signal za n_0. U slučaju kada fazna karakteristika nije linearna, svaka komponenta ulaznog signala pri prolasku kroz filtar biva različito zakašnjena. Na primjer, u slučaju kvadratnog oblika fazne karakteristike $\varphi(\omega)=-n_0\omega^2$, fazno kašnjenje iznosi $n_0\omega$ i različito je za svaku frekvencijsku komponentu ulaznog signala. Sinteza izlaznog signala na osnovu komponenti koje kroz sistem prolaze sa različitim kašnjenjima, dovodi do toga da se oblik izlaznog signala i pri konstantnoj amplitudnoj karakteristici razlikuje od oblika ulaznog signala, te kažemo da dolazi do *faznih izobličenja* signala.

U slučajevima nelinearne fazne karakteristike i složenih oblika ulaznog signala, posmatranje faznih kašnjenja pojedinačnih komponenti gubi smisao, jer

je teško pronaći vezu vremenskog kašnjenja signala sa faznom karakteristikom. Međutim, za klasu, u praksi često korištenih, uskopojasnih signala, oblika:

$$x(n) = a(n)e^{j\omega_c n}, \tag{13.17}$$

koji imaju vremenski sporopromjenljivu anvelopu $a(n)$ i gdje je $e^{j\omega_c n}$ signal nosioca, a ω_c frekvencija nosioca, moguće je približno odrediti vremensko kašnjenje anvelope signala formiranog od grupe frekvencijski bliskih komponenti, koje se naziva *grupno kašnjenje*. Za spektar $A(e^{j\omega})$ uskopojasnog signala $a(n)$ vrijedi da je $A(e^{j\omega}) = 0$ za $|\omega| > B$, $B \ll \omega_c$, te je:

$$a(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} A(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} \left|A(e^{j\omega})\right|e^{j\psi(\omega)}e^{j\omega n}d\omega, \tag{13.18}$$

gdje je $\psi(\omega) = \arg\left(A(e^{j\omega})\right)$. Signal $a(n)$ sadrži frekvencijske komponente $\left|A(e^{j\omega})\right|e^{j(\omega n+\psi(\omega))}$ za $|\omega| \le B$, dok je zbog množenja u vremenskom domenu sa signalom nosioca, spektar signala $x(n)$ pomjeren i centriran oko frekvencije nosioca, pa u sebi sadrži frekvencijske komponente $\left|A(e^{j\omega})\right|e^{j((\omega+\omega_c)n+\psi(\omega))}$, $|\omega| \le B$. Prilikom prolaska kroz filtar, svaka od frekvencijskih komponenti ulaznog signala $x(n)$ se modifikuje funkcijom prenosa digitalnog filtra $H(e^{j\omega})$, , te, uz oznaku $\varphi(\omega) = \arg\left(H(e^{j\omega})\right)$, komponente izlaznog signala $y(n)$ možemo zapisati u obliku $\left|H(e^{j(\omega+\omega_c)})\right|e^{j\varphi(\omega+\omega_c)}\left|A(e^{j\omega})\right|e^{j((\omega+\omega_c)n+\psi(\omega))}$, $|\omega| \le B$. Sa stanovišta analize vremenskog pomjeraja sporopromjenljive anvelope signala, razumno je pretpostaviti da je amplitudna karakteristika filtra konstantna (bez gubitka opštosti usvajamo da je jednaka jedinici) u uskom opsegu oko frekvencije nosioca ω_c, dok ćemo faznu karakteristiku filtra, za male vrijednosti učestanosti ω, aproksimirati Tejlorovim redom na sljedeći način: $\varphi(\omega_c + \omega) =$ $= \varphi(\omega_c) + \left(d\varphi(\omega)/d\omega\big|_{\omega=\omega_c}\right)\omega = \varphi(\omega_c) + \varphi'(\omega_c)\omega$.

Sada se komponente izlaznog signala za $|\omega| \leq B$ mogu aproksimirati sa:

$$e^{j\varphi(\omega_c)+j\varphi'(\omega_c)\omega}\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\left((\omega+\omega_c)n+\psi(\omega)\right)}=e^{j\left(\omega_c n+\varphi(\omega_c)\right)}\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\left(\omega n+\psi(\omega)+\varphi'(\omega_c)\omega\right)},$$

te je izlazni signal dat sa:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{j\left(\omega_c n+\varphi(\omega_c)\right)}\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\psi(\omega)}e^{j\left(\omega n+\varphi'(\omega_c)\omega\right)}d\omega = \\ &= e^{j\left(\omega_c n+\varphi(\omega_c)\right)}\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}\left[A\left(e^{j\omega}\right)e^{j\varphi'(\omega_c)\omega}\right]e^{j\omega n}d\omega = \\ &= e^{j\left(\omega_c n+\varphi(\omega_c)\right)}a\left(n+\varphi'(\omega_c)\right)=e^{j\omega_c\left(n-\tau_\varphi(\omega_c)\right)}a\left(n-\tau_g(\omega_c)\right), \end{aligned} \tag{13.19}$$

gdje je vremenski pomjeraj signala nosioca jednak faznom kašnjenju na frekvenciji nosioca, $\tau_\varphi(\omega_c)=-\varphi(\omega_c)/\omega_c$, dok je vremenski pomjeraj sporopromjenljive anvelope jednak grupnom kašnjenju, definisanom sa:

$$\tau_g(\omega)=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \tag{13.20}$$

izračunatom na frekvenciji nosioca, za $\omega=\omega_c$.

U slučaju kada je fazna karakteristika linearna za sve komponente signala iz posmatrane grupe, $\varphi(\omega)=-n_0\omega$ za $|\omega-\omega_c|\leq B$, fazno i grupno kašnjenje su jednaki, $\tau_\varphi(\omega)=\tau_g(\omega)=n_0$. Stoga su i vremenski pomjeraji signala nosioca i anvelope jednaki i kompletan signal je pri prolasku kroz filtar pomjeren u vremenu za n_0, bez faznih izobličenja.

13.1.5 Filtri minimalne faze

Položaj nula i polova u kompleksnoj z-ravni utiče na frekvencijske karakteristike digitalnog filtra. U praktičnim primjenama je neophodno da filtar bude stabilan, a u mnogim aplikacijama i kauzalan. Za razliku od rasporeda polova, gdje je sa stanovišta stabilnosti neophodno da se polovi kauzalnog digitalnog filtra nalaze unutar jediničnog kruga, nule funkcije prenosa mogu da se nađu bilo gdje u kompleksnoj z-ravni. Međutim, pokazaćemo da od toga da li se nule digitalnog filtra nalaze unutar ili van jediničnog kruga zavisi kašnjenje signala u vremenskom domenu, te da je grupno kašnjenje najmanje ukoliko se sve nule nalaze unutar jediničnog kruga.

Budući da svaku funkciju prenosa LTI sistema možemo predstaviti proizvodom funkcija prenosa prvog reda koje sadrže samo jednu nulu ili jedan pol, oblika $H_{1z}(z)=k\left(1-z_k z^{-1}\right)$ ili $H_{1p}(z)=k\left(1-p_k z^{-1}\right)^{-1}$, respektivno, ukupno kašnjenje je jednako zbiru kašnjenja koje unose ovakve sekcije prvog reda u kaskadnoj vezi. Posmatraćemo zbog toga samo kašnjenje koje unosi jedna nula funkcije prenosa kroz faktor $\left(1-z_k z^{-1}\right)$, zavisno od toga da li se nalazi unutar ili van jediničnog kruga. Pretpostavimo da se nula $z_k=r_k e^{j\omega_k}$, $r_k\in\mathbb{R}^+$, nalazi unutar jediničnog kruga, što znači da je $r_k<1$. Analizirajmo njen uticaj na faznu karakteristiku filtra:

$$\begin{aligned}\arg\left(1-z_k z^{-1}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} &= \arg\left(1-r_k e^{j\omega_k}e^{-j\omega}\right)=\\ &=\arg\left(\left(1-r_k\cos\left(\omega-\omega_k\right)\right)+jr_k\sin\left(\omega-\omega_k\right)\right).\end{aligned} \tag{13.21}$$

Grupno kašnjenje uzrokovano ovom nulom iznosi:

$$\begin{aligned}\tau_g(\omega)&=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=\frac{\sin^2(\omega-\omega_k)+\cos^2(\omega-\omega_k)-r_k^{-1}\cos(\omega-\omega_k)}{\sin^2(\omega-\omega_k)+\cos^2(\omega-\omega_k)+r_k^{-2}-2r_k^{-1}\cos(\omega-\omega_k)}=\\ &=\frac{r_k-\cos(\omega-\omega_k)}{r_k+r_k^{-1}-2\cos(\omega-\omega_k)}.\end{aligned} \tag{13.22}$$

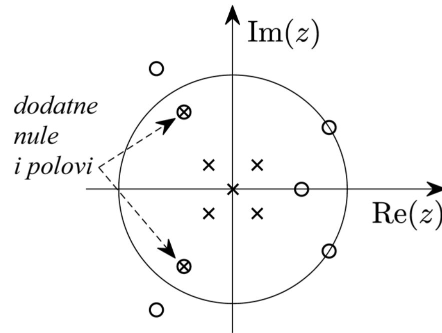
Nazivnik dobijenog grupnog kašnjenja ima istu vrijednost za nulu oblika $r_k e^{j\omega_k}$ i nulu oblika $1/r_k e^{j\omega_k}$, koje imaju istu vrijednost argumenta, ali se prva nalazi unutar $(r_k < 1)$, a druga van jediničnog kruga. Međutim, vrijednost brojnika je veća za nulu koja se nalazi van jediničnog kruga. Ovaj zaključak se lako proširuje na opšti oblik funkcije prenosa, jer je:

$$\arg\left(\prod_{k=1}^{M}\left(1-z_k z^{-1}\right)\right)=\sum_{k=1}^{M}\arg\left(1-z_k z^{-1}\right), \tag{13.23}$$

pa filtri koji imaju nule van jediničnog kruga imaju veće grupno kašnjenje. Stabilni i kauzalni filtri čije se sve nule nalaze unutar jediničnog kruga nazivaju se *filtri minimalne faze* ili *minimalno fazni filtri*. Filtri koji imaju sve nule van jediničnog kruga nazivaju se *filtri maksimalne faze*, dok se filtri sa nulama raspoređenim i unutar i van jediničnog kruga nazivaju *filtri mješovite faze*. Filtri maksimalne faze i filtri mješovite faze se jednim imenom nazivaju *neminimalno fazni filtri*.

Prilikom projektovanja neminimalno faznih filtara, funkcija prenosa neminimalno faznog filtra $H(z)$ se razdvaja na dvije funkcije prenosa i zapisuje u obliku proizvoda funkcije prenosa minimalno faznog filtra $H_{MF}(z)$ i funkcije prenosa svepropusnog filtra $H_{SP}(z)$. Ovaj postupak se zasniva na dodavanju nula i polova na istim pozicijama u kompleksnoj z-ravni (množenju i dijeljenju funkcije prenosa sa jednakim faktorima, tako da funkcija prenosa ostaje nepromijenjena), a zatim pogodnog grupisanja nula i polova u dvije funkcije prenosa. Postupak je ilustrovan na Slici 13.4. Prvo se u kompleksnoj z-ravni nacrtaju nule i polovi neminimalno fazne funkcije prenosa $H(z)$. Ako van jediničnog kruga postoji L nula, dodaje se novih L nula i polova, na datoj slici označeno sa "$\otimes$", koje se u odnosu na nule van jediničnog kruga raspoređuju tako da imaju jednaku vrijednost argumenta, ali recipročnu vrijednost modula, te se nalaze unutar jediničnog kruga.

Značajno je primijetiti da sve nule funkcije prenosa koje imaju istu ili konjugovano kompleksnu vrijednost argumenta i jednaku ili recipročnu



Slika 13.4 Razdvajanje neminimalno fazne funkcije prenosa na minimalno faznu funkciju prenosa i funkciju prenosa svepropusnog filtra.

vrijednost modula, $z_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ i $z_k = 1/r_k e^{\pm j\omega_k}$, kroz faktore oblika $\left(1 - z_k z^{-1}\right)$ na isti način doprinose obliku amplitudne karakteristike, jer se moduli ovih faktora na jediničnoj kružnici razlikuju samo za multiplikativnu konstantu r_k:

$$\begin{aligned} \left|1 - r_k e^{\pm j\omega_k} e^{-j\omega}\right| &= \sqrt{1 - 2r_k \cos\left(\omega - \omega_k\right) + r_k^2} \\ \left|1 - \frac{1}{r_k} e^{\pm j\omega_k} e^{-j\omega}\right| &= \frac{1}{r_k}\sqrt{1 - 2r_k \cos\left(\omega - \omega_k\right) + r_k^2} \end{aligned} . \tag{13.24}$$

Jednako vrijedi za polove oblika $p_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ i $p_k = 1/r_k e^{\pm j\omega_k}$ i njima odgovarajuće faktore $\left(1 - p_k z^{-1}\right)^{-1}$ u funkciji prenosa. To nam omogućava da formiramo funkciju prenosa svepropusnog filtra $H_{SP}\left(z\right)$ grupisanjem nula $z_k = 1/r_k e^{\pm j\omega_k}$ koje se nalaze van jediničnog kruga i njima odgovarajućih polova $p_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ iz unutrašnjosti jediničnog kruga (ove polove smo naknadno dodali i oni se nalaze na pozicijama označenim sa "$\otimes$"). Frekvencijska karakteristika takvog sistema je konstantna:

$$H_{SP}\left(e^{j\omega}\right)=\left|b_0\frac{\prod_{k=1}^{L}\left(1-z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{L}\left(1-p_k z^{-1}\right)}\right|_{z=e^{j\omega}}=\left|b_0\right|\frac{\prod_{k=1}^{L}\left|1-\frac{1}{r_k}e^{j\theta_k}e^{-j\omega}\right|}{\prod_{k=1}^{L}\left|1-r_k e^{j\theta_k}e^{-j\omega}\right|}=\left|b_0\right|\prod_{k=1}^{L}\frac{1}{r_k}. \qquad (13.25)$$

Preostale nule i polovi koji se nalaze unutar jediničnog kruga (uključujući jediničnu kružnicu) formiraju funkciju prenosa minimalno faznog filtra:

$$H_{MF}\left(z\right)=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M-L}\left(1-z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-p_k z^{-1}\right)}. \qquad (13.26)$$

Ako pomnožimo ove dvije funkcije prenosa, doći će do skraćivanja faktora koji odgovaraju naknadno dodatim nulama i polovima, te tako dobijamo funkciju prenosa neminimalno faznog filtra:

$$H\left(z\right)=H_{MF}\left(z\right)\cdot H_{SP}\left(z\right). \qquad (13.27)$$

Na ovaj način svodimo projektovanje i realizaciju neminimalno faznih filtara na problem projektovanja i realizacije minimalno faznih filtara i svepropusnog filtra. U postupku realizacije, prvo se realizuje minimalno fazna funkcija prenosa $H_{MF}\left(z\right)$ sa ciljem postizanja željene amplitudne karakteristike, a zatim se kaskadnim vezivanjem svepropusnog filtra $H_{SP}\left(z\right)$ koriguje fazna karakteristika.

13.1.6 Idealni filtri

Diskretni sistem koji bez slabljenja propušta signal sa ulaza na izlaz, unoseći samo konstantno vremensko kašnjenje τ bez promjene oblika signala, opisan je jednačinom diferencija $y\left(n\right)=x\left(n-\tau\right)$. Funkcija prenosa ovakvog sistema je $H\left(z\right)=z^{-\tau}$, a frekvencijska karakteristika $H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega\tau}$. Amplitudna karakteristika sistema je jednaka jedinici na svim učestanostima, dok je fazna

karakteristika linearna, $\varphi(\omega) = -\tau\omega$. Ovaj sistem je zapravo idealni svepropusni filtar. Na sličan način možemo opisati čitavu klasu idealnih filtara.

Idealni filtar je frekvencijski selektivan sistem koji signale iz propusnog opsega propušta bez slabljenja, dok je slabljenje signala iz nepropusnog opsega beskonačno veliko. Prelazni opseg idealnog filtra je beskonačno mali, a njegova fazna karakteristika linearna. Frekvencijska karakteristika idealnog filtra je data sa:

$$H_{IF}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega \in W_{PO}, \\ 0, & \omega \in W_{NPO}, \end{cases} \tag{13.28}$$

gdje su sa W_{PO} i W_{NPO} označeni propusni i nepropusni opsezi frekvencija, respektivno. Kod niskopropusnog i visokopropusnog filtra je sa ω_0 označena granična učestanost propusnog opsega, dok je kod filtra propusnika opsega i filtra nepropusnika opsega ω_0 geometrijska sredina graničnih učestanosti propusnog, odnosno nepropusnog opsega, respektivno. Amplitudne i fazne karakteristike idealnih frekvencijski selektivnih filtara prikazane su na Slici 13.5.

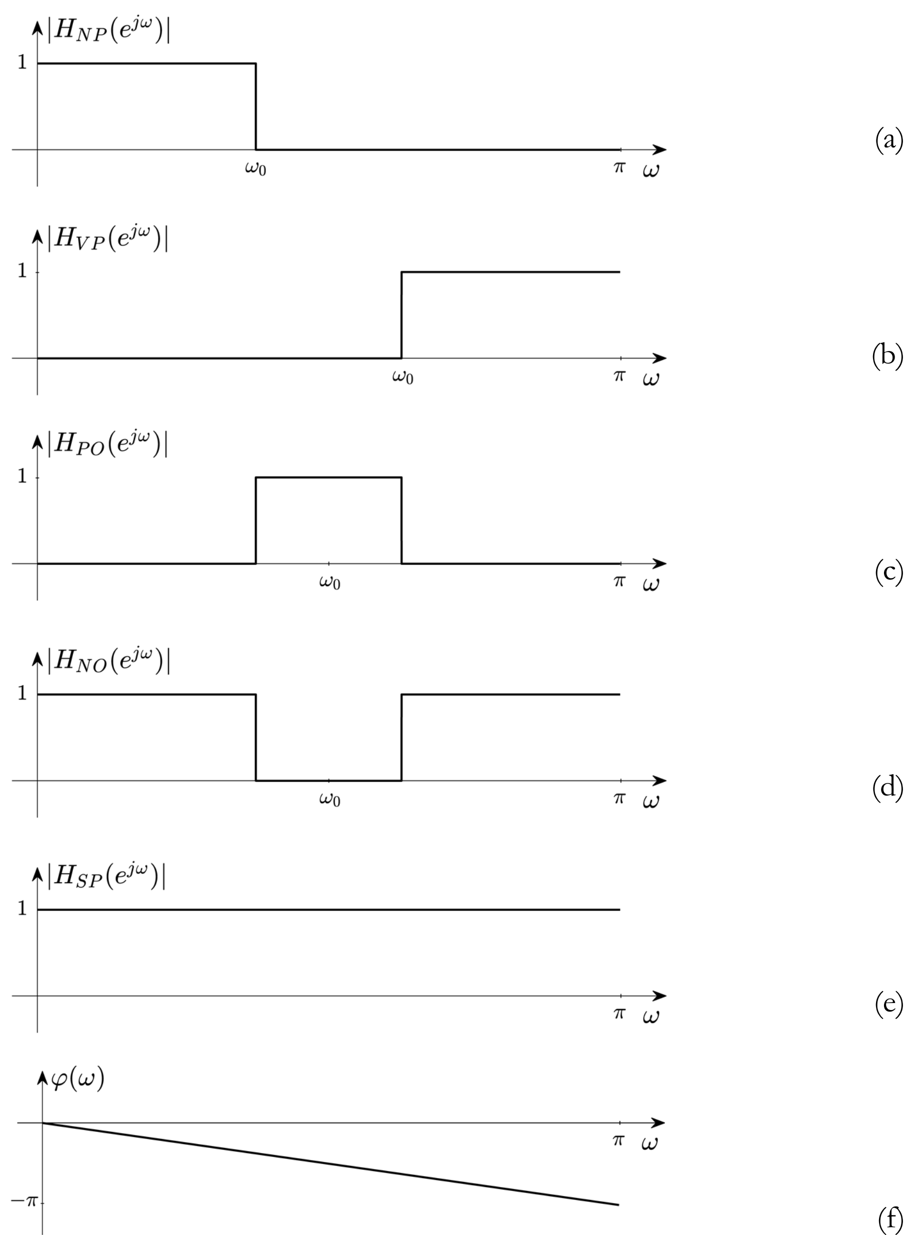
Prilikom projektovanja frekvencijski selektivnog digitalnog filtra, tj. određivanja njegove funkcije prenosa, i same realizacije, težimo postići karakteristike idealnog filtra. Međutim, karakteristike idealnih filtara nisu praktično ostvarljive. Pokazaćemo to na primjeru idealnog NP filtra, a slično se može pokazati i za ostale idealne filtre. Frekvencijska karakteristika idealnog NP filtra je data sa:

$$H_{NP}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{13.29}$$

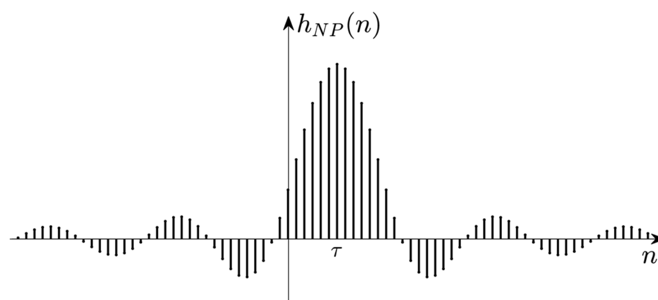
gdje je ω_0 granična učestanost propusnog opsega, a τ željeno kašnjenje.

Njegov impulsni odziv:

$$h_{NP}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{NP}\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\omega_0 (n-\tau)\right)}{(n-\tau)\pi}, & n \neq \tau, \\ \dfrac{\omega_0}{\pi}, & n = \tau, \end{cases} \tag{13.30}$$



Slika 13.5 Karakteristike idealnih digitalnih filtara. Amplitudne karakteristike: (a) NP; (b) VP; (c) PO; (d) NO i (e) filtra SP; te (f) fazna karakteristika filtra SP.



Slika 13.6 Impulsni odziv idealnog NP filtra.

prikazan na Slici 13.6, nije kauzalan i beskonačnog je trajanja.

Da bi filtar bio realizibilan LTI sistemom konačnog reda, moramo biti u mogućnosti da njegovu relaciju ulaz-izlaz opišemo jednačinom diferencija konačnog reda sa konstantnim koeficijentima, čemu odgovara funkcija prenosa data sa (13.2). Frekvencijska karakteristika realizibilnog digitalnog filtra je neprekidna i glatka funkcija učestanosti:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}, \tag{13.31}$$

dok frekvencijske karakteristike idealnih filtara imaju prekide. Stoga idealne filtre nije moguće realizovati. Iako postoje i drugačiji pristupi, u praktičnim primjenama se postupak projektovanja filtra najčešće svodi na izbor koeficijenata jednačine diferencija (ili, ekvivalentno, nula i polova funkcije prenosa) sa ciljem aproksimacije karakteristika idealnog filtra, tj. konstantne amplitudne i linearne fazne karakteristike u propusnim opsezima.

13.1.7 Filtri sa linearnom faznom karakteristikom

Poželjno je da filtri kojima se postiže željena amplitudna karakteristika imaju linearnu faznu karakteristiku kako bi se izbjegla fazna izobličenja filtriranog signala. *Filtri linearne faze* su kauzalni LTI sistemi sa linearnom faznom karakteristikom oblika $\varphi(\omega) = -\tau\omega + \theta$ za svako ω, osim u tačkama frekvencijske ose u kojima frekvencijska karakteristika prolazi kroz nulu. U tim tačkama se javljaju skokovite promjene fazne karakteristike za $\pm\pi$. Komponente izlaznog signala učestanosti na kojima je amplitudna karakteristika nula jednake su nuli, te vremenski pomak tih komponenti gubi smisao i ne razmatra se.

Iz uslova linearnosti fazne karakteristike, izraženog preko impulsnog odziva:

$$\begin{aligned}\arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right) &= \arg\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}\right) = \\ &= \arg\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\cos\omega n - j\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\sin\omega n\right) = \\ &= -\arctan\frac{\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\sin\omega n}{\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\cos\omega n} = -\tau\omega + \theta,\end{aligned} \tag{13.32}$$

slijedi da je:

$$\tan(-\tau\omega + \theta) = \frac{\sin(-\tau\omega + \theta)}{\cos(-\tau\omega + \theta)} = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\sin\omega n}{\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\cos\omega n}, \tag{13.33}$$

odakle proističu osobine impulsnog odziva filtara linearne faze. Prethodni uslov se unakrsnim množenjem razlomaka u relaciji (13.33) lako svodi na:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\sin\left(\omega(n - \tau) + \theta\right) = 0\,. \tag{13.34}$$

Može se pokazati da kauzalni IIR sistemi čiji impulsni odzivi ispunjavaju uslov linearnosti fazne karakteristike nemaju racionalnu funkciju prenosa. Takve sisteme nije moguće implementirati sa konačnim brojem matematičkih operacija

pri računanju jednog elementa izlazne sekvence, te nisu od praktičnog značaja. Dati uslov, koji smo postavili za impulsni odziv filtra kako bi on imao linearnu faznu karakteristiku, se sa FIR filtrima može ispuniti birajući $\theta = 0$ ili $\theta = \pi/2$.

U prvom slučaju, birajući $\theta = 0$, uslov (13.34) se svodi na:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left(\omega(n-\tau)\right) = 0\,. \tag{13.35}$$

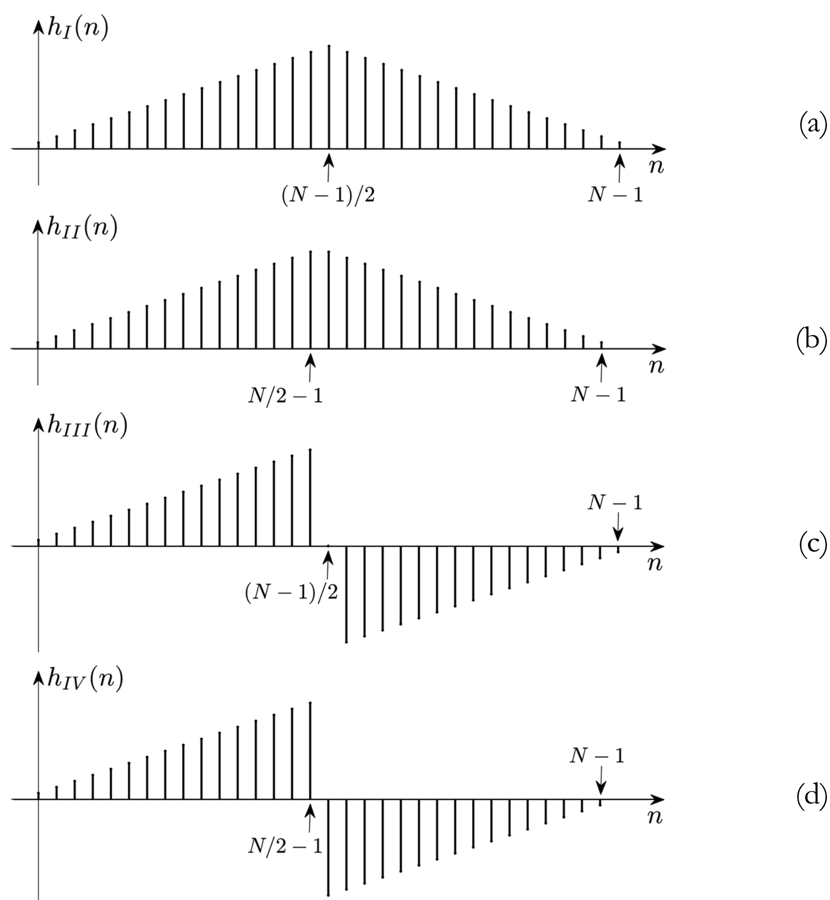
Ako je impulsni odziv osno simetičan (paran) u odnosu na vertikalnu pravu koja prolazi kroz tačku τ (τ ne mora biti cio broj već može da se nađe i na polovini intervala između diskretnih vrijednosti n -ose), zbog neparnosti sinusne funkcije $\sin\left(\omega(n-\tau)\right)$ posmatrano u odnosu na istu pravu, u sumi (13.35) će postojati parovi sabiraka koji će se međusobno poništiti, te će uslov (13.35) biti ispunjen za svako ω. Zbog kauzalnosti sistema trajanje impulsnog odziva je $N = 2\tau + 1$. Ovakva vrsta simetrije u impulsnom odzivu se može zapisati sa $h(n) = h(N-1-n)$. Ako je grupno kašnjenje filtra τ cjelobrojno, trajanje impulsnog odziva N je neparno, u suprotnom je parno.

Birajući $\theta = \pi/2$, uslov (13.34) se svodi na:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\left(\omega(n-\tau)\right) = 0\,. \tag{13.36}$$

Sada impulsni odziv treba da bude osno antisimetičan (neparan) u odnosu na vertikalnu pravu koja prolazi kroz tačku $n = \tau$, zbog parnosti pomjerene kosinusne funkcije $\cos\left(\omega(n-\tau)\right)$ posmatrano u odnosu na istu pravu, kako bi došlo do poništavanja parova sabiraka u sumi (13.36) za svako ω. Trajanje impulsnog odziva je isto kao u prethodnom slučaju, $N = 2\tau + 1$, a ovu vrstu simetrije u impulsnom odzivu iskazujemo sa $h(n) = -h(N-1-n)$.

Ovisno o tome da li je impulsni odziv FIR filtra simetričan ili antisimetričan, te da li ima paran ili neparan broj elemenata, govorimo o četiri tipa FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom:



Slika 13.7 Primjeri impulsnih odziva FIR filtara sa linearnom fazom: (a) tip I; (b) tip II; (c) tip III i (d) tip IV.

I: $h(n)=h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,(N-1)/2-1,\ N$ neparno,

II: $h(n)=h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,N/2-1,\ N$ parno,

III: $h(n)=-h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,(N-1)/2-1,\ N$ neparno i

IV: $h(n)=-h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,N/2-1,\ N$ parno.

Primjeri impulsnih odziva ova četiri tipa FIR filtara su dati na Slici 13.7.

Kod filtara sa linearnom faznom karakteristikom, fazno kašnjenje i grupno kašnjenje su jednaki i odgovaraju kašnjenju signala u vremenu. Ako je N neparno, vremensko kašnjenje signala $\tau = (N-1)/2$ je cjelobrojno, što je poželjno sa stanovišta praktičnih primjena u diskretnim sistemima, dok je za N parno vremensko kašnjenje izlaznog signala oblika $k + 1/2$, gdje je k cio broj.

Frekvencijska karakteristika FIR filtra tipa I je data sa:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{I}}\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_{\mathrm{I}}(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} \left[h_{\mathrm{I}}(n) e^{-j\omega n} + h_{\mathrm{I}}(N-1-n) e^{-j\omega(N-1-n)} \right] + h_{\mathrm{I}}\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega[(N-1)/2]} = \\ &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ h_{\mathrm{I}}\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h_{\mathrm{I}}(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \tag{13.37}$$

Na sličan način, za filtar tipa II sa parnim brojem elemenata impulsnog odziva dobijamo frekvencijsku karakteristiku u obliku:

$$H_{\mathrm{II}}\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h_{\mathrm{II}}(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \right\}. \tag{13.38}$$

Izuzimajući učestanosti na kojima frekvencijska karakteristika mijenja znak, pa se u faznoj karakteristici javljaju skokovite promjene za $\pm\pi\,\mathrm{rad}$, fazne karakteristike oba filtra, $\varphi(\omega) = -(N-1/2)\omega$, su linearne u opsegu $-\pi < \omega \le \pi$, a grupna kašnjenja $\tau(\omega) = N - 1/2$ su konstantna u istom opsegu.

Kod FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom i antisimetričnim impulsnim odzivom (tip III i tip IV) se u faznoj karakteristici javlja dodatni pomjeraj za $\pi/2$. Frekvencijske karakteristike filtara tipa III i IV su oblika:

$$H_{\mathrm{III}}\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h_{\mathrm{III}}(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \right\}, \tag{13.39}$$

$$H_{\mathrm{IV}}\left(e^{j\omega}\right)=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}\left\{\sum_{n=0}^{N/2-1}2h_{\mathrm{IV}}\left(n\right)\sin\left[\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\}. \quad (13.40)$$

Zbog faznog pomjeraja od $\pi/2$ ovi filtri su pogodni za realizaciju diskretnog diferencijatora i Hilbertovog transformatora, koje ćemo detaljno opisati u poglavljima 13.2.3 i 13.2.4.

Nule funkcija prenosa FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom su simetrično raspoređene. Iz uslova $h(n)=\pm h(N-1-n)$, slijedi:

$$\begin{aligned}H(z)&=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\pm\sum_{n=0}^{N-1}h(N-1-n)z^{-n}\Big|_{m=N-1-n}=\pm\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{-(N-1-m)}=\\&=\pm z^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)\left(z^{-1}\right)^{-m}=\pm z^{-(N-1)}H\left(z^{-1}\right).\end{aligned} \quad (13.41)$$

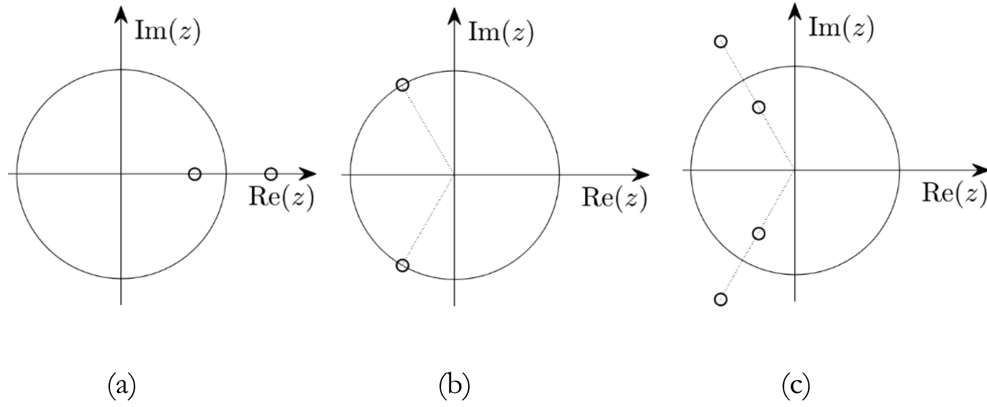
To znači da su nule od $H(z)$ istovremeno nule od $H\left(z^{-1}\right)$, izuzev nule u ishodištu. Nule funkcije prenosa LTI sistema su ili realne, ili se javljaju u konjugovano-kompleksnim parovima, a sad vidimo da kod FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom imamo dodatnu simetriju u odnosu na jediničnu kružnicu. Zaključujemo da nule digitalnog FIR filtra sa linearnom faznom karakteristikom imaju sljedeće osobine, prikazane na Slici 13.8:

a) ako je $z_k=r_k$ realna nula od $H(z)$, tada je $z_k^{-1}=r_k^{-1}$ takođe nula od $H(z)$,

b) ako je $z_k=e^{j\omega_k}$ nula od $H(z)$, uz $\omega_k\neq 0$ i $\omega_k\neq\pi$, tada je $z_k^*=z_k^{-1}=e^{-j\omega_k}$ takođe nula od $H(z)$,

c) ako je $z_k=r_ke^{j\omega_k}$ nula od $H(z)$, gdje je $r_k\neq 1$, tada su $z_k^*=r_ke^{-j\omega_k}$, $z_k^{-1}=r_k^{-1}e^{-j\omega_k}$ i $\left(z_k^*\right)^{-1}=r_k^{-1}e^{j\omega_k}$ takođe nule od $H(z)$.

Budući da funkcija prenosa FIR filtra nema konačnih polova, na osnovu zaključaka koje smo izveli o mogućem rasporedu nula, funkciju prenosa FIR filtra sa linearnom faznom karakteristikom možemo napisati kao proizvod elementarnih faktora $A_k(z)$, $B_k(z)$ i $C_k(z)$:



Slika 13.8 Mogući rasporedi nula funkcija prenosa FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom.

$$H(z)=\prod_{k=1} A_k(z)\prod_{k=1} B_k(z)\prod_{k=1} C_k(z), \tag{13.42}$$

gdje elementarni faktori imaju sljedeće forme:

$$A_k(z)=\left(1-r_k z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{r_k}z^{-1}\right),$$

$$B_k(z)=\left(1-e^{j\omega_k}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\omega_k}z^{-1}\right),$$

$$C_k(z)=\left(1-r_k e^{j\omega_k}z^{-1}\right)\left(1-r_k e^{-j\omega_k}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{r_k}e^{j\omega_k}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{r_k}e^{-j\omega_k}z^{-1}\right).$$

Za razliku od filtra tipa I, koji nema ograničenja u pogledu frekvencijske selektivnosti uzrokovanih rasporedom nula funkcije prenosa, ostali tipovi FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom imaju određena ograničenja, što ćemo pokazati posmatrajući (13.41) za $z=\pm 1$. Filtar tipa II ima nulu u tački $z=-1$, jer je na osnovu (13.41) za simetričan impulsni odziv i N parno $H(-1)=(-1)^{-(N-1)}H(-1)=-H(-1)$, što je moguće samo ako je $H(-1)=0$. To

znači da je njegova frekvencijska karakteristika jednaka nuli za $\omega=\pi$, te se ovaj tip filtara ne može koristiti za projektovanje VP filtara i filtara NO. Filtar tipa III ima nule $z=-1$ i $z=1$, jer na osnovu (13.41) za antisimetričan impulsni odziv sa neparnim brojem odmjeraka dobijamo $H(-1)=-(-1)^{-(N-1)}H(-1)=-H(-1)$ i $H(1)=-(1)^{-(N-1)}H(1)=-H(1)$, iz čega slijedi da je i $H(-1)=0$ i $H(1)=0$. Frekvencijska karakteristika ovih filtara uvijek ima nule na učestanostima $\omega=0$ i $\omega=\pi$. Ovi filtri se mogu koristiti samo za projektovanje filtara PO. Filtar tipa IV sa antisimetričnim impulsnim odzivom i parnim brojem odmjeraka N u impulsnom odzivu ima nulu u tački $z=1$, jer na osnovu (13.41) za ovaj tip filtra vrijedi $H(1)=-(1)^{-(N-1)}H(1)=-H(1)$, što će biti ispunjeno samo ako je $H(1)=0$. Frekvencijska karakteristika filtara tipa IV je jednaka nuli za $\omega=0$, te se ovaj tip filtara ne može koristiti za projektovanje NP filtara i filtara NO.

13.2 Filtri za uobličavanje signala u vremenskom domenu

Kada govorimo o filtriranju signala, obično razmišljamo o sposobnosti izdvajanja željenih frekvencijskih i ublažavanja uticaja neželjenih frekvencijskih komponenti, kao što su, na primjer, smetnje koje potiču iz mrežnog i prekidačkog napajanja, lokalnih radio stanica i slično. Međutim, u nekim primjenama, posebno kada ne znamo prirodu signala, te nije moguće reći koje su njegove komponente željene, a koje neželjene, kao što je slučaj pri otklanjanju šuma u mjernom signalu, jednako je važno razmišljati o uobličavanju signala u vremenu. U ovom poglavlju ćemo razmotriti nekoliko pristupa filtriranju signala u vremenskom domenu. Prvo ćemo obraditi često korišten linearni filtar sa pomičnim usrednjavanjam, a zatim medijan filtar, diskretni diferencijator i Hilbertov transformator, koji pripadaju klasi nelinearnih filtara. Homomorfno procesiranje signala se široko primjenjuje kod obrade nelinearno kombinovanih signala, pa ćemo u nastavku objasniti i taj pristup filtriranju signala.

13.2.1 Filtri sa pomičnim usrednjavanjem

Zbog svoje jednostavnosti, *filtri sa pomičnim usrednjavanjem* (eng. *Moving Average* - MA) filtri, se veoma često koriste u praktičnim primjenama za uklanjanje šuma, iako su im frekvencijske karakteristike, sa stanovišta sposobnosti razdvajanja propusnog i nepropusnog opsega, veoma loše. Kao što i samo ime kaže, izlazni signal se dobija usrednjavanjem odmjeraka ulaznog signala u okolini trenutnog odmjerka. To je ekvivalentno usrednjavanju dijela signala $x(n)$ koji filtriramo, a koji se dobije njegovim množenjem sa pravougaonom prozorskom sekvencom trajanja N elemenata.

Kada se vrši simetrično usrednjavanje oko trenutnog odmjerka, govorimo o nekauzalnoj verziji filtra sa pomičnim usrednjavanjem:

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} x(n-k), \tag{13.43}$$

pri čemu je potrebno da red filtra N bude neparan.

Kauzalni oblik ovog filtra je dat sa:

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k). \tag{13.44}$$

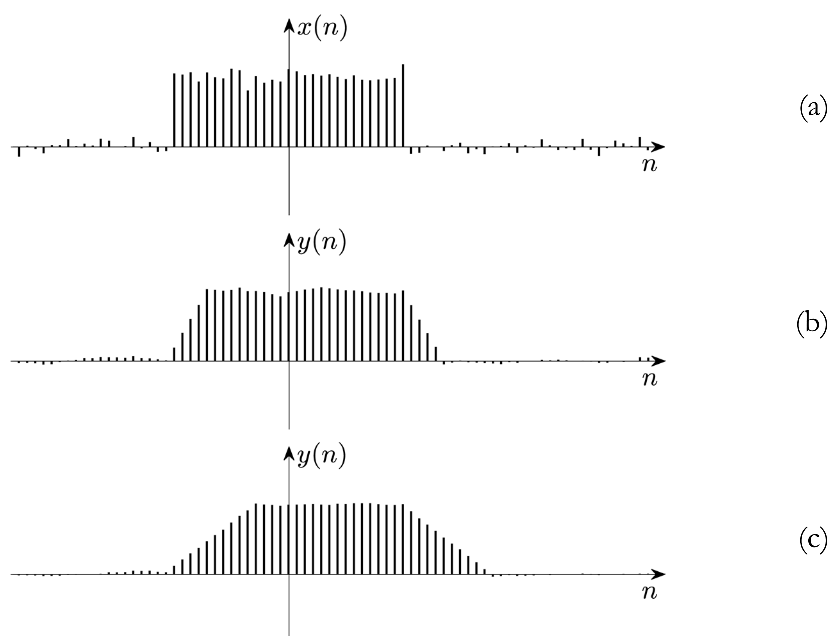
Obje prethodne relacije su zapravo konvolucije sa konačnim sekvencama jediničnih impulsa, koje se, zbog množenja jedinicama pri računanju konvolucije, svode na sabiranje.

Impulsni odziv nekauzalnog filtra datog sa (13.43) ima elemente različite od nule i za negativne vrijednosti diskretne vremenske promjenljive n:

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \delta(n-k), \tag{13.45}$$

za razliku od kauzalnog filtra datog sa (13.44), čiji je impulsni odziv:

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k). \tag{13.46}$$



Slika 13.9 Uticaj reda MA filtra na uklanjanje šuma i oštrinu ivica signala: (a) pobudni signal; (b) odziv filtra petog reda i (c) odziv filtra jedanaestog reda.

Usrednjavanjem susjednih odmjeraka ovi filtri vrše *glačanje signala* (eng. *smoothing*). Na taj način se umanjuje uticaj šuma, ali se i ublažavaju brze promjene signala. Filtar većeg reda bolje uklanja šum, ali istovremeno više umanjuje brzinu promjena, kao što se može vidjeti iz primjera na Slici 13.9, u područjima naglog porasta i pada amplitude signala.

Impulsni odziv filtra sa pomičnim usrednjavanjem je konačnog trajanja, te se radi o FIR filtru. Računanjem *z*-transformacije impulsnog odziva, lako odredimo funkcije prenosa nekauzalnog i kauzalnog filtra sa pomičnim usrednjavanjem. Za nekauzani filtar dobijamo:

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} z^{-k}=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\cdot z^{\frac{N-1}{2}}, \tag{13.47}$$

dok za funkciju prenosa kauzalnog filtra imamo da je:

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \tag{13.48}$$

Ove dvije funkcije prenosa se razlikuju samo za član $z^{(N-1)/2}$, te su odzivi ova dva filtra istog oblika, samo vremenski pomjereni. Primijetimo da funkcije prenosa (13.47) i (13.48) imaju oblik koji odgovara rekurzivnom sistemu, ali se pol u nazivniku ovih funkcija prenosa, $p_1 = 1$, poništava prvom od ukupno *N* nula tih funkcija prenosa: $z_k = e^{j2k\pi/N}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Stoga se suštinski radi o FIR filtru.

Amplitudne karakteristike oba filtra su jednake:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|. \tag{13.49}$$

Posmatrano sa stanovišta frekvencijske selektivnosti, ovaj filtar je niskopropusni filtar. Što je red filtra *N* veći, to je manja širina glavnog luka amplitudne karakteristike. Manja širina glavnog luka amplitudne karakteristike, odnosno uži propusni opseg, je često poželjna karakteristika filtra sa stanovišta uklanjanja šuma. Međutim, to će negativno uticati na oštrinu ivica signala, jer brze promjene signala bivaju ublažene, što se jasno vidi u primjeru na Slici 13.9.

Frekvencijska selektivnost se može popraviti primjenom impulsnih odziva koji su drugačijeg oblika od pravougaonog, kao i njihovom višestrukom primjenom (kaskadnom vezom filtra). Impulsni odziv kaskadne veze dva filtra jednak je konvoluciji njihovih impulsnih odziva. Tako, na primjer, dvostruki prolaz kroz filtar sa istom pravougaonom prozorskom sekvencom odgovara primjeni trougaone prozorske sekvence, približno dvostruko dužeg trajanja, zbog čega dolazi do sužavanja amplitudne karakteristike kaskaden veze u odnosu na samo jedan filtar. Već nakon četiri prolaza, ekvivalentna prozorska sekvenca postaje veoma slična obliku Gausove sekvence. Teorijski se može pokazati da se nakon beskonačno mnogo konvolucija pravougaonog signala sa samim sobom dobija Gausova sekvenca.

Od prozorskih sekvenci čiji su oblici različiti od pravougaonog, najčešće se koriste Bartletova, Hanova, Hamingova, Blakmenova i Kajzerova sekvenca. Iako amplitudne karakteristike filtara sa ovim prozorskim sekvencama imaju širi glavni luk, bočni lukovi su niži, pa je slabljenje na visokim frekvencijama veće. Pored toga, zbog bržeg opadanja vrijednosti prozorske sekvence na njenim krajevima, prilikom ovakvog težinskog usrednjavanja, veća težina se daje odmjercima koji su bliži tekućem odmjerku.

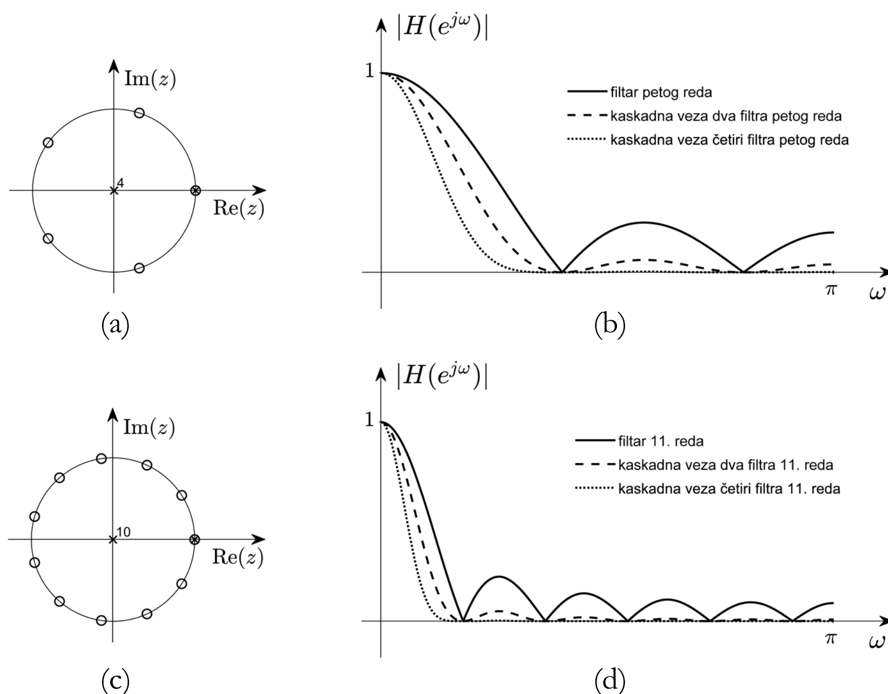
Raspored nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj z-ravni i amplitudne karakteristike filtara sa pomičnim usrednjavanjem, sa pravougaonom prozorskom sekvencom, petog i jedanaestog reda, dati su na Slici 13.10. Crtkanom linijom je prikazana frekvencijska karakteristika koja se dobije dvostrukim, a tačkastom četverostrukim prolazom kroz filtre sa pravougaonom prozorskom sekvencom. Većem redu filtra odgovara duži impulsni odziv, te je glavni luk amplitudne karakteristike uži. Impulsni odzivi filtara formiranih kaskadnom vezom više filtara sa pravougaonim impulsnim odzivom su drugačijeg oblika od pravougaonog, što dodatno utiče na snižavanje bočnih lukova amplitudne karakteristike.

Najveća prednost filtra sa pravougaonom prozorskom sekvencom u odnosu na filtre sa drugim prozorskim sekvencama je mogućnost njegove efikasne realizacije, u pogledu brzine izvršavanja, čak i pri višestrukim prolazima. Umjesto korištenja nerekurzivne implementacije na osnovu relacije (13.43), ovi filtri se mogu realizovati rekurzivno, bez korištenja konvolucije. Rekurzivne jednačine diferencija se dobijaju inverznom z-transformacijom (13.47) ili (13.48):

$$y(n)=y(n-1)+\frac{1}{N}x(n)-\frac{1}{N}x(n-N), \tag{13.50}$$

$$y(n)=y(n-1)+\frac{1}{N}x\left(n+\frac{N-1}{2}\right)-\frac{1}{N}x\left(n-\frac{N+1}{2}\right), \tag{13.51}$$

ovisno o tome da li se radi o kauzalnom ili nekauzalnom filtru, respektivno. Vidimo da su prilikom rekurzivne implementacije potrebna samo dva sabiranja po jednom izlaznom odmjerku, neovisno o redu filtra. Filtar se lako implementira u cjelobrojnoj aritmetici.



Slika 13.10 Karakteristike MA filtara: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudne karakteristike filtara sa pomičnim usrednjavanjem petog reda i njihove kaskadne veze; (c) raspored nula i polova i (d) amplitudne karakteristike filtara sa pomičnim usrednjavanjem jedanaestog reda i njihove kaskadne veze.

Treba imati na umu da ovaj rekurzivni filtar, za razliku od većine rekurzivnih sistema, ima impulsni odziv konačnog trajanja, u obliku pravougaonog impulsa. Primjena prozorskih sekvenci drugačijih oblika usložnjava realizaciju, jer zahtijeva korištenje konvolucije za traženja odziva.

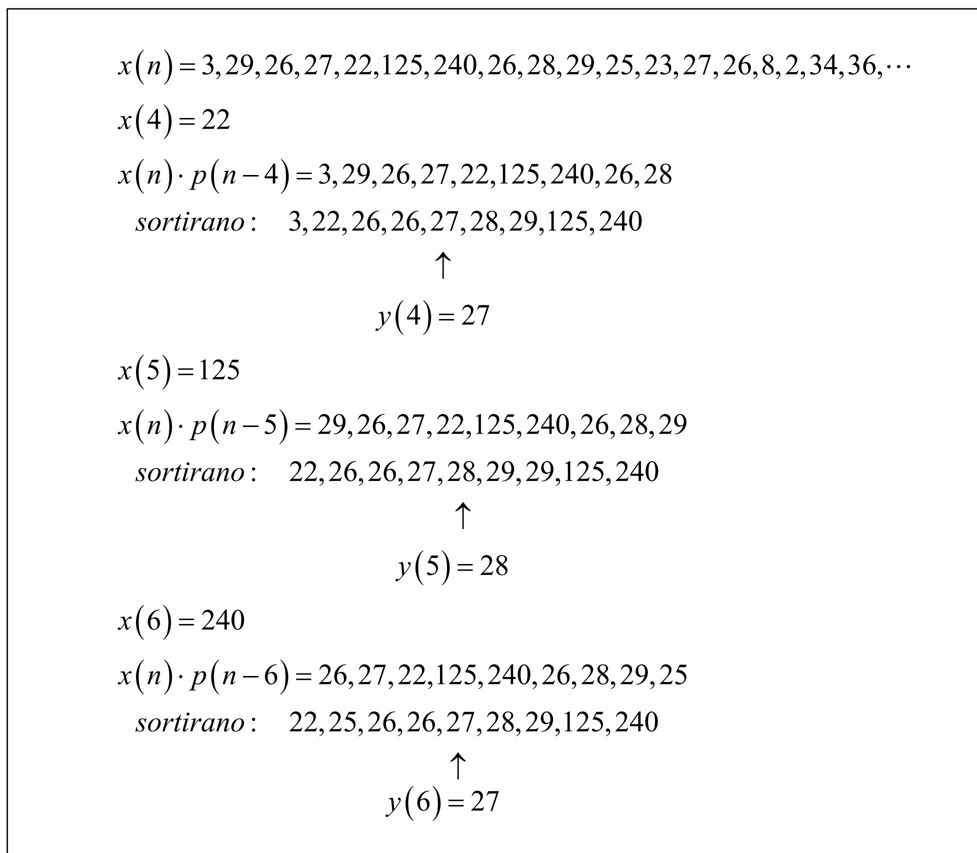
13.2.2 Medijan filtar

Medijan filtar je zasnovan na *medijani*, tj. onoj vrijednosti iz skupa podataka za koju je funkcija distribucije jednaka 0,5. Vjerovatnoća da će se pojaviti podatak čija je vrijednost manja od medijane je podjednaka vjerovatnoći pojavljivanja podatka čija je vrijednost veća od medijane. Ako su podaci poredani po veličini svojih vrijednosti, medijana dijeli posmatrani skup podataka u dva jednako brojna skupa.

Ove činjenice se koriste za nelinearno filtriranje signala. Slično kao kod MA filtra, preko ulaznog signala se pomjera pravougaona prozorska sekvenca od N elemenata i izlaznom odmjerku se pridružuje medijana izdvojenog bloka ulaznog signala. Pri određivanju medijane, podaci iz posmatranog bloka se poredaju po rastućem redoslijedu njihovih vrijednosti. Za prozorske sekvence sa parnim brojem elemenata za vrijednost izlaznog signala se uzima vrijednost koja se u sortiranoj sekvenci nalazi na poziciji $N/2$, dok se za prozorske sekvence sa neparnim brojem elemenata za vrijednost izlaznog signala uzima vrijednost koja se u sortiranoj sekvenci nalazi na poziciji $(N+1)/2$. Na Slici 13.11 prikazana su tri koraka pri izračunavanju vrijednosti elemenata izlaznog signala u vremenskim trenucima $n = 4,5,6$. Pri tome, pravougaona prozorska sekvenca ima devet elemenata i centrirana je oko pozicije u kojoj se izračunava vrijednost izlaznog signala, a ulazna sekvenca je data za $n = 0,1,2,...$

Napomenimo da se ovakvim načinom obrade signala, za razliku od MA filtriranja, dobijaju vrijednosti izlaznog signala koje su u potpunosti jednake nekim od postojećih vrijednosti ulaznog signala. Vrijednost zavisne promjenljive koja je puno drugačija od ostalih u nekoj opservaciji zovemo *izuzetak* (eng. *outlier*). Ukoliko se u bloku ulaznog signala pojave vrijednosti koje značajno odstupaju od ostalih one će se naći na početku, ili na kraju sortirane sekvence podataka, kao u primjeru na Slici 13.11. Takve vrijednosti nikada neće biti medijana bilo kog bloka signala, te nemaju uticaj na vrijednosti filtriranog signala. Ovakvim izbacivanjem izuzetaka medijan filtri vrše glačanje signala.

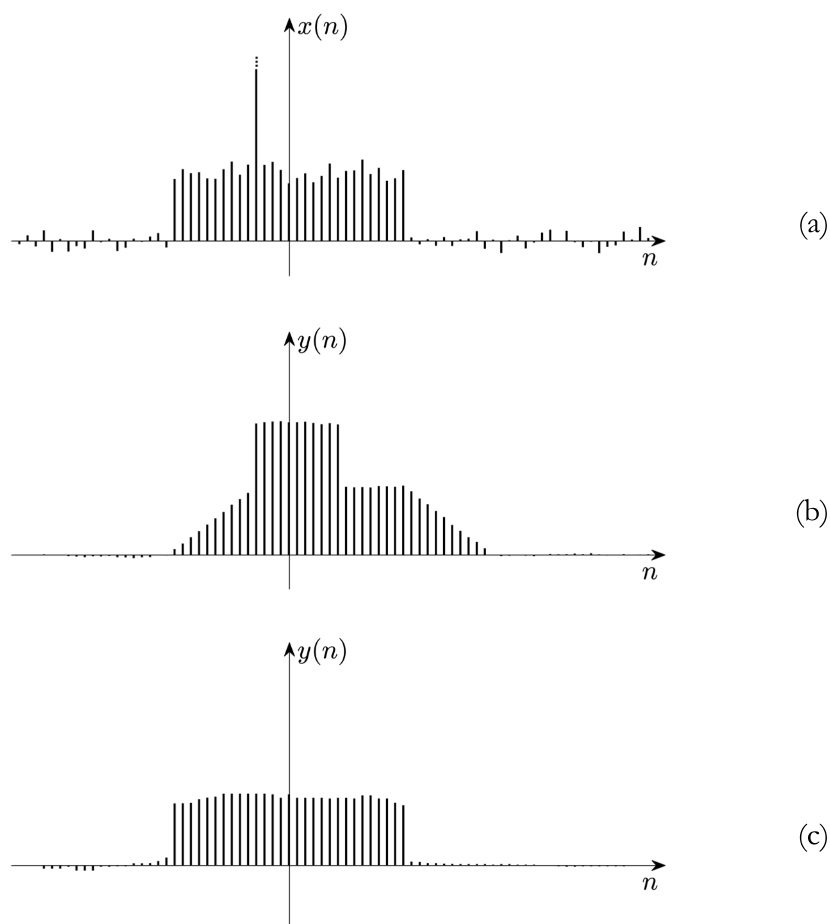
U posmatranom primjeru sa Slike 13.11 bismo, upotrebom MA filtra, koji vrši usrednjavanje svih vrijednosti iz dijela signala koji se nalazi unutar korištene



Slika 13.11 Postupak medijan filtriranja.

prozorske sekvence, dobili vrijednosti $y(5)=57,3$, $y(5)=59,7$ i $y(5)=59,7$. Budući da kod medijan filtra izuzeci ne utiču na vrijednost izlaznog signala, medijan filtar je efikasniji od MA filtra za uklanjanje impulsnog šuma, čija je amplituda jako velika, a trajanje veoma kratko.

Primjer primjene MA i medijan filtra za uklanjanje impulsnog šuma je dat na Slici 13.12. Osim što je narušen Gausovim šumom, pri čemu je odnos signal/šum 20 dB, u ulaznom signalu na Slici 13.12 se pojavljuje i impulsni šum, u vidu jednog člana sekvence čija je vrijednost oko 30 puta veća od srednje vrijednosti prikazanih elemenata signala. Taj element signala, zbog njegove



Slika 13.12 Poređenje MA i medijan filtara: (a) ulazni signal narušen Gausovim i impulsnim šumom; (b) signal filtriran MA filtrom jedanaestog reda i (c) signal filtriran medijan filtrom jedanaestog reda.

jako velike vrijednosti, nije moguće grafički prikazati u punoj veličini, pa su na Slici 13.12 korištene tri tačkice iznad ovog elementa, kao znak da nije prikazan u potpunosti. Signal je filtriran MA i medijan filtrom, pri čemu su oba filtra jedanaestog reda. Evidentna je prednost medijan filtra za uklanjanje impulsnog šuma. Pored toga, medijan filtar, za razliku od MA filtra, ne narušava oštrinu

ivica signala. Za uklanjanje Gausovog šuma, u primjenama gdje oštrina ivica signala nije bitna, MA filtar ima prednost zbog jednostavnosti implementacije.

Korisna varijacija medijan filtra je *procentualni filtar*, kod koga se izlaznom signalu ne pridružuje medijana skupa podataka iz posmatranog bloka ulaznog signala, nego vrijednost onog podatka kojemu odgovara *p*, izraženo u postocima, vrijednosti funkcije distribucije, gdje se *p* kreće od 0% (*minimum filtar*) do 100% (*maksimum filtar*). Vrijednosti različite od $p = 50\%$ (medijana) u opštem slučaju ne odgovaraju filtru za glačanje signala.

13.2.3 Diskretni diferencijator

Diskretni diferencijator je digitalni filtar koji na izlazu generiše odmjerke $y(n)$ signala $y(t)$ koji je jednak prvom izvodu signala $x(t)$, čije odmjerke $x(n)$ dovodimo na njegov ulaz. Preduslov za to je da je kontinualni signal $x(t)$ diferencijabilan i frekvencijski ograničen na opseg $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$, gdje je Δt korak odmjeravanja. U kontinualnom domenu, diferenciranju signala u vremenu odgovara množenje sa $j\Omega$ u frekvencijskom domenu, pa je frekvencijska karakteristika analognog diferencijatora $H(\Omega) = j\Omega$. Frekvencijska karakteristika diskretnog sistema se dobija periodičnim proširenjem frekvencijske karakteristike analognog diferencijatora sa periodom $2\pi/\Delta t$. Kako je ulazni signal frekvencijski ograničen, na isti opseg možemo ograničiti i frekvencijsku karakteristiku analognog diferencijatora. Takvim ograničavanjem postižemo da pri diskretizaciji ne dolazi do preklapanja prilikom periodičnog ponavljanja frekvencijske karakteristike. Frekvencijska karakteristika diskretnog sistema je na osnovnom periodu istog oblika kao frekvencijska karakteristika kontinualnog sistema, $H(e^{j\omega}) = j\omega, \; -\pi \le \omega < \pi$. Procesu diferenciranja možemo pridružiti i željeno kašnjenje τ, tako da je frekvencijska karakteristika idealnog diskretnog diferencijatora data sa:

$$H(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\tau\omega}, \tag{13.52}$$

a njegov impulsni odziv dobijamo preko inverzne DTFT:

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}j\omega e^{j\omega(n-\tau)}d\omega. \tag{13.53}$$

Za $n\neq\tau$ parcijalnom integracijom dobijamo:

$$h(n)=\frac{\cos\pi(n-\tau)}{n-\tau}-\frac{\sin\pi(n-\tau)}{\pi(n-\tau)^2}, \tag{13.54}$$

dok je $h(n)=0$ za $n=\tau$.

Impulsni odziv idealnog diskretnog diferencijatora je antisimetričan oko $n=\tau$, nekauzalan i beskonačnog trajanja, te ovakav filtar nije moguće praktično realizovati. U praktičnim primjenama koriste se filtri koji aproksimiraju željenu frekvencijsku karakteristiku. Najjednostavniji metod aproksimacije je Ojlerov metod, kojim se prvi izvod, definisan sa:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}, \tag{13.55}$$

u trenutku $t=n\Delta t$ aproksimira konačnom razlikom, na sljedeći način:

$$\hat{y}(n\Delta t)=\frac{x(n\Delta t)-x((n-1)\Delta t)}{\Delta t}. \tag{13.56}$$

Prelaskom u diskretni domen, uz $x(n)=x(t)\big|_{t=n\Delta t}$, $\hat{y}(n)=\hat{y}(t)\big|_{t=n\Delta t}$, $n\in\mathbb{Z}$ i $\Delta t=1$, dolazimo do jednačine diferencija koja opisuje ovako dobijen diskretni diferencijator:

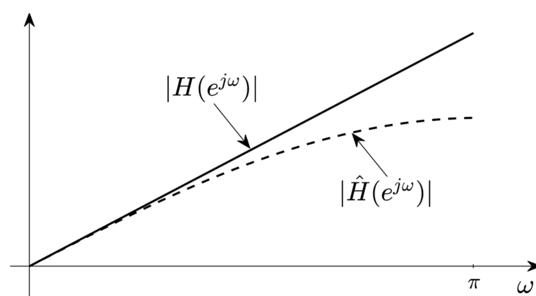
$$\hat{y}(n)=x(n)-x(n-1). \tag{13.57}$$

Odgovarajući impulsni odziv je:

$$\hat{h}(n)=\delta(n)-\delta(n-1), \tag{13.58}$$

a frekvencijska karakteristika:

$$\hat{H}(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}=j2e^{-j\omega/2}\sin(\omega/2), \tag{13.59}$$



Slika 13.13 Amplitudne karakteristike digitalnih diferencijatora: (a) idealnog i (b) dobijenog Ojlerovom aproksimacijom.

dobro aproksimira amplitudnu karakteristiku idealnog diferencijatora u oblasti niskih učestanosti, u opsegu $-\pi/4 \leq \omega < \pi/4$. Na Slici 13.13 su prikazane amplitudne karakteristike idealnog diferencijatora i diferencijatora dobijenog Ojlerovom aproksimacijom. Bolji rezultati se postižu složenijim metodima aproksimacije, kao što su Parks - MekKlelen metod i metod najmanjih kvadrata za projektovanje optimalnih filtara, čime ćemo se detaljno baviti u Glavi 15.

13.2.4 Hilbertov transformator

Za kauzalne signale, Hilbertova transformacija uspostavlja relaciju između realnog i imaginarnog dijela spektra signala. Jednako tako, za *analitičke signale*, tj. signale čiji je spektar jednak nuli za negativne vrijednosti učestanosti iz opsega $-\pi < \omega < 0$, Hilbertova transformacija uspostavlja vezu između realnog i imaginarnog dijela signala u vremenskom domenu. Zadatak Hilbertovog transformatora je da, za realan pobudni signal $x(n)$, čiji je spektar $X(e^{j\omega})$, pronađe signal $\widehat{x}(n)$, sa spektrom $\widehat{X}(e^{j\omega})$, tako da spektar $S(e^{j\omega})$ kompleksnog signala $s(n) = x(n) + j\widehat{x}(n)$, dat sa:

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j\widehat{X}(e^{j\omega}) = \left(1 + jH(e^{j\omega})\right)X(e^{j\omega}), \tag{13.60}$$

bude jednak nuli za učestanosti iz opsega $-\pi < \omega < 0$, tj. da signal $s(n)$ bude analitički. U (13.60) je sa $H(e^{j\omega})$ označena frekvencijska karakteristika Hilbertovog transformatora:

$$\widehat{X}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \tag{13.61}$$

Pretpostavimo da je frekvencijska karakteristika idealnog Hilbertovog transformatora data sa:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0, \end{cases} \tag{13.62}$$

što, koristeći funkciju $U(e^{j\omega})$ definisanu na intervalu $(-\pi, \pi)$ u obliku:

$$U(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 < \omega < \pi, \\ 0, & -\pi < \omega < 0, \end{cases} \tag{13.63}$$

možemo zapisati sa:

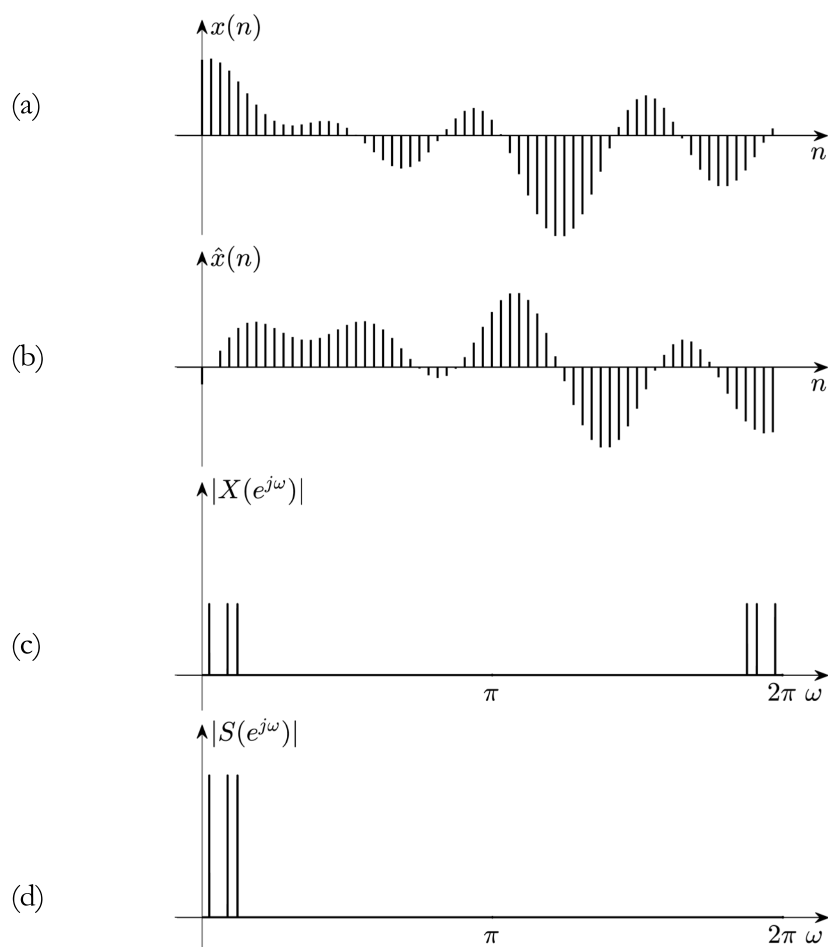
$$H(e^{j\omega}) = -j\left(2U(e^{j\omega}) - 1\right). \tag{13.64}$$

Spektar kompleksnog signala $s(n)$:

$$S(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega})U(e^{j\omega}), \tag{13.65}$$

je jednak nuli za $-\pi < \omega < 0$, te je $s(n)$ analitički signal i (13.62) je zaista frekvencijska karakteristika Hilbertovog transformatora.

Na Slici 13.14 je dat primjer Hilbertove transformacije, gdje je za realni signal, dat sa $x(n) = \cos(2\pi(203/N)n) + \sin(2\pi(721/N)n) + (2\pi(1001/N)n)$, čije trajanje iznosi $N = 16384$, određen imaginarni signal $\hat{x}(n)$, tako da je spektar $S(e^{j\omega})$ signala $s(n) = x(n) + j\hat{x}(n)$ jednak nuli za negativne učestanosti iz opsega $-\pi < \omega < 0$. Zbog periodičnosti spektra diskretnih signala, spektar $S(e^{j\omega})$ je jednak nuli i u opsegu $\pi < \omega < 2\pi$, kao što se i vidi sa Slike 13.14(d).



Slika 13.14 Primjer Hilbertove transformacije: (a) isječak realnog pobudnog signala $x(n)$; (b) isječak signala $\hat{x}(n)$ na izlazu Hilbertovog transformatora; (c) amplitudni spektar pobudnog signala i (d) amplitudni spektar analitičkog signala $s(n)=x(n)+j\hat{x}(n)$.

Iz oblika frekvencijske karakteristike Hilbertovog transformatora zaključujemo da je on svepropusni filtar sa linearnom faznom karakteristikom koji unosi konstantno kašnjenje od $\pi/2$. Opštiji oblik Hilbertovog transformatora može uključiti i željeno kašnjenje τ:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-je^{-j\tau\omega}, & 0<\omega<\pi,\\ je^{-j\tau\omega}, & -\pi<\omega<0.\end{cases} \tag{13.66}$$

Ovako definisanoj frekvencijskoj karakteristici Hilbertovog transformatora odgovara impulsni odziv:

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{j\omega(n-\tau)}d\omega-\frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\pi}e^{j\omega(n-\tau)}d\omega. \tag{13.67}$$

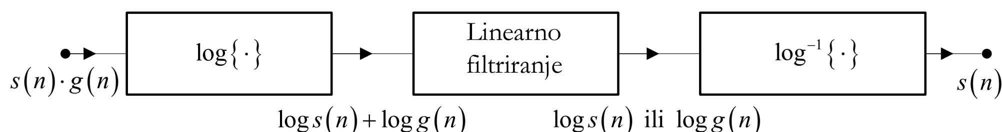
Za $n=\tau$ je $h(n)=0$, dok za $n\neq\tau$ dobijamo:

$$h(n)=\frac{2}{\pi(n-\tau)}\sin^2\frac{\pi(n-\tau)}{2}. \tag{13.68}$$

Impulsni odziv Hilbertovog transformatora je antisimetričan oko $n=\tau$, nekauzalan i beskonačnog trajanja. Činjenica da je spektar analitičkog signala $s(n)$ upola uži od spektra signala $x(n)$ omogućava prenos iste informacije uz zauzeće dva puta užeg frekvencijskog opsega i široko se primjenjuje u telekomunikacionim sistemima. Praktične implementacije Hilbertovog transformatora, kao i svih drugih idealnih filtara, se zasnivaju na aproksimaciji njegovih karakteristika.

13.2.5 Homomorfno procesiranje signala

Ukoliko signal možemo predstaviti kao zbir željenih i neželjenih frekvencijskih komponenti, u mogućnosti smo da ih linearnim filtriranjem razdvojimo. Međutim, ako je način generisanja signala iz njegovih komponenti nelinearan, linearni model filtriranja signala nije moguće primijeniti. *Homomorfno procesiranje signala* ima za cilj razdvajanje dva ili više signala koji su nelinearno kombinovani, metodom svođenja problema na linearni model.



Slika 13.15 Blok šema homomorfnog procesiranja signala.

Pretpostavimo da je složen signal umjesto sabiranjem, nastao množenjem sporopromjenljivog signala $g(n)$ i brzopromjenljivog signala $s(n)$. Takav slučaj imamo, na primjer, pri prenosu audio signala kroz medij čije se karakteristike u vremenu mijenjaju, te se i jačina primljenog zvuka tokom vremena mijenja. Matematički se taj proces može modelirati množenjem audio signala i sporopromjenljivog signala pojačanja. Kod signala koji nastaju množenjem više signala homomorfno procesiranje se postiže računanjem logaritma signala, kao na Slici 13.15. U spektru logaritma složenog signala sabrani su spektari logaritama pojedinačnih signala. Budući da smo računanjem logaritma nelinearni model signala sveli na linearni, sada možemo primijeniti linearno filtriranje. Na kraju se iz $\log s(n)$, ili $\log g(n)$, ovisno o frekvencijskoj karakteristici filtra, inverznom (eksponencijalnom) funkcijom odredi $s(n)$, ili $g(n)$, respektivno. Kada se uradi ovakvo procesiranje navedenog audio signala, u spektru logaritma signala se jasno razdvajaju dva dijela: jedan u području niskih učestanosti, koji odgovaraju sporopromjenljivoj komponenti pojačanja, i drugi, iznad 20 Hz, koji odgovara spektru audio signala. Visokopropusnim filtriranjem se može izdvojiti audio signal, dok se iz niskofrekvencijskog dijela spektra logaritma signala izvode zaključci o vremenski promjenljivoj frekvencijskoj karakteristici medija kroz koji se signal prostire i potrebnom pojačanju. Ovaj postupak se u literaturi naziva automatska kontrola pojačanja. Sličan problem imamo kod digitalne obrade slike, gdje se sjena na slici mijenja sporo u odnosu na preostali sadržaj slike, te homomorfno procesiranje omogućava uklanjanje sjene na slici.

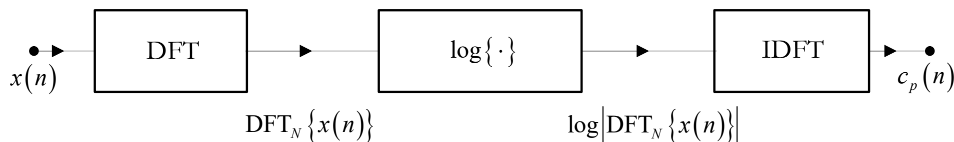
Kepstar je oblik homomorfnog procesiranja kod koga se računanje logaritma vrši nakon prelaska u frekvencijski domen. To omogućava razdvajanje pomnoženih spektara signala, odnosno komponenti složenog signala koji je, u vremenskom domenu, nastao konvolucijom jednog signala, čiji je spektar brzopromjenljiv, i drugog signala, čiji se spektar sporo mijenja.

Takav je slučaj, na primjer, kod govornog signala. Na veoma pojednostavljen način, generisanje govornog signala se može modelirati prolaskom pobudnog signala kroz govorni trakt, dakle konvolucijom pobudnog govornog signala i impulsnog odziva govornog trakta. Pobudni govorni signal nastaje prolaskom vazduha iz pluća kroz otvore između glasnica i ima oblik periodične povorke kratkotrajnih impulsa. Spektar pobudnog govornog signala je pseudoperiodičan i brzopromjenljiv, dok se frekvencijska karakteristika govornog trakta sporo mijenja.

Budući da smo pretpostavili da je signal nastao konvolucijom dva signala, spektralne komponente jednog i drugog signala su pomnožene u frekvencijskom domenu, te ih nije moguće razdvojiti linearnim filtriranjem. Nakon određivanja logaritma spektra, dobija se zbir logaritama spektara pojedinačnih komponenti signala. Logaritam spektra jedne komponente se brzo mijenja, a druge sporo. Kada smo u vremenskom domenu imali sličnu situaciju, da se jedan signal mijenja brzo, a drugi sporo, primjenjivali smo Furijeovu transformaciju, kako bismo u frekvencijskom domenu jasno razgraničili frekvencijske komponente sporopromjenljivog signala, u području niskih učestanosti i komponente brzopromjenljivog signala, koje su u području visokih učestanosti. Sada imamo potrebu da anliziramo signal koji nije u vremenskom, već je u frekvencijskom domenu, pa ćemo to uraditi po analogiji sa analizom signala u vremenskom domenu. Kako bismo u spektru signala otkrili sporopromjenljivu i brzopromjenljivu komponentu, primjenjujemo Furijeovu analizu na logaritam spektra signala. U ovom koraku se koristi IDFT, koja se jednako kao DFT može tumačiti kao razvoj signala na kompleksne eksponencijalne sekvence, samo je sada signal koji se razlaže u frekvencijskom, a njegove komponente u vremenskom domenu. Dakle, *kepstralna analiza* je oblik spektralne analize gdje se, prilikom rada sa diskretnim signalima, posmatra IDFT logaritma amplitudnog spektra signala:

$$c_p(n) = \mathrm{IDFT}_N\left\{\log\left|\mathrm{DFT}_N\left\{x(n)\right\}\right|\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\log\left|\sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right|\right]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (13.69)$$

Koraci prilikom kepstralne analize su prikazani na Slici 13.16.



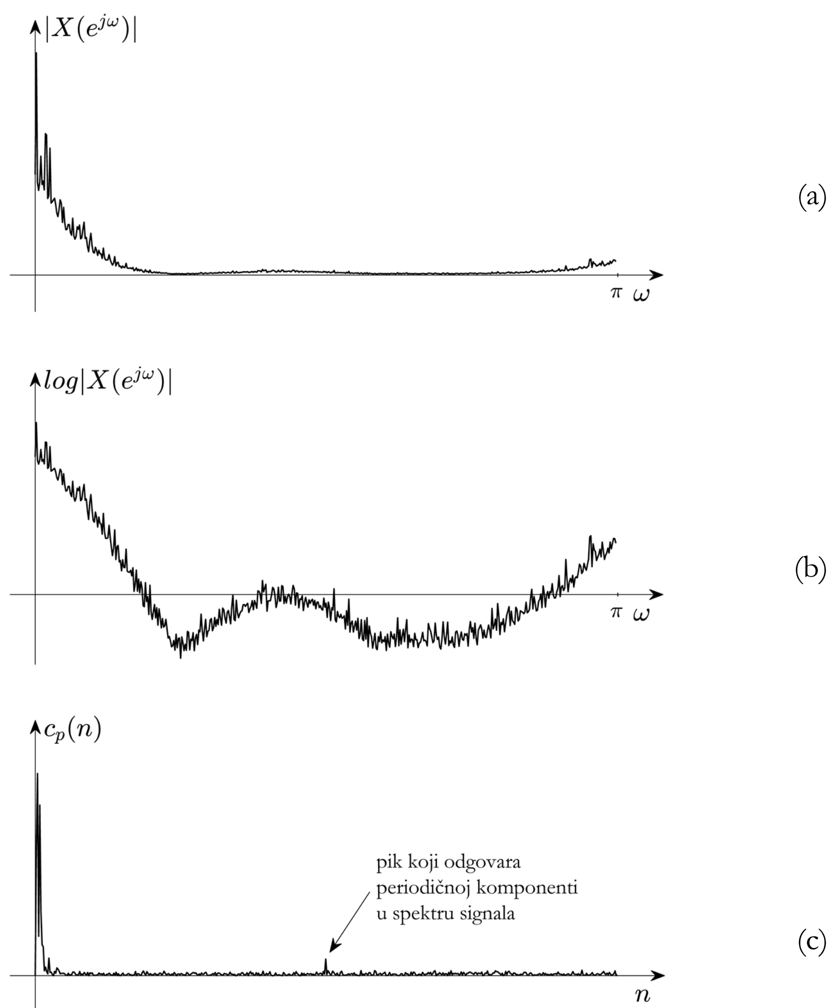
Slika 13.16 Blok šema kepstralne analize.

Osnovna ideja kepstralne analize je da se logaritam spektra signala posmatra kao signal na koji se primjenjuje Furijeova analiza, što omogućava otkrivanje periodičnosti u spektru signala. Ako je signal u frekvencijskom domenu periodičan, u vremenskom domenu će se pojaviti pikovi signala u trenucima koji su recipročni periodu signala u frekvencijskom domenu.

Primijetimo da u kepstru gubimo informaciju o fazi, jer se on računa samo na osnovu amplitudnog spektra.

Pretpostavimo da se spektar signala može modelirati kao proizvod sporopromjenljivog dijela spektra i periodične komponente spektra, narušen multiplikativnim šumom, slično kao kod govornog signala. Primjer takvog spektra signala je prikazan na Slici 13.17(a). Nakon određivanja logaritma spektra signala, logaritmi sporopromjenljivog dijela spektra i periodične komponente spektra su sabrani, kao na Slici 13.17(b). Kao posljedica inverzne DFT periodične komponente spektra, u kepstru se pojavljuje pik u trenutku čija je vrijednost recipročna periodu periodične komponente spektra, Slika 13.17(c).

U slučaju govornog signala, na ovaj način se određuje osnovna frekvencija pobudnog govornog signala, što je frekvencija zvuka koji čujemo kao osnovnu frekvenciju govora. Otkrivanje ove frekvencije je značajno sa stanovišta identifikacije govornika, jer svaka osoba ima karakterističnu osnovnu frekvenciju govora. Kod prosječne osobe, osnovna frekvencija je u opsegu od oko 85–180 Hz za muškarce i 165–255 Hz za žene. Nakon izdvajanja dijela kepstra koji sadrži pik, a potiče od pobudnog govornog signala koji se generiše putem glasnica,



Slika 13.17 Primjer kepstralne analize: (a) amplitudni spektar signala; (b) logaritam amplitudnog spektra i (c) kepstar signala.

preostali dio kepstra opisuje vokalni trakt. Budući da se karakteristike vokalnog trakta mogu smatrati nepromjenljivim pri izgovaranju jednog glasa, taj dio kepstra može poslužiti za analizu govora. Problem određivanja osnovne frekvencije, kao i visine tona govornika, što je subjektivni doživljaj osnovne frekvencije, te prepoznavanja govora, je mnogo složeniji nego što bi se moglo zaključiti iz ovog kratkog razmatranja, pa je za ozbiljniju analizu govora neophodno konsultovati dodatnu literaturu.

Ova zamjena uloga vremenskog i frekvencijskog domena, kada se Furijeovom analizom vrši analiza spektra signala, uticala je i na davanje imena ovoj analizi, te je naziv *kepstar* nastao ispisivanjem unazad prva četiri slova naziva *spek*tar, a koristeći isti princip nezavisna promjenljiva bi na našem jeziku trebala biti označena kao *kerfvencija* (engleski naziv za kepstar je *cepstrum*, a za nezavisnu promjenljivu *quefrency*). Međutim, zbog svoje rogobatnosti, izraz kerfvencija se rijetko koristi. Kerfvencija ima prirodu vremena pa je zadržana oznaka n i često se i naziva vremenskom promjenljivom, iako se ne radi o istoj nezavisnoj promjenljivoj kao kod polaznog signala $x(n)$.

Glava 14

KLASIČNI METODI PROJEKTOVANJA DIGITALNIH FILTARA

Klasični metodi projektovanja digitalnih filtara odnose se na proces pronalaženja odgovarajućih funkcija prenosa na osnovu postavljenih specifičnih zahtjeva u pogledu frekvencijskih karakteristika. Specifikacija filtra uključuje zahtjeve u pogledu vrste filtra (NP, VP, PO, NO ili SP), graničnih učestanosti propusnih i nepropusnih opsega, slabljenja i valovitosti amplitudne karakteristike, kao i faznih izobličenja. Realizacija digitalnog filtra je pojam koji se odnosi na kreiranje algoritma, često u vidu strukturne šeme, a njegova implementacija može biti hardverska i/ili softverska. U ovom poglavlju ćemo se zadržati na razmatranju metoda projektovanja IIR i FIR digitalnih filtara u vidu LTI diskretnih sistema. Najjednostavniji metod projektovanja IIR filtara se zasniva na raspoređivanju nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj z-ravni. Najčešćće korišteni klasični metodi projektovanja digitalnih IIR filtara koriste davno razvijene metode projektovanja analognih filtara, zasnovane na aproksimacijama amplitudne karakteristike, i dodatno preslikavanje funkcije prenosa analognog filtra u digitalni domen. Za projektovanje digitalnih FIR fitara najčešće se koriste metod množenja prozorskim sekvencama i metod odmjeravanja frekvencijske karakteristike.

14.1 Projektovanje IIR filtara raspoređivanjem nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj z - ravni

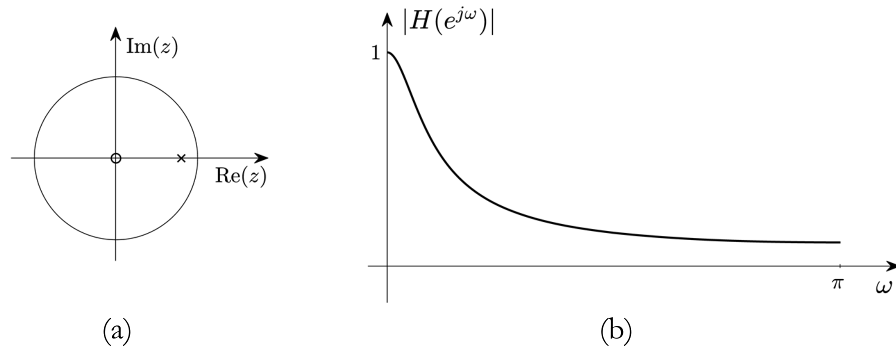
Raspored nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj z-ravni ima direktan uticaj na amplitudnu i faznu karakteristiku LTI sistema. Taj uticaj je to veći što je udaljenost nule ili pola od jedinične kružnice u z-ravni manja. Na frekvencijama koje su bliske polovima funkcije prenosa vrijednosti amplitudne karakteristike su uvećane, dok su na frekvencijama bliskim nulama umanjene. Znajući to, neke jednostavnije oblike amplitudnih karakteristika digitalnih filtara je moguće postići heurističkim pristupom, specificiranjem položaja polova i nula funkcije prenosa u kompleksnoj z-ravni. Pri tome treba voditi računa da se, zbog stabilnosti sistema, polovi moraju nalaziti unutar jediničnog kruga. Nule se mogu postaviti bilo gdje u kompleksnoj *z*-ravni, vodeći računa da će filtri koji imaju nule unutar jediničnog kruga imati manje kašnjenje. Svaka nula i pol moraju da imaju svoj konjugovano-kompleksni par, kako bi impulsni odziv filtra bio realan.

14.1.1 Niskopropusni filtar

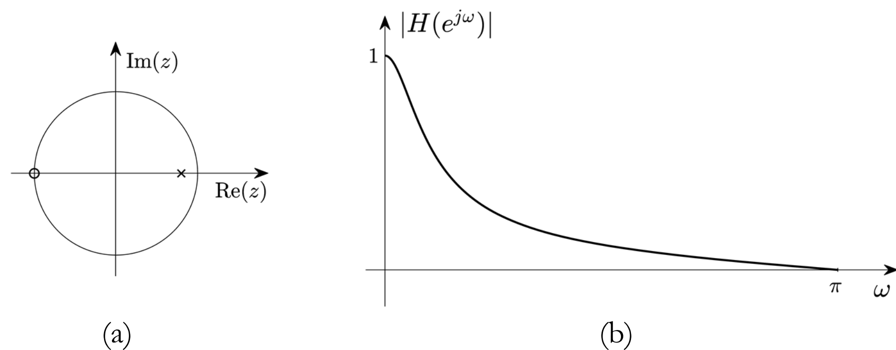
Za niskopropusni filtar, polove $p_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ treba postaviti blizu jedinične kružnice na niskim učestanostima, u okolini učestanosti $\omega = 0$, a nule u blizini ili na jediničnoj kružnici na visokim učestanostima, u okolini ili na učestanosti $\omega = \pi$. Na primjer, NP filtar sa samo jednim polom, $p_1 = re^{j0}$, ima funkciju prenosa:

$$H(z) = \frac{1-r}{1-rz^{-1}}. \tag{14.1}$$

Amplitudna karakteristika ovog filtra, kada je $r = 0{,}8$, prikazana je na Slici 14.1. Prelazni opseg se sužava dodavanjem nule $z_1 = e^{j\pi}$, tako da filtar sa funkcijom prenosa:



Slika 14.1 Niskopropusni filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika niskopropusnog filtra sa jednim polom.



Slika 14.2 Niskopropusni filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika niskopropusnog filtra sa jednim polom i jednom nulom.

$$H(z)=\frac{1-r}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-rz^{-1}}, \tag{14.2}$$

ima strmiju amplitudnu karakteristiku prikazanu na Slici 14.2, za slučaj $r=0{,}8$. Faktor $(1-r)/2$ podešava vrijednost amplitudne karakteristike u nuli na jedinicu.

14.1.2 Visokopropusni filtar

Visokopropusni filtar se dobija direktnim postavljanjem polova $p_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ blizu jedinične kružnice na visokim, a nula $z_k = r_k e^{\pm j\omega_k}$ u blizini ili na jediničnoj kružnici na niskim učestanostima. To se može postići i reflektovanjem dijagrama nula i polova poznate funkcije prenosa NP filtra u kompleksnoj *z*-ravni oko imaginarne ose. Na taj način se vrši transformacija funkcije prenosa NP filtra u funkciju prenosa VP filtra. Na primjer, NP filtar sa jednim polom, $p_1 = re^{j0}$, i jednom nulom, $z_1 = e^{j\pi}$, sa funkcijom prenosa datom sa (14.2), na taj način transformišemo u funkciju prenosa VP filtra:

$$H(z) = \frac{1-r}{2}\frac{1-z^{-1}}{1+rz^{-1}}. \tag{14.3}$$

Raspored nula i polova i amplitudna karakteristika VP filtra dati su na Slici 14.3.

Drugi način transformacije funkcije prenosa NP u funkciju prenosa VP filtra se zasniva na translaciji frekvencijske karakteristike NP filtra, $H_{NP}\left(e^{j\omega}\right)$, za π, tako da se je frekvencijska karakteristika VP filtra data sa:

$$H_{VP}\left(e^{j\omega}\right) = H_{NP}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right). \tag{14.4}$$

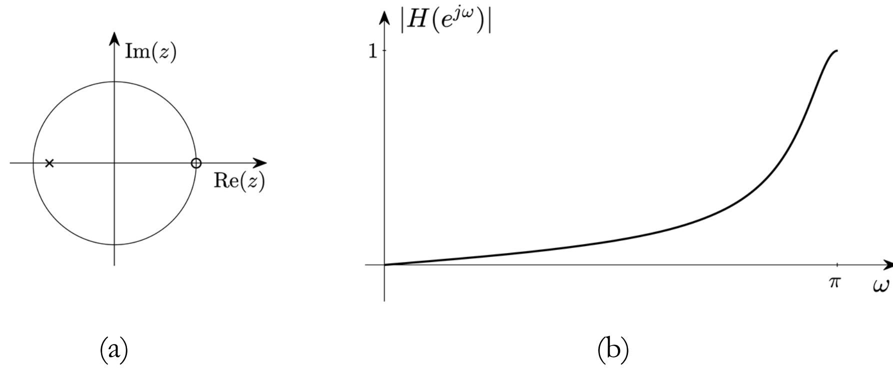
To odgovara množenju impulsnog odziva NP filtra, $h_{NP}(n)$, sa $e^{-j\pi n}$, te je impulsni odziv VP filtra dat sa:

$$h_{VP}(n) = e^{-j\pi n} h_{NP}(n) = (-1)^n h_{NP}(n). \tag{14.5}$$

Ako je NP filtar opisan jednačinom diferencija:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k), \tag{14.6}$$

nakon translacije frekvencijske karakteristike NP filtra za π dobijamo da je:



Slika 14.3 Visokopropusni filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika visokopropusnog filtra sa jednim polom i jednom nulom.

$$H_{VP}\left(e^{j\omega}\right)=H_{NP}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk(\omega-\pi)}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk(\omega-\pi)}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k e^{-jk\omega}}{1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k e^{-jk\omega}}, \tag{14.7}$$

pa vraćanjem u vremenski domen dobijamo jednačinu diferencija VP filtra:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k y(n-k). \tag{14.8}$$

Na primjer, iz jednačine diferencija $y(n)=(1-r)x(n)+ry(n-1)$, koja opisuje NP filtar sa jednim polom u nuli ($p_1=re^{j0}$), lako dobijamo jednačinu diferencija VP filtra: $y(n)=(1-r)x(n)-ry(n-1)$. Funkcija prenosa tako dobijenog VP filtra je data sa:

$$H(z)=\frac{1-r}{1+rz^{-1}}. \tag{14.9}$$

14.1.3 Diskretni rezonator

Formiramo li funkciju prenosa digitalnog filtra postavljanjem dva pola $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ u blizini jedinične kružnice ($r \approx 1,\ r < 1$), u frekvencijskom opsegu koji želimo da istaknemo, kao na Slici 14.4(a), dobićemo:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - re^{j\omega_0} z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \qquad (14.10)$$

a amplitudna karakteristika filtra će biti jednaka:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos(\omega + \omega_0) + r^2}\sqrt{1 - 2r\cos(\omega - \omega_0) + r^2}}. \qquad (14.11)$$

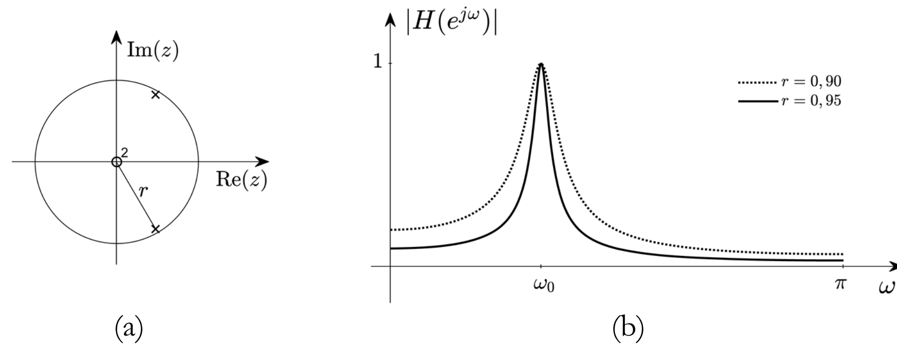
Amplitudna karakteristika ima izrazito velike vrijednosti u neposrednoj okolini frekvencije pola, a njena vrijednost na frekvenciji pola iznosi:

$$\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| = \frac{1}{(1-r)\sqrt{1 - 2r\cos 2\omega_0 + r^2}}. \qquad (14.12)$$

Amplitudne karakteristike diskretnih rezonatora, sa $r = 0{,}95$ i $r = 0{,}90$, uz $\omega_0 = \pi/3$, normalizovane sa $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$, prikazane su na Slici 14.4(b).

Pokazaćemo da je amplitudna karakteristika strmija, tj. ima uži propusni opseg, što su polovi bliže jediničnoj kružnici. Ako propusni opseg $\Delta\omega$ definišemo kao razliku učestanosti $\omega_0 + \Delta\omega/2$ i $\omega_0 - \Delta\omega/2$, na kojima amplitudna karakteristika opadne na $1/\sqrt{2}$ svoje maksimalne vrijednosti, možemo uspostaviti zavisnost $\Delta\omega$ od r:

$$\frac{\left|H\left(e^{j(\omega_0 - \Delta\omega/2)}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|} = \frac{\left|(1-r)\left(1 - re^{-j2\omega_0}\right)\right|}{\left|\left(1 - re^{j\frac{\Delta\omega}{2}}\right)\left(1 - re^{-j2\omega_0}e^{j\frac{\Delta\omega}{2}}\right)\right|}\Bigg|_{\Delta\omega\approx 0} \approx \frac{|(1-r)|}{\left|\left(1 - re^{j\frac{\Delta\omega}{2}}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (14.13)$$



Slika 14.4 Diskretni rezonator: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika.

Kvadriranjem krajnje desne relacije u (14.13) dobijamo:

$$\frac{(1-r)^2}{1-2r\cos\dfrac{\Delta\omega}{2}+r^2}=\frac{1}{2}, \qquad (14.14)$$

što se svodi na:

$$(1-r)^2 = 4r\sin^2\frac{\Delta\omega}{4}. \qquad (14.15)$$

Ako je $r \approx 1$ i $\Delta\omega$ malo tako da je $\sin\frac{\Delta\omega}{4} \approx \frac{\Delta\omega}{4}$, dolazimo do relacije:

$$\Delta\omega = 2(1-r), \qquad (14.16)$$

iz koje jasno vidimo da se propusni opseg smanjuje pri porastu r, odnosno sa približavanjem polova jediničnoj kružnici.

Ovaj filtar ima samo jedan par konjugovano-kompleksnih polova. Kompleksna učestanost pola $re^{j\omega_0}$ je sopstvena učestanost filtra. Ako se filtar pobudi prostoperiodičnim signalom učestanosti ω_0 doći će do prave rezonancije. Filtar će izdvojiti frekvencijske komponente signala čija je

učestanost bliska rezonantnoj učestanosti ω_0, a što se učestanost neke frekvencijske komponente ulaznog signala više razlikuje od učestanosti ω_0, to će njena amplituda na izlazu filtra biti manja. Stoga se ovaj filtar naziva *diskretni rezonator*. Njegov impulsni odziv:

$$h(n) = \frac{1}{\sin \omega_0} r^n \sin\big((n+1)\omega_0\big) u(n), \tag{14.17}$$

je pseudoperiodičan. Za $r \neq 1$ impulsni odziv eksponencijalno opada tokom vremena. Brzina opadanja impulsnog odziva se smanjuje sa porastom r.

U graničnom slučaju, kada je $r = 1$, tj. kada se polovi nalaze na jediničnoj kružnici, vrijednost amplitudne karakteristike na rezonantnoj učestanosti (frekvenciji pola) postaje beskonačno velika, a propusni opseg beskonačno mali. Tada impulsni odziv poprima oblik:

$$h(n) = \frac{1}{\sin \omega_0} \sin\big((n+1)\omega_0\big) u(n), \tag{14.18}$$

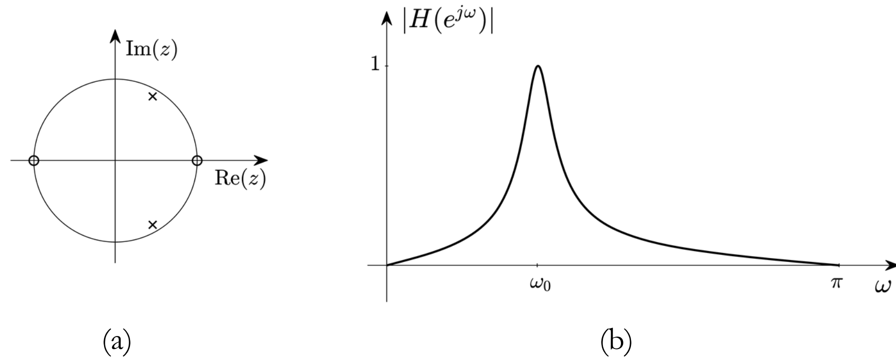
pa se ovaj granični slučaj diskretnog rezonatora naziva *sinusni oscilator*. Frekvencijska karakteristika sinusnog oscilatora je data sa:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - e^{j\omega_0} z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - 2\cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}. \tag{14.19}$$

Sinusni oscilator je sistem na granici stabilnosti i njegova namjena nije filtriranje, već se koristi za generisanje signala. Jednom pobuđen, sinusni oscilator nastavlja da generiše sinusni signal. Dovoljno je pobuditi sinusni oscilator bez akumulisane energije sa $\delta(n)$ i na njegovom izlazu će biti generisani odmjerci kauzalne sinusoide. Posmatrajući jednačinu diferencija koja opisuje sinusni oscilator:

$$y(n) - 2\cos \omega_0 y(n-1) + y(n-2) = x(n), \tag{14.20}$$

koristeći *z*-transformaciju, lako se pokaže da se isti efekat postiže ako je pobuda jednaka nuli, a početni uslovi $y(-1) = 0$ i $y(-2) = -1$.



(a) (b)

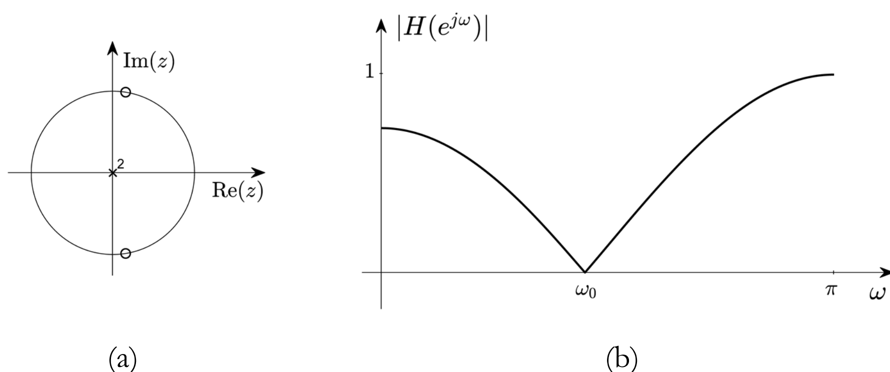
Slika 14.5 Filtar propusnik opsega: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika.

14.1.4 Filtar propusnik opsega

Dodajući u funkciju prenosa diskretnog rezonatora dvije nule na učestanostima $\omega = 0$ i $\omega = \pi$, kao na Slici 14.5(a), dobijamo funkciju prenosa standardnog propusnika opsega:

$$H(z) = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)}{\left(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - re^{j\omega_0} z^{-1}\right)}. \tag{14.21}$$

Osnovna razlika filtra propusnika opsega u odnosu na diskretni rezonator se ogleda u tome da filtar propusnik opsega dopušta širi propusni opseg. Širina propusnog opsega se podešava izborom parametra *r*. Što je pol bliže jediničnoj kružnici, tj. što je *r* veće, to će propusni opseg biti uži. Uz to, filtar propusnik opsega ima mnogo veće slabljenje u području niskih i visokih učestanosti nego diskretni rezonator. Slabljenja jednosmjerne komponente i komponente signala učestanosti $\omega = \pi$ su beskonačno velika. Primjer amplitudne karakteristike filtra propusnika opsega, za $r = 0{,}91$ i $\omega_0 = \pi/3$, prikazan je na Slici 14.5(b).



(a) (b)

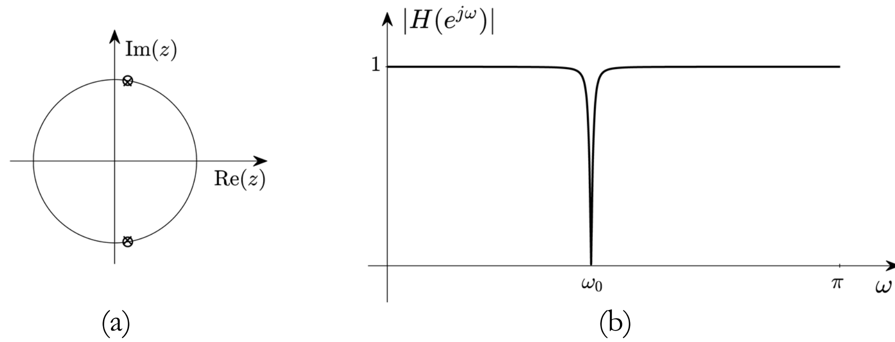
Slika 14.6 Filtar nepropusnik opsega: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika.

14.1.5 Filtar nepropusnik opsega

Postavljanjem nula funkcije prenosa na jediničnu kružnicu, tako da je $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$, kao na Slici 14.6(a), postiže se potpuno potiskivanje signala učestanosti ω_0. Pri tome su značajno potisnute i frekvencijske komponente signala čije se učestanosti nalaze u okolini učestanosti ω_0. Tako dobijeni filtar se ponaša kao filtar nepropusnik opsega. Njegova funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z) = \left(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - e^{j\omega_0} z^{-1}\right) = 1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}. \qquad (14.22)$$

Amplitudna karakteristika filtra nepropusnika opsega, za $\omega_0 = 0,45\pi$, prikazana je na Slici 14.6(b). Osnovni nedostatak ovako projektovanog filtra su široki prelazni opsezi, što znači loše razdvajanje frekvencijskih komponenti iz propusnih i nepropusnog opsega. Nepropusni opseg je nesimetričan, osim u slučaju kad je $\omega_0 = \pi/2$.



Slika 14.7 Noč filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika.

14.1.6 Noč filtar

Ako su, kao kod filtra nepropusnika opsega, nule $z_{1,2}$ funkcije prenosa postavljene na jediničnoj kružnici na učestanosti $\pm\omega_0$, tako da je $z_{1,2}=e^{\pm j\omega_0}$, propusni opseg možemo dodatno suziti dodavanjem polova u neposrednu okolinu nula funkcije prenosa, tako da je $p_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}$, $r\approx 1\,(r<1)$, kao na Slici 14.7(a). Ovako postavljeni polovi jako poništavaju uticaj nula funkcije prenosa na amplitudnu karakteristiku na svim učestanostima, osim u neposrednoj blizini učestanosti $\pm\omega_0$, jer se može smatrati da su udaljenosti bilo koje učestanosti ω do nule i njoj bliskog pola približno jednake (vidjeti geometrijsku interpretaciju na Slici 13.2). Stoga zaključujemo da je amplitudna karakteristika približno jednaka jedinici svuda osim za učestanosti koje se nalaze u neposrednoj blizini nula $z_{1,2}=e^{\pm j\omega_0}$ funkcije prenosa. Što su polovi bliže jediničnoj kružnici, to je nepropusni opseg uži. Filtar nepropusnik opsega sa veoma uskim nepropusnim opsegom naziva se *noč* (eng. *notch*) *filtar*. Funkcija prenosa noč filtra je data sa:

$$H(z)=\frac{\left(1-e^{-j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1+e^{-j\omega_0}z^{-1}\right)}{\left(1-re^{-j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-j\omega_0}z^{-1}\right)}=\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}, \qquad (14.23)$$

a njegova amplitudna karakteristika uz $r = 0,98$ i $\omega_0 = 0,45\pi$, normalizovana njenom vrijednošću u nuli, je prikazana na Slici 14.7(b). Noč filtar primjenjujemo kada želimo iz signala ukloniti frekvencijsku komponentu jedne konkretne učestanosti ω_0. Tipičan primjer je uklanjanje signala interferencije naizmjeničnog napona od 50 Hz, koji se kao smetnja često pojavljuje pri snimanju signala.

14.1.7 Češljasti filtar

Ako period frekvencijske karakteristike digitalnog filtra smanjimo sa 2π na $2\pi/K$ ($K > 1$), dobićemo frekvencijsku karakteristiku češljastog oblika, u kojoj se smjenjuju propusni i nepropusni opsezi. Stoga svaki filtar čija je frekvencijska karakteristika periodična sa periodom $2\pi/K$, $K > 1$, nazivamo *češljasti* ili *komb* (eng. *comb*) *filtar*. Smanjivanje perioda frekvencijske karakteristike postižemo jednostavnom smjenom $\omega \to K\omega$ u frekvencijskoj karakteristici filtra prototipa, čiji je impulsni odziv $h(n)$, te tako dobijamo frekvencijsku karakteristiku češljastog filtra:

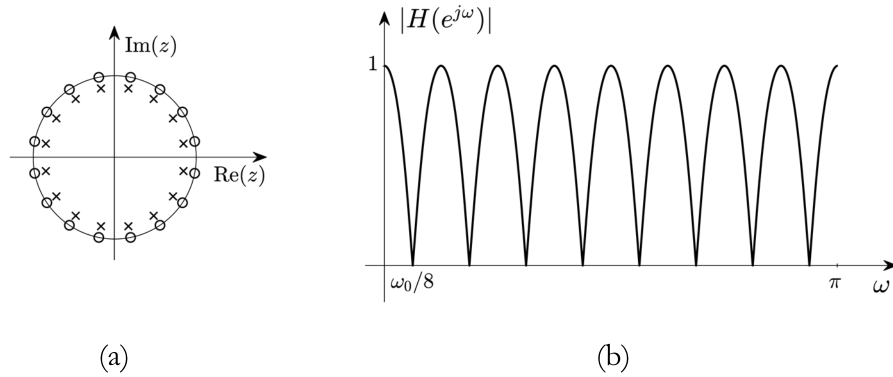
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega nK} , \tag{14.24}$$

dok funkciju prenosa češljastog filtra:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-nK} , \tag{14.25}$$

dobijamo smjenom $z \to z^K$ u funkciji prenosa filtra prototipa.

Raspored nula i polova u kompleksnoj *z*-ravni se replicira $K-1$ puta, rotacijom nula i polova filtra prototipa oko ishodišta za uglove $n\dfrac{2\pi}{K}$, $n = 1, 2, \cdots, K-1$. Zbog smjene $z \to z^K$ u funkciji prenosa, u jednačini diferencija, a samim tim i u strukturama za realizaciju filtra, će svako kašnjenje biti zamijenjeno K puta većim kašnjenjem. Na Slici 14.8 prikazan je raspored nula i polova, kao i amplitudna



Slika 14.8 Češljasti filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika.

karakteristika češljastog filtra, čiji je prototip noč filtar sa $r = 0{,}3$ i $\omega_0 = \pi/2$, a period frekvencijske karakteristike je smanjen osam puta, $K = 8$. Specifičan izgled frekvencijske karakteristike češljastog filtra omogućava uklanjanje ili izdvajanje harmonijski vezanih frekvencijskih komponenti signala.

Osim za uklanjanje šuma u kom se javljaju harmonijski vezane frekvencijske komponente, češljasti filtri se koriste za audio efekte, a primjenu nalaze i u sistemima za promjenu učestanosti odmjeravanja, za sprečavanje preklapanja spektra prilikom decimacije i interpolacije signala.

14.1.8 Svepropusni filtar

Amplitudna karakteristika svepropusnog filtra ima konstantnu vrijednost na svim učestanostima. Posmatrajući geometrijsku interpretaciju određivanja amplitudne karakteristike (Slika 13.2), jasno je da se u funkciji prenosa moraju nalaziti upareni polovi i nule, tako da je njihova udaljenost od svake tačke na jediničnoj kružnici podjednaka. To je ispunjeno ako za svaki pol $p_k = r_k e^{j\omega_k}$ postoji odgovarajuća nula $z_k = (1/r_k)e^{j\omega_k}$. Budući da se, zbog stabilnosti, polovi

digitalnog filtra moraju nalaziti unutar jediničnog kruga, nule će biti locirane van jediničnog kruga.

Svepropusni filtar *n*-tog reda se može posmatrati kao kaskadna veza sekcija prvog reda, čije funkcije prenosa imaju oblik:

$$H(z)=\frac{z^{-1}-re^{-j\omega_0}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}. \tag{14.26}$$

Amplitudna karakteristika sekcije prvog reda je jednaka jedinici za svaku učestanost:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\omega_0}}{1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega}}\right|=\left|e^{-j\omega}\frac{1-re^{j(\omega-\omega_0)}}{1-re^{-j(\omega-\omega_0)}}\right|=1. \tag{14.27}$$

Fazna karakteristika sekcije prvog reda:

$$\varphi(\omega)=-\omega-2\arctan\frac{r\sin(\omega-\omega_0)}{1-r\cos(\omega-\omega_0)}, \tag{14.28}$$

je izrazito nelinearna u okolini učestnosti ω_0, dok je grupno kašnjenje, dato sa:

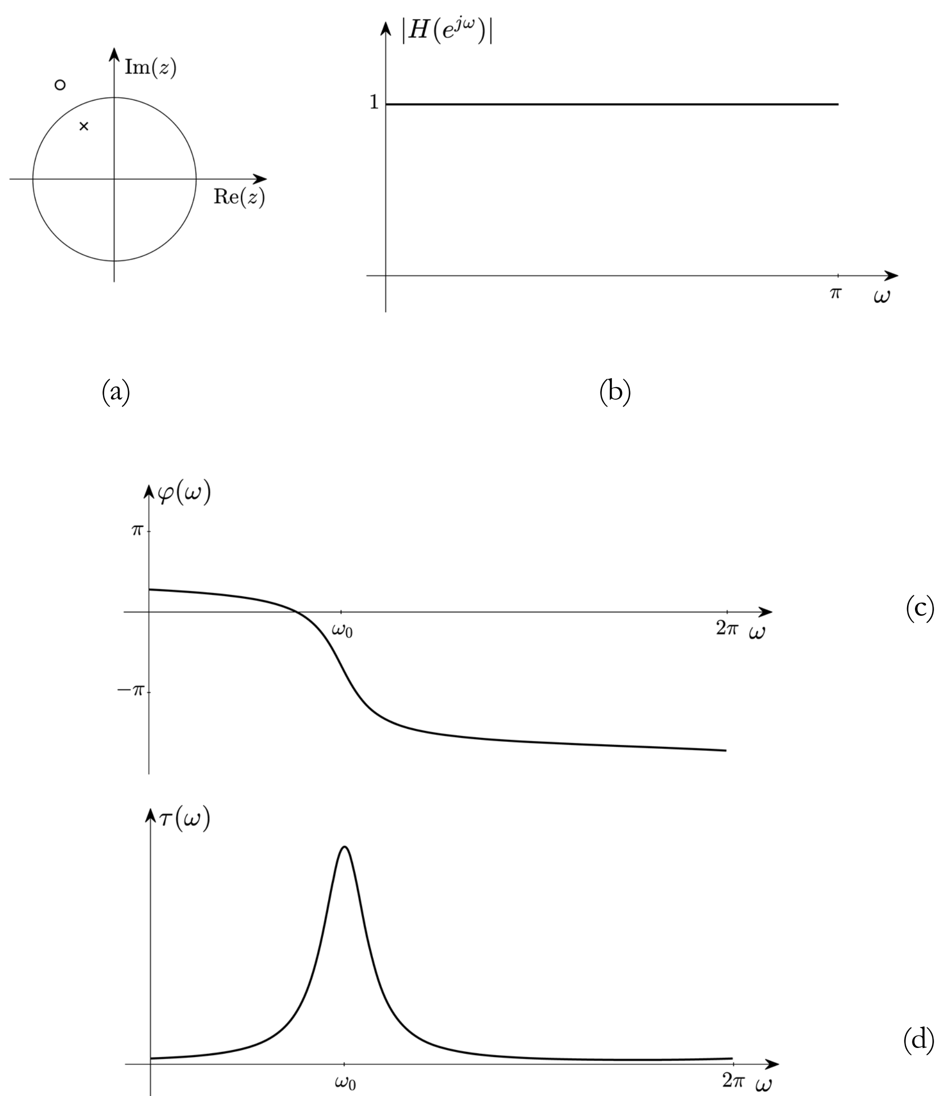
$$\tau(\omega)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\omega_0)+r^2}, \tag{14.29}$$

pozitivno na svim učestanostima. Maksimum grupnog kašnjenja nastupa na učestanosti ω_0 i ima vrijednost $(1+r)/(1-r)$. Maksimum kašnjenja je izraženiji što su upareni polovi i nule bliže jediničnoj kružnici. Raspored nula i polova u kompleksnoj *z*-ravni, amplitudna i fazna karakteristika, te grupno kašnjenje svepropusnog filtra, za slučaj $r=0,75$ i $\omega_0=2\pi/3$, dati su na Slici 14.9.

Funkcija prenosa svepropusnog filtra n -tog reda može da sadrži kako realne, tako i konjugovano-kompleksne parove nula i polova, pa je njen opšti oblik:

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_r}\frac{z^{-1}-r_k}{1-r_kz^{-1}}\prod_{k=N_r+1}^{N}\left(\frac{z^{-1}-r_ke^{-j\omega_k}}{1-r_ke^{j\omega_k}z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}-r_ke^{j\omega_k}}{1-r_ke^{-j\omega_k}z^{-1}}\right), \tag{14.30}$$

gdje je N ukupan broj uparenih nula i polova od kojih je N_r realnih. Nakon



Slika 14.9 Svepropusni filtar: (a) raspored nula i polova i (b) amplitudna karakteristika; (c) odmotana fazna karakteristika i (d) grupno kašnjenje.

množenja faktora funkcije prenosa, pokazuje se da polinomi u brojniku i nazivniku imaju koeficijente koji se pojavljuju u obrnutom redoslijedu:

$$H(z)=\frac{a_N+a_{N-1}z^{-1}+\cdots+a_2z^{-N+2}+a_1z^{-N+1}+z^{-N}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}=z^{-N}\frac{D(z)}{D(z^{-1})}, \qquad (14.31)$$

što predstavlja karakterističnu osobinu funkcija prenosa svepropusnog filtara.

Filtri svepropusnici se koriste u kaskadnoj vezi sa drugim filtrima, čiji je zadatak postizanje željene amplitudne karakteristike. Fazna karakteristika kaskadne veze jednaka je zbiru fazne karakteristike filtra kojim se postiže željena amplitudna karakteristika i fazne karakteristike svepropusnog filtra. Pogodnim odabirom položaja nula i polova svepropusnog filtra moguće je postići da fazna karakteristika kaskadne veze ispunjava postavljene zahtjeve, a da se pri tome ne narušava postignuta amplitudna karakteristika.

14.2 Projektovanje IIR filtara preslikavanjem funkcije prenosa analognog filtra u digitalni domen

Prilikom razmatranja frekvencijskih karakteristika idealnih filtara, zaključili smo da idealne filtre nije moguće realizovati sa konačnim brojem računskih operacija, pa stoga vršimo aproksimacije njihovih amplitudnih i faznih karakteristika. Postupkom projektovanja digitalnih filtara, koji se zasniva na raspoređivanju nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj *z*–ravni, uobličavamo amplitudnu i faznu karakteristiku u okolini polova i nula funkcije prenosa, ali nemamo kontrolu nad izgledom frekvencijske karakteristike na svim učestanostima. Metode projektovanja frekvencijski selektivnih IIR filtara zasnovane na aproksimaciji amplitudne karakteristike omogućavaju nam bolju kontrolu amplitudne karakteristike i postizanje postavljenih zahtjeva u pogledu slabljenja u propusnim i nepropusnim opsezima, te širine prelaznih opsega.

Nakon pronalaženja funkcije prenosa koja ispunjava zahtjeve u pogledu željene amplitudne karakteristike, ukoliko postoji praktična potreba, fazna karakteristika se koriguje svepropusnim filtrom.

Istorijski gledano, prvo su razvijeni metodi aproksimacije amplitudnih karakteristika analognih filtara. Tehnike za projektovanje digitalnih filtara, o kojima ćemo govoriti u ovom poglavlju, proističu iz formalne sličnosti funkcija prenosa kontinualnih i diskretnih sistema.

Ako u funkciji prenosa IIR digitalnog filtra:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}, \tag{14.32}$$

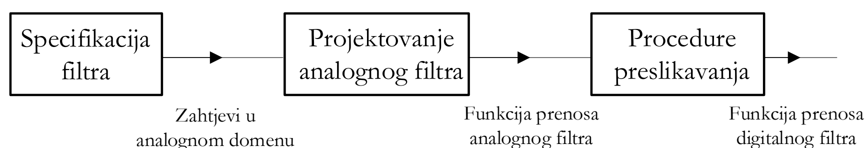
zamijenimo z sa nekom realnom racionalnom funkcijom od s, ona poprima oblik funkcije prenosa analognog filtra:

$$\hat{H}(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k s^{k}}{1+\sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k s^{k}}. \tag{14.33}$$

Vrijedi i obrnuto: ako u funkciji prenosa analognog filtra, datoj sa (14.33), s zamijenimo sa realnom racionalnom funkcijom od z, dobićemo funkciju prenosa digitalnog filtra. Prateći ovu ideju, razvijene su tehnike preslikavanja funkcije prenosa analognog filtra u funkciju prenosa digitalnog filtra, pri čemu se nastoje očuvati oblik frekvencijske karakteristike i stabilnost filtra.

Procedura projektovanja digitalnih filtara koja koristi navedene tehnike preslikavanja uključuje dva koraka:

1. projektovanje analognog filtra, sa ciljem dobijanja funkcije prenosa $\hat{H}(s)$ koja ispunjava zadate specifikacije,
2. preslikavanje funkcije prenosa analognog filtra, $\hat{H}(s)$, u odgovarajuću funkciju prenosa digitalnog filtra, $H(z)$, uz očuvanje frekvencijske karakteristike i stabilnosti filtra.



Slika 14.10 Procedura projektovanja digitalnih IIR filtara preslikavanjem funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra.

Ukoliko su specifikacije filtra zadate u digitalnom domenu neophodno ih je, prije svega, prevesti u kontinualni domen. Osnovni koraci projektovanja digitalnih filtara, koje se zasniva na preslikavanju funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra, prikazani su blok šemom na Slici 14.10.

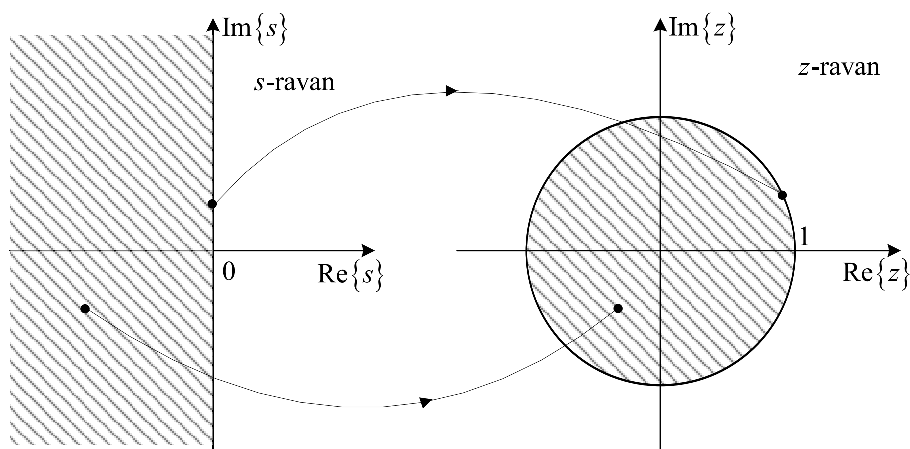
Preslikavanje se vrši smjenom $s = f(z)$. Kako bismo bili sigurni da prilikom preslikavanja digitalni filtar zadržava bitne osobine koje ima analogni filtar, projektovan na osnovu postavljenih zahtjeva, procedura preslikavanja treba da zadovolji sljedeća dva uslova:

1. imaginarna osa iz *s*-ravni treba da se preslika u jediničnu kružnicu u z-ravni:
$$\{s = j\Omega, -\infty < \Omega < \infty\} \to \{z = e^{j\omega}, -\pi < \omega \le \pi\}, \tag{14.34}$$

2. lijeva poluravan *s*-ravni treba da se preslika u unutrašnjost jediničnog kruga u *z*-ravni:
$$\{s | \mathrm{Re}[s] < 0\} \to \{z | \; |z| < 1\}. \tag{14.35}$$

Ispunjenje prvog uslova je neophodno radi očuvanja oblika frekvencijske karakteristike filtra, dok drugi uslov osigurava stabilnost digitalnog filtra, ukoliko je analogni filtar stabilan. Preslikavanje iz analognog u digitalni domen ilustrovano je na Slici 14.11.

U ovoj knjizi se nećemo baviti detaljima projektovanja analognih filtara, pa s tim u vezi i zaobići neka matematička izvođenja, jer je, sa stanovišta preslikavanja funkcije prenosa analognog filtra u funkciju prenosa digitalnog filtra, dovoljno poznavati njihove funkcije prenosa i frekvencijske karakteristike. Zadržaćemo se

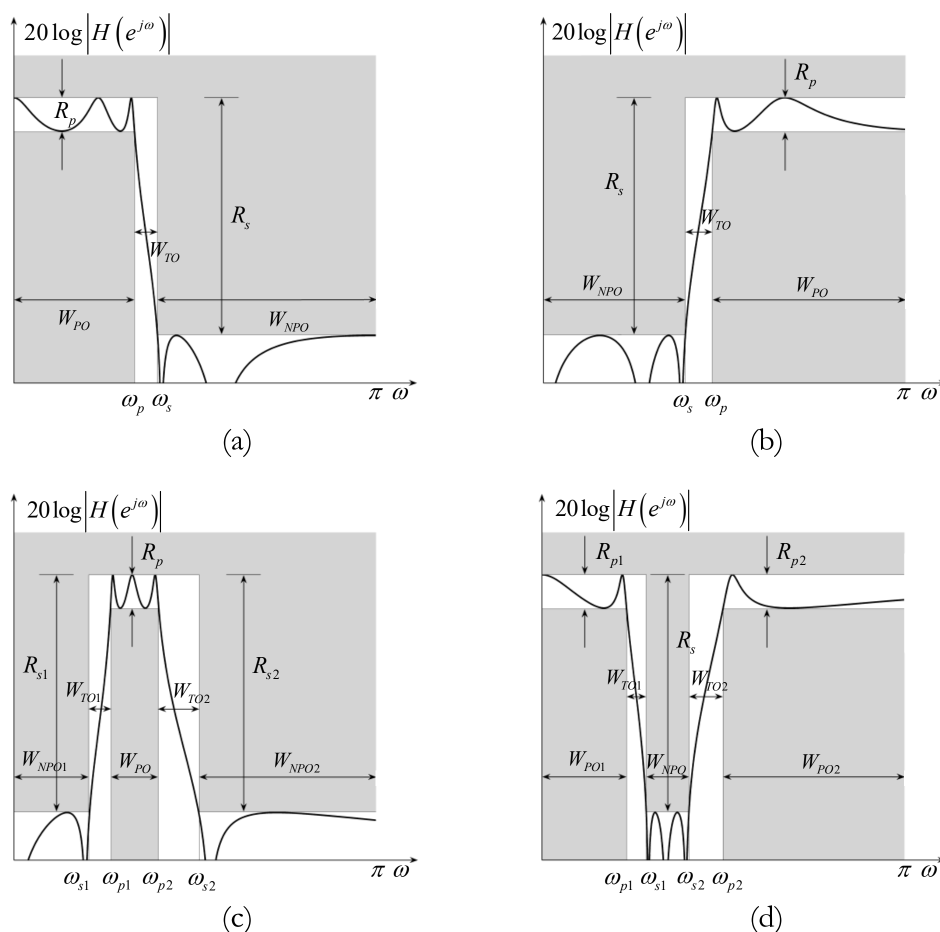


Slika 14.11 Preslikavanje iz analognog u digitalni domen.

na preslikavanju tzv. analognog prototipa, niskopropusnog filtra kod koga je izvršena normalizacija učestanosti, dijeljenjem Ω sa Ω_0, gdje je Ω_0 granična učestanost propusnog opsega analognog filtra. Zatim ćemo pokazati kako se, frekvencijskim transformacijama, dobiju ostali tipovi filtara.

14.2.1 Specifikacija amplitudne i fazne karakteristike

Specifikacija amplitudne karakteristike digitalnog filtara sadrži informacije o graničnim frekvencijama propusnih i nepropusnih opsega, maksimalno dozvoljenim slabljenjima u propusnim opsezima i minimalno potrebnim slabljenjima u nepropusnim opsezima. Način zadavanja specifikacija frekvencijski selektivnih digitalnih filtara u digitalnom domenu prikazan je na Slici 14.12. Sa W_{PO}, W_{NPO} i W_{TO} su označeni propusni, nepropusni i prelazni opsezi, respektivno. Kružne učestanosti ω_p, ω_{p1} i ω_{p2} su granične učestanosti propusnih, a ω_s, ω_{s1} i ω_{s2} nepropusnih opsega. Maksimalno dozvoljena slabljenja u propusnim opsezima su označena sa R_p, R_{p1} i R_{p2}, dok su R_s, R_{s1}



Slika 14.12 Specifikacije amplitudnih karakteristika digitalnih filtara: (a) NP filtar; (b) VP filtar; (c) filtar PO i (d) filtar NO.

i R_{s2} minimalno potrebna slabljenja u nepropusnim opsezima. U aplikacijama gdje je potrebno postići zadata kašnjenja, važan je i oblik fazne karakteristike, pa se osim zahtjeva za amplitudnu karakteristiku, specificira i željena fazna karakteristika, odnosno željeno grupno kašnjenje. Umjesto u digitalnom, specifikacije je moguće zadati i u analognom domenu. U toku projektovanja, koristeći relaciju koja povezuje digitalnu i kontinualnu učestanost, specifikacije se, ako je potrebno, prevode iz digitalnog u analogni domen i obrnuto. Umjesto slabljenja se mogu zadati dozvoljene valovitosti amplitudne karakteristike u

propusnom i nepropusnom opsegu, ε^2 i δ^2, respektivno, koje su sa maksimalno dozvoljenim slabljenjem u propusnom i minimalno potrebnim slabljenjem u nepropusnom opsegu vezane sljedećim relacijama:

$$R_p = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow R_p = 10\log\left(1+\varepsilon^2\right) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0.1R_p} - 1, \qquad (14.36)$$

$$R_s = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \Rightarrow R_s = 10\log\left(1+\delta^2\right) \Rightarrow \delta^2 = 10^{0.1R_s} - 1. \qquad (14.37)$$

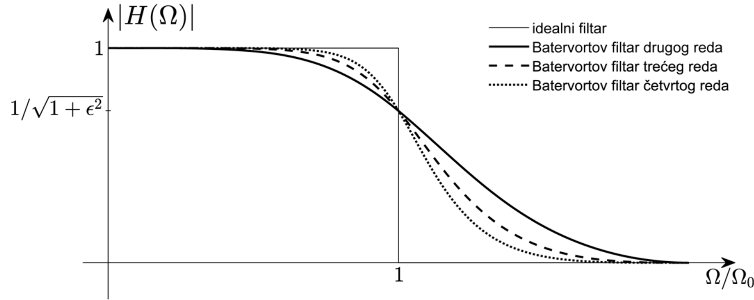
14.2.2 Analogni prototip

Najčešće korišteni metodi aproksimacije amplitudnih karakteristika analognih filtara su Batervortov (Stephen Butterworth), Čebiševljev (Пафну́тий Льво́вич Чебышёв) i Kauerov (Wilhelm Cauer) metod. Shodno tome, filtri čije projektovanje uključuje navedene metode aproksimacije nazivaju se Batervortovi, Čebiševljevi i Kauerovi, poznati i pod nazivom eliptički, filtri. Razmotrićemo sada analogne prototipove ovih filtara, a zatim dati metode preslikavanja u digitalni domen.

14.2.2.1 Batervortovi filtri

Batervortov filtar se projektuje tako da u propusnom opsegu ima maksimalno ravnu amplitudnu karakteristiku $\left|H(\Omega)\right|$. To znači da su sve derivacije greške transmisije, koja se definiše sa $\Delta(\Omega) = 1 - \left|H(\Omega)\right|^2$, u nuli jednake nuli. Amplitudna karakteristika monotono opada sa porastom učestanosti, sa $20n$ dB/dekadi, gdje je n red filtra. Kvadrat amplitudne karakteristike analognog prototipa koji zadovoljava dati uslov ima oblik (koji navodimo bez dokaza):

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{\left|N(\Omega/\Omega_0)\right|^2}{\left|N(\Omega/\Omega_0)\right|^2 + a_n(\Omega/\Omega_0)^{2n}}. \qquad (14.38)$$



Slika 14.13 Amplitudne karakteristike Batervortovih filtara.

Na Slici 14.13 su prikazane amplitudne karakteristike Batervortovih filtara bez konačnih nula transmisije drugog, trećeg i četvrtog reda. Što je veći red filtra, amplitudna karakteristika je strmija i bolje je razdvajanje propusnog od nepropusnog opsega.

Parametar a_n se određuje na osnovu maksimalnog dozvoljenog slabljenja u propusnom opsegu. Na osnovu specifikacije filtra je:

$$\left|H(\Omega_0)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}, \tag{14.39}$$

pa poređenjem sa (14.38) zaključujemo da je:

$$\varepsilon^2 = \frac{a_n}{\left|N(\Omega_0)\right|^2} = 10^{0.1R_p} - 1, \tag{14.40}$$

što nam omogućava da odredimo a_n na osnovu zadate vrijednosti za R_p.

Najčešće se koristi Batervortov filtar bez konačnih nula transmisije, kod koga je $N(s)=1$, pa kvadrat amplitudne karakteristike ovog filtra ima oblik:

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\Omega/\Omega_0\right)^{2n}}. \tag{14.41}$$

Red filtra n se bira u zavisnosti od toga kojom brzinom treba da raste slabljenje na visokim frekvencijama. U slučaju filtra bez konačnih nula transmisije red filtra se određuje na osnovu sljedeće nejednakosti:

$$n \geq \frac{\log\left[\varepsilon^{-2}\left(10^{0.1R_s}-1\right)\right]}{2\log\left(\Omega_s/\Omega_0\right)}, \tag{14.42}$$

gdje je Ω_s/Ω_0 normalizovana granična učestanost nepropusnog opsega analognog prototipa.

Polovi funkcije prenosa, s_k, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, su ravnomjerno raspoređeni na kružnici:

$$s_k = \varepsilon^{-\frac{1}{n}} e^{j\frac{2k+n+1}{2n}\pi}, \quad k=0,1,2,\cdots,n-1, \tag{14.43}$$

pa se funkcija prenosa Batervortovog filtra bez konačnih nula transmisije u faktorizovanom obliku može zapisati kao:

$$H(s) = H_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s-s_k}, \tag{14.44}$$

gdje je H_0 normalizujuća konstanta koja osigurava da je $H(0)=1$. U razvijenom obliku, funkcija prenosa Batervortovog filtra bez konačnih nula transmisije ima oblik:

$$H(s) = \frac{1}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1}. \tag{14.45}$$

14.2.2.2 Čebiševljevi filtri

Bolja aproksimacija amplitudne karakteristike se postiže ako se olabavi uslov maksimalne ravnosti i dopuste jednolike oscilacije oko amplitudne karakteristike idealnog filtra u propusnom, ili nepropusnom, opsegu. Filtri sa jednolikim oscilacijama u propusnom i monotono opadajućom amplitudnom karakteristikom u nepropusnom opsegu se nazivaju Čebiševljevi filtri, dok se filtri sa jednolikim oscilacijama u nepropusnom i monotono opadajućom karakteristikom u propusnom opsegu nazivaju inverzni Čebiševljevi filtri.

Čebiševljevi filtri sa oscilacijama u propusnom opsegu

Kod Čebiševljevih filtara se za aproksimaciju amplitudne karakteristike u propusnom opsegu koriste Čebiševljevi polinomi:

$$C_n(\Omega) = \cos\left(n \cos^{-1} \Omega\right), \quad |\Omega| \leq 1, \tag{14.46}$$

tako da funkcija prenosa analognog prototipa sa jednolikim oscilacijama u propusnom opsegu ima oblik (koji navodimo bez dokaza):

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega/\Omega_0)}, \tag{14.47}$$

gdje je n red filtra. U nepropusnom opsegu, za $|\Omega/\Omega_0| > 1$, gdje $\cos^{-1}(\Omega/\Omega_0)$ nije definisano, za $C_n(\Omega)$ se uzima hiperbolna kosinusna funkcija realnog ugla:

$$C_n(\Omega) = \mathrm{ch}(n \,\mathrm{arch}\, \Omega) = \frac{1}{2}\left[\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 + 1}\right)^n + \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}\right)^{-n}\right], \tag{14.48}$$

te stoga funkcija prenosa Čebiševljevog filtra nema konačnih nula transmisije.

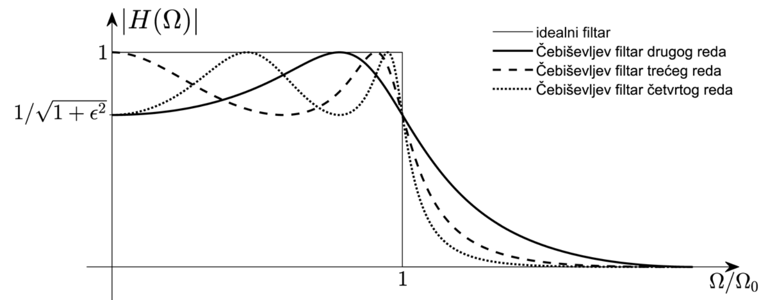
Na Slici 14.14 su prikazane amplitudne karakteristike normalizovanih Čebiševljevih filtara sa oscilacijama u propusnom opsegu drugog, trećeg i četvrtog reda.

Funkcija prenosa Čebiševljevog filtra ima oblik:

$$H(s) = \frac{1}{2^{n-1}\varepsilon \prod_{k=1}^{n}(s - s_k)} = \frac{1/\left(2^{n-1}\varepsilon\right)}{s^n + b_n s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}. \tag{14.49}$$

Parametar ε je određen maksimalnim dozvoljenim slabljenjem u propusnom opsegu, $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1R_p} - 1}$, a red filtra treba da zadovolji sljedeću nejednakost:

$$n \geq \frac{\mathrm{ch}^{-1}\sqrt{\left(10^{0.1R_p} - 1\right)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_0)}. \tag{14.50}$$



Slika 14.14 Amplitudne karakteristike Čebiševljevih filtara sa oscilacijama u propusnom opsegu.

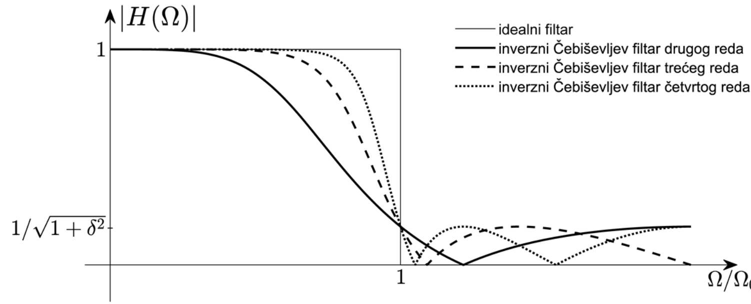
Čebiševljevi filtri sa oscilacijama u nepropusnom opsegu

Čebiševljev filtar koji ima amplitudnu karakteristiku sa jednolikim oscilacijama u nepropusnom opsegu, dok je u propusnom opsegu amplitudna karakteristika monotono opadajuća, naziva se *inverzni Čebiševljev filtar*. Kvadrat amplitudne karakteristike inverznog Čebiševljevog filtra prototipa se analitički može zapisati u obliku (koji navodimo bez dokaza):

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(1/\left(\Omega/\Omega_0\right)\right)}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(1/\left(\Omega/\Omega_0\right)\right)}. \tag{14.51}$$

Na Slici 14.15 su prikazane amplitudne karakteristike normalizovanih inverznih Čebiševljevih filtara drugog, trećeg i četvrtog reda.

Za ispunjenje istih zahtjeva u pogledu amplitudne karakteristike potreban red inverznog Čebiševljevog filtra jednak je redu Čebiševljevog filtra, a manji je od reda Batervortovog filtra. Inverzni Čebiševljev filtar ima faznu karakteristiku koja, u propusnom opsegu, manje odstupa od linearne, te unosi manje faznih izobličenja nego Čebiševljev filtar.



Slika 14.15 Amplitudne karakteristike Čebiševljevih filtara sa oscilacijama u nepropusnom opsegu.

14.2.2.3 Eliptički filtri

Greška aproksimacije amplitudne karakteristike idealnog filtra se može još više smanjiti ako se koristi aproksimaciona kriva sa jednolikim oscilacijama u oba opsega, kao na Slici 14.16. To se postiže eliptičkim funkcijama oblika:

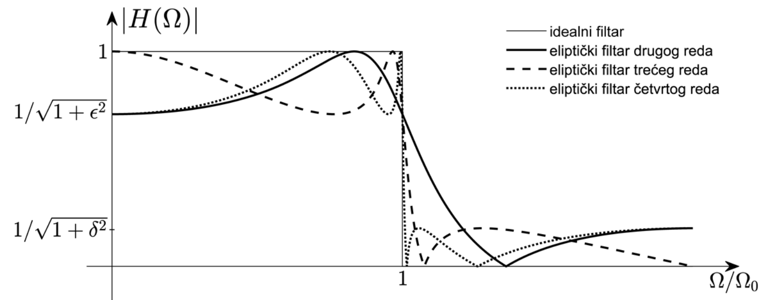
$$T_n(\Omega) = k\prod_{i=1}^{n/2} \frac{\Omega^2 - \left(\Omega_s^2 / \Omega_{z_i}\right)^2}{\Omega^2 - \Omega_{z_i}^2}, \ n \ \text{parno}, \tag{14.52}$$

$$T_n(\Omega) = k\Omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{\Omega^2 - \left(\Omega_s^2 / \Omega_{z_i}\right)^2}{\Omega^2 - \Omega_{z_i}^2}, \ n \ \text{neparno}, \tag{14.53}$$

gdje je k konstanta, n red filtra, a Ω_{z_i} nule transmisije, pa se filtri sa jednolikim oscilacijama i u propusnom i u nepropusnom obliku nazivaju eliptički ili Kaureovi filtri. Amplitudna karakteristika Kauerovog analognog prototipa je oblika (koji navodimo bez dokaza):

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\Omega/\Omega_0\right)}. \tag{14.54}$$

Budući da je određivanje reda filtra iz (14.54) teško, koristi se približna relacija:



Slika 14.16 Amplitudne karakteristike eliptičkih filtara.

$$R_s \geq -20\log\left|H\left(\Omega_s/\Omega_0\right)\right| = \\ = -10\log\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\Omega_s/\Omega_0\right)} \approx 20\log\varepsilon + 20\log\left|T_n\left(\Omega_s/\Omega_0\right)\right|, \tag{14.55}$$

za provjeru da li odabrani red filtra ispunjava zahtjeve. Postavljeni zahtjevi u pogledu amplitudne karakteristike postižu se nižim redom filtra nego kod Čebiševljevih i Batervortovih filtara.

Funkcija prenosa eliptičkog filtra je oblika:

$$H(s) = \frac{H_0 \prod_{i=1}^{m}\left(s^2 + a_i\right)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}, \tag{14.56}$$

gdje se H_0 bira tako da vršna vrijednost pojačanja bude jednaka jedinici. Na Slici 14.16 su prikazane amplitudne karakteristike normalizovanih eliptičkih filtara drugog, trećeg i četvrtog reda.

14.2.3 Metod aproksimacije izvoda

Metod aproksimacije izvoda je najjednostavniji način preslikavanja funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra. Zasniva se na aproksimaciji derivacija konačnim diferencijama. Rezultujući efekat je zamjena diferencijalne jednačine, koja opisuje analogni filtar, jednačinom diferencija, koja opisuje digitalni filtar. Različiti metodi numeričke matematike, koji se koriste za aproksimaciju izvoda, dovode do različitih preslikavanja, pa su, samim tim, i rezultujući digitalni filtri različiti.

Razmotrićemo metod koji koristi Ojlerovu aproksimaciju, po kojoj je:

$$\left.\frac{d\hat{y}(t)}{dt}\right|_{t=n\Delta t} = \frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta t}, \tag{14.57}$$

gdje je $\hat{y}(t)$ odziv analognog filtra, $y(n)$ odziv digitalnog filtra, Δt korak odmjeravanja, te $y(n) = \hat{y}(t)\big|_{t=n\Delta t}$, $n \in \mathbb{Z}$. Simbol "^" sa zaobljenim vrhom koristimo iznad veličina koje opisuju analogni filtar kako bismo naglasili da nam projektovanje analognog filtra nije konačan cilj, već samo korak u proceduri projektovanja digitalnog filtra.

Na osnovu prethodne relacije, koristeći pravilo deriviranja u vremenskom domenu kod Laplasove transformacije i pravilo pomaka u vremenskom domenu kod *z*-transformacije, zaključujemo da je preslikavanje iz *s*-domena u *z*-domen dato sa:

$$s = f(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t}. \tag{14.58}$$

Primjena transformacije date sa (14.58), pri preslikavanju funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra, je ekvivalentna primjeni smjene (14.57) u diferencijalnoj jednačini analognog filtra, kojom se ona prevodi u jednačinu diferencija digitalnog filtra.

Da bismo procijenili kvalitet ove aproksimacije provjerićemo kako se preslikava imaginarna osa i lijeva poluravan *s*-ravni, te da li su ispunjeni uslovi dati sa (14.34) i (14.35). Iz (14.58) pronalazimo da je:

$$z = \frac{1}{1 - s\Delta t}, \tag{14.59}$$

pa posmatrajući preslikavanje tačaka sa imaginarne ose kompleksne *s*-ravni:

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\Omega\Delta t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\Omega\Delta t}{1 - j\Omega\Delta t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1 + j\Omega\Delta t}{1 - j\Omega\Delta t}, \tag{14.60}$$

iz čega dobijamo:

$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1 + j\Omega\Delta t}{1 - j\Omega\Delta t} = \frac{1}{2}e^{j\operatorname{arctg} 2\Omega\Delta t}, \tag{14.61}$$

zaključujemo da je:

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},\ \forall\Omega, \tag{14.62}$$

$$\arg\left(z - \frac{1}{2} \right) = \operatorname{arctg} 2\Omega\Delta t. \tag{14.63}$$

To znači da se imaginarna osa iz *s*-ravni preslikava u kružnicu poluprečnika $1/2$, sa centrom u $z = 1/2$ u *z*-ravni.

Za tačke iz lijeve poluravni *s*-ravni, gdje je $s = \sigma + j\Omega,\ \sigma < 0$, dobijamo:

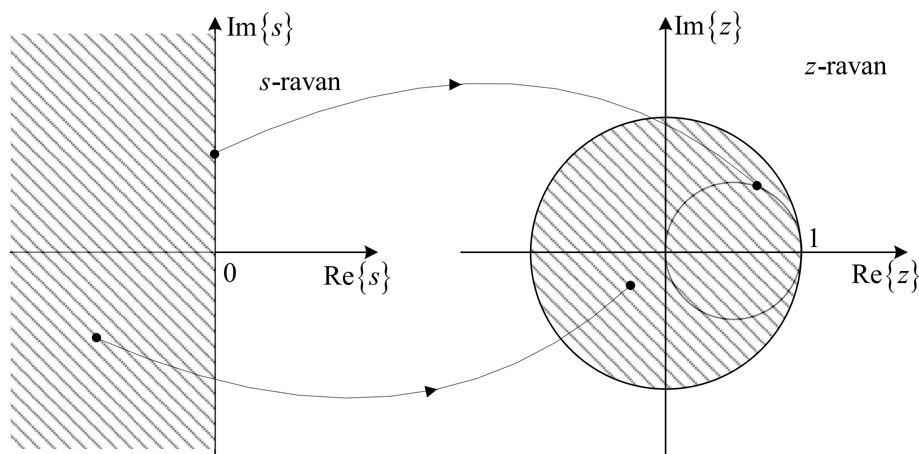
$$z = \frac{1}{1 - \sigma\Delta t - j\Omega\Delta t}, \tag{14.64}$$

pa je:

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma\Delta t)^2 + (\Omega\Delta t)^2}} \leq \frac{1}{|1 - \sigma\Delta t|} \leq 1, \tag{14.65}$$

što znači da se svaka tačka iz lijeve poluravni *s*-ravni preslikava u unutrašnjost jediničnog kruga u *z*-ravni.

Prvi uslov, da se imaginarna osa iz *s*-ravni preslikava u jediničnu kružnicu u *z*-ravni nije zadovoljen. Ipak, posmatrajući Sliku 14.17, vidimo da se za male vrijednosti ω, tj. na niskim učestanostima, kružnica poluprečnika $1/2$, sa centrom u $z = 1/2$ u *z*-ravni, u koju se preslikava imaginarna osa iz *s*-ravni, približno poklapa sa jediničnom kružnicom. Zbog toga ova tehnika daje



Slika 14.17 Preslikavanje funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra metodom aproksimacije izvoda.

zadovoljavajuće rezultate u oblasti niskih frekvencija i pogodna je za projektovanje NP filtara. Iz (14.63) možemo zaključiti da se, pri manjem koraku odmjeravanja Δt, određeni segment imaginarne ose iz s-ravni (određeni opseg kontinualnih učestanosti) preslikava na manji luk kružnice poluprečnika $1/2$, sa centrom u $z=1/2$ u z-ravni. Stoga će, ako osiguramo da je Δt dovoljno malo, rezultujući NP digitalni filtar imati veoma slične karakteristike u propusnom opsegu kao analogni filtar.

14.2.4 Metod impulsne invarijanse

Ova procedura preslikavanja kauzalnog analognog u digitalni filtar osigurava da je impulsni odziv digitalnog filtra odmjerena verzija impulsnog odziva analognog filtra:

$$h(n)=\hat{h}(t),\ t=n\Delta t, \tag{14.66}$$

gdje su $\hat{h}(t)$ i $h(n)$ impulsni odzivi analognog i digitalnog filtra, respektivno, a Δt je korak odmjeravanja. Radi lakšeg razmatranja, pretpostavićemo da funkcija prenosa analognog filtra $\hat{H}(s)$ ima jednostruke polove i da je možemo razviti na parcijalne razlomke:

$$\hat{H}(s)=\frac{\sum_{i=0}^{M}\hat{b}_i s^i}{\sum_{i=0}^{N}\hat{a}_i s^i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\xi_i}{s-\hat{p}_i}. \tag{14.67}$$

Impulsni odziv kauzalnog analognog filtra se lako dobije inverznom Laplasovom transformacijom:

$$\hat{h}(t)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i e^{\hat{p}_i t},\ t\geq 0. \tag{14.68}$$

Stavimo li da je impulsni odziv digitalnog filtra odmjerena verzija impulsnog odziva analognog filtra:

$$h(n)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i e^{\hat{p}_i n\Delta t},\ n\geq 0, \tag{14.69}$$

funkciju prenosa digitalnog filtra dobijamo njegovom *z*-transformacijom:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\xi_i e^{\hat{p}_i n\Delta t}z^{-n}=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\hat{p}_i\Delta t}z^{-1}\right)^n=\sum_{i=1}^{N}\frac{\xi_i}{1-e^{\hat{p}_i\Delta t}z^{-1}}. \tag{14.70}$$

Poredeći funkciju prenosa digitalnog filtra $H(z)$ datu sa (14.70) sa funkcijom prenosa $\hat{H}(s)$ iz (14.67), zaključujemo da je preslikavanje funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog filtra dato sa:

$$\frac{\xi_i}{s-\hat{p}_i}\rightarrow\frac{\xi_i}{1-e^{\hat{p}_i\Delta t}z^{-1}}=\frac{\xi_i}{1-p_i z^{-1}}, \tag{14.71}$$

gdje je $p_i=e^{\hat{p}_i\Delta t}$ pol digitalnog filtra koji odgovara polu analognog filtra $\hat{p}_i$. Isto preslikavanje:

$$z=e^{s\Delta t}, \tag{14.72}$$

kojim se pol $\hat{p}_i$ iz *s*-domena preslikava u *z*-domen, se primjenjuje na preslikavanje svih tačaka iz kompleksne *s*-ravni u *z*-ravan. Na taj način se tačke sa imaginarne ose iz *s*-ravni preslikavaju na jediničnu kružnicu u *z*-ravni:

$$e^{j\omega} = e^{j\Omega\Delta t}, \tag{14.73}$$

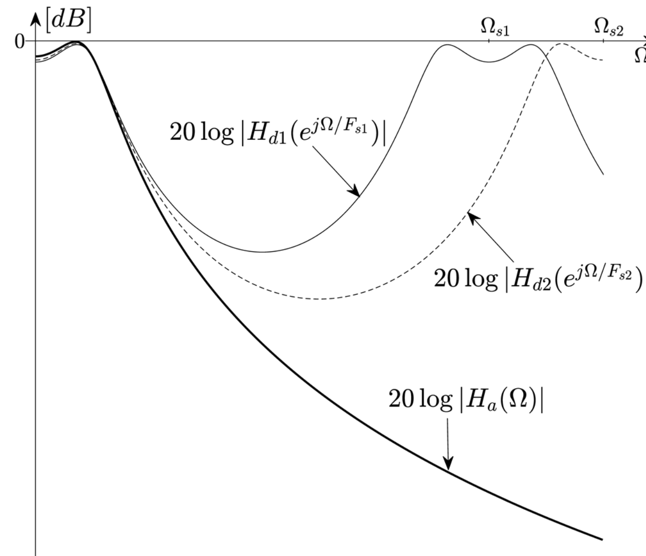
pri čemu je veza digitalne i kontinualne učestanosti data sa $\omega = \Omega\Delta t$.

U procesu diskretizacije, kojeg modeliramo u vremenskom domenu množenjem impulsnog odziva analognog filtra periodičnom sekvencom Dirakovih impulsa, čiji je period Δt, dolazi do periodičnog ponavljanja frekvencijske karakteristike analognog filtra sa periodom $\Omega_s = 2\pi/\Delta t$. Pored toga što je periodična, Furijeova transformacija diskretizovanog impulsnog odziva je, u odnosu na Furijeovu transformaciju impulsnog odziva analognog filtra, podijeljena sa Δt. Budući da su vrijednosti elemenata impulsnog odziva digitalnog filtra jednake vrijednostima impulsnog odziva analognog filtra u tačkama odmjeravanja i vrijedi da je $\omega = \Omega\Delta t$, Furijeova transformacija impulsnog odziva digitalnog filtra jednaka je Furijeovoj transformaciji diskretizovanog impulsnog odziva analognog filtra. O ovome smo detaljno pisali u Glavi 6, gdje smo sa (6.87) uspostavili vezu između spektra diskretnog i spektra kontinualnog signala. Na osnovu (6.87), veza između frekvencijskih karakteristika digitalnog i analognog filtra, za koje vrijedi da je impulsni odziv digitalnog filtra odmjerena verzija impulsnog odziva analognog filtra, se može napisati u obliku:

$$H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left(\Omega - k\frac{2\pi}{\Delta t}\right). \tag{14.74}$$

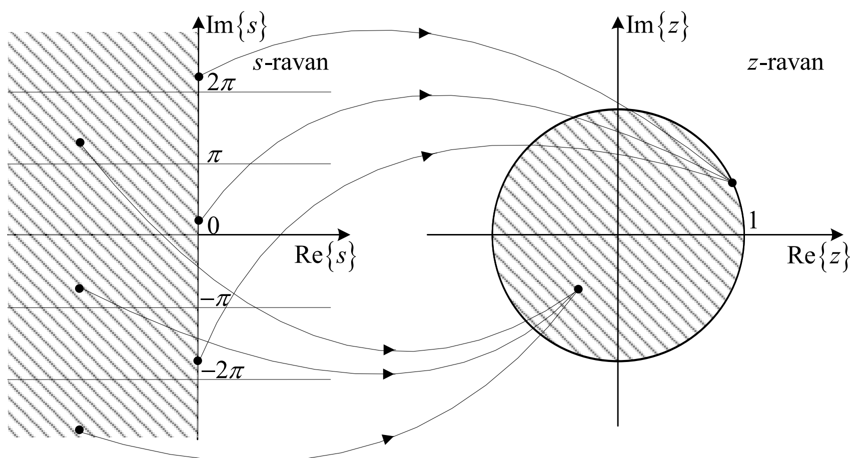
Budući da (14.72) koristimo za preslikavanje svih tačaka iz s-ravni u z-ravan, prethodna relacija između analognog i digitalnog domena, koja vrijedi za tačke na imaginarnoj osi u *s*-ravni i jediničnoj kružnici u *z*-ravni, se proširuje na cijelu *s*-ravan i cijelu *z*-ravan, zamjenom $e^{j\omega}$ sa z i $j\Omega$ sa s. Tako dobijamo vezu između funkcija prenosa digitalnog i analognog filtra:

$$H(z)\Big|_{z=e^{s\Delta t}} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left(s - jk\frac{2\pi}{\Delta t}\right). \tag{14.75}$$



Slika 14.18 Amplitudne karakteristike analognog i dva digitalna filtra koji se dobiju metodom impulsne invarijanse, pri čemu je $F_{s2} > F_{s1}$.

Veza digitalne i kontinualne učestanosti $\omega = \Omega\Delta t$ je linearna, te prilikom preslikavanja frekvencijske karakteristike iz analognog u digitalni domen nema frekvencijskih izobličenja. Međutim, zbog navedenog periodičnog proširenja dolazi do preklapanja frekvencijske karakteristike i sabiranja njenih replika, te se frekvencijska karakteristika digitalnog filtra može značajno razlikovati od frekvencijske karakteristike analognog filtra. U slučaju kada amplitudna karakteristika opada sa porastom učestanosti, preklapanje se smanjuje izborom manjeg koraka odmjeravanja, kao što se može vidjeti iz primjera na Slici 14.18. Metod impulsne invarijanse je stoga primjenljiv samo na NP filtre i filtre PO, kod kojih se, povećanjem frekvencije odmjeravanja, može postići da preklapanje bude dovoljno malo u smislu izobličenja koje unosi u oblik amplitudne karakteristike.



Slika 14.19 Preslikavanje s-ravni u z-ravan kod tehnike impulsne invarijanse.

Razmotrimo osobine ovog metoda, posmatranjem preslikavanja $z = e^{s\Delta t}$. Ono je periodično sa periodom $2\pi/\Delta t$, jer vrijedi da je $e^{s\Delta t} = e^{\left(s - jk\frac{2\pi}{\Delta t}\right)\Delta t}$, $k \in \mathbb{Z}$, te nije 1-1 preslikavanje. Na primjer, tačke iz s-ravni: $s = 0$, $s = \pm j2\pi/\Delta t$, $s = \pm j4\pi/\Delta t, \ldots$ se sve preslikavaju u tačku $z = 1$ u z-ravni. Svaki segment iz kompleksne s-ravni širine $2\pi/\Delta t$ se preslikava na cijelu z-ravan. Postupak preslikavanja ilustrovan je na Slici 14.19. Tačke sa imaginarne ose se preslikavaju u jediničnu kružnicu, te je uslov dat sa (14.34) ispunjen. Međutim, zbog toga što se više segmenata imaginarne ose preslikava u iste tačke jedinične kružnice dolazi do efekta preklapanja, te frekvencijske karakteristike digitalnih filtara, koji se dobiju metodom impulsne invarijanse, nisu istog oblika kao frekvencijske karakteristike analognih filtara. Lijeva polovina horizontalnih segmenata širine $2\pi/\Delta t$ iz s-ravni se preslikava u unutrašnjost, a desna polovina u spoljašnost jediničnog kruga u z-ravni, te je stabilnost sistema očuvana prilikom preslikavanja iz analognog u digitalni domen.

14.2.5 Bilinearna transformacija

Pri prelasku iz analognog u digitalni domen cilj nam je da što bolje očuvamo oblik amplitudne karakteristike filtra. Da bismo eliminisali neželjeni efekat preklapanja, koji se pojavljuje kod metoda impulsne invarijanse, a pri tome osigurali preslikavanje imaginarne ose iz *s*-ravni u jediničnu kružnicu u *z*-ravni, koristimo 1-1 preslikavanje nazvano bilinearna transformacija. Metod se zasniva na korištenju trapezoidne formule pri aproksimaciji integrala.

Posmatrajmo funkciju prenosa prvog reda:

$$\hat{H}(s) = \frac{\xi}{s - \hat{p}}, \tag{14.76}$$

analognog filtra opisanog diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \hat{p}\hat{y}(t) = \xi x(t). \tag{14.77}$$

Za $t = n\Delta t$ ova diferencijalna jednačina poprima oblik:

$$\hat{y}'(n\Delta t) = \hat{p}\hat{y}(n\Delta t) + \xi x(n\Delta t). \tag{14.78}$$

Koristeći aproksimaciju integrala trapezoidnom formulom na intervalu širine Δt, gdje je $\Delta t = t - t_0$:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \int_{t_0}^{t} \hat{y}'(\tau)\, d\tau + \hat{y}(t_0) = \\ &= \Delta t \hat{y}'(t_0) + \frac{\Delta t}{2}\left[\hat{y}'(t) - \hat{y}'(t_0)\right] + \hat{y}(t_0) = \frac{\Delta t}{2}\left[\hat{y}'(t) + \hat{y}'(t_0)\right] + \hat{y}(t_0), \end{aligned} \tag{14.79}$$

za $t = n\Delta t$ možemo pisati:

$$\hat{y}(n\Delta t) = \frac{\Delta t}{2}\left[\hat{y}'(n\Delta t) + \hat{y}'((n-1)\Delta t)\right] + \hat{y}((n-1)\Delta t), \tag{14.80}$$

odnosno:

$$\hat{y}(n\Delta t) - \hat{y}((n-1)\Delta t) = \frac{\Delta t}{2}\left[\hat{y}'(n\Delta t) + \hat{y}'((n-1)\Delta t)\right], \tag{14.81}$$

dok iz (14.78) nalazimo da je:

$$\hat{y}'(n\Delta t) = \hat{p}\hat{y}(n\Delta t) + \xi x(n\Delta t). \tag{14.82}$$

Ako su vrijednosti diskretnih signala $x(n)$ i $y(n)$ jednake vrijednostima kontinualnih signala $x(t)$ i $\hat{y}(t)$ u tačkama odmjeravanja, tj. $x(n) = x(n\Delta t)$ i $y(n) = \hat{y}(n\Delta t)$, uvrštavanjem (14.82) u (14.81) dolazimo do jednačine diferencija digitalnog filtra:

$$\left(1 - \frac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) y(n) - \left(1 + \frac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) y(n-1) = \frac{\xi \Delta t}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right]. \tag{14.83}$$

Primjenom *z*-transformacije na prethodnu jednačinu diferencija:

$$\left[\left(1 - \frac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) - \left(1 + \frac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) z^{-1}\right] Y(z) = \frac{\xi \Delta t}{2}\left(1 + z^{-1}\right) X(z), \tag{14.84}$$

određujemo funkciju prenosa digitalnog filtra:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{\xi \Delta t}{2}\left(1 + z^{-1}\right)}{\left(1 - \dfrac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) - \left(1 + \dfrac{\hat{p}\Delta t}{2}\right) z^{-1}} = \frac{\xi}{\dfrac{2}{\Delta t}\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} - \hat{p}}. \tag{14.85}$$

Poredeći dobijeni izraz za funkciju prenosa digitalnog filtra sa izrazom za funkciju prenosa analognog filtra, zaključujemo da se preslikavanjem u obliku:

$$s = f(z) = \frac{2}{\Delta t}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \tag{14.86}$$

funkcija prenosa analognog filtra prevodi u funkciju prenosa digitalnog filtra. Preslikavanje dato sa (14.86) nazivamo bilinearna transformacija.

Ako je $\hat{p}$ pol analognog filtra, nakon bilinearne transformacije pol digitalnog filtra je dat sa:

$$p = \frac{2 + \hat{p}\Delta t}{2 - \hat{p}\Delta t}. \tag{14.87}$$

Preslikavanje analognog filtra višeg reda u digitalni filtar je jednostavno ukoliko funkciju prenosa analognog filtra $\hat{H}(s)$, uz pretpostavku da ima samo jednostruke polove, iskažemo preko razvoja na parcijalne razlomke:

$$\hat{H}(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{s-\hat{p}_k}. \tag{14.88}$$

Tada odgovarajući digitalni filtar ima funkciju prenosa u obliku:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\dfrac{\xi_k\Delta t}{2-\hat{p}_k\Delta t}\left(1+z^{-1}\right)}{1-\dfrac{2+\hat{p}_k\Delta t}{2-\hat{p}_k\Delta t}z^{-1}}. \tag{14.89}$$

Inverzna transformacija, iz z-ravni u s-ravan, je data sa:

$$z=\frac{2+s\Delta t}{2-s\Delta t}. \tag{14.90}$$

Provjerimo sada da li bilinearna transformacija zadovoljava uslove date sa (14.34) i (14.35). Za $s=j\Omega$ imamo:

$$z=\frac{2+j\Omega\Delta t}{2-j\Omega\Delta t}=e^{j2\operatorname{arctg}\frac{\Omega\Delta t}{2}}, \tag{14.91}$$

što znači da se imaginarna osa iz s-ravni preslikava u jediničnu kružnicu u z-ravni, i to preslikavanje jeste 1-1. Za $s=\sigma+j\Omega$, $\sigma<0$, dobijamo:

$$z=\left.\frac{2+s\Delta t}{2-s\Delta t}\right|_{s=\sigma+j\Omega}=\frac{2+\sigma\Delta t+j\Omega\Delta t}{2-\sigma\Delta t-j\Omega\Delta t}, \tag{14.92}$$

tako da je u izrazu:

$$|z|^2=\frac{\left(2+\sigma\Delta t\right)^2+\left(\Omega\Delta t\right)^2}{\left(2-\sigma\Delta t\right)^2+\left(\Omega\Delta t\right)^2}, \tag{14.93}$$

nazivnik uvijek veći od brojnika, te je $|z|<1$. To znači da je uslov u pogledu stabilnosti digitalnog filtra ispunjen.

Iako bilinearna transformacija preslikava imaginarnu osu iz s-ravni u jediničnu kružnicu u z-ravni, to ne znači da će frekvencijske karakteristike digitalnog i analognog filtra biti identične. Amplitudna karakteristika digitalnog filtra će pratiti oblik amplitudne karakteristike analognog filtra u smislu toka funkcije. Npr, ako je amplitudna karakteristika analognog filtra monotono opadajuća za $0 \le \Omega < \infty$, odgovarajući digitalni filtar će imati monotono opadajuću amplitudnu karakteristiku za $0 \le \omega < \pi$. Odstupanja oblika amplitudne karakteristike digitalnog filtra u odnosu na oblik amplitudne karakteristike analognog filtra su posljedica nelinearne relacije između analogne i digitalne učestanosti, koju pronalazimo na osnovu slike jedinične kružnice $z = e^{j\omega}$ u s-ravni:

$$\begin{aligned} s = \sigma + j\Omega &= \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \bigg|_{z = e^{j\omega}} = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{\Delta t} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = \\ &= \frac{2}{\Delta t} \frac{j \sin \omega/2}{\cos \omega/2} = j\left(\frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right). \end{aligned} \tag{14.94}$$

Realni dio u (14.94) je jednak nuli. To znači da se ovim inverznim preslikavanjem, kao što smo i očekivali, jer je bilinearna transformacija 1-1 preslikavanje, jedinična kružnica iz z-ravni preslikava u imaginarnu osu u s-ravni. Zakonitost preslikavanja je data sa:

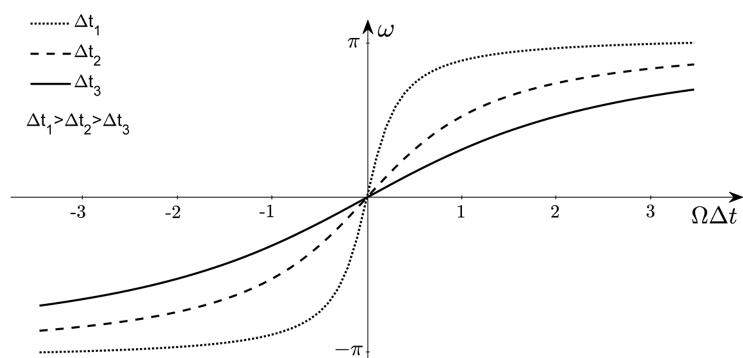
$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \tag{14.95}$$

i prikazana je na Slici 14.20.

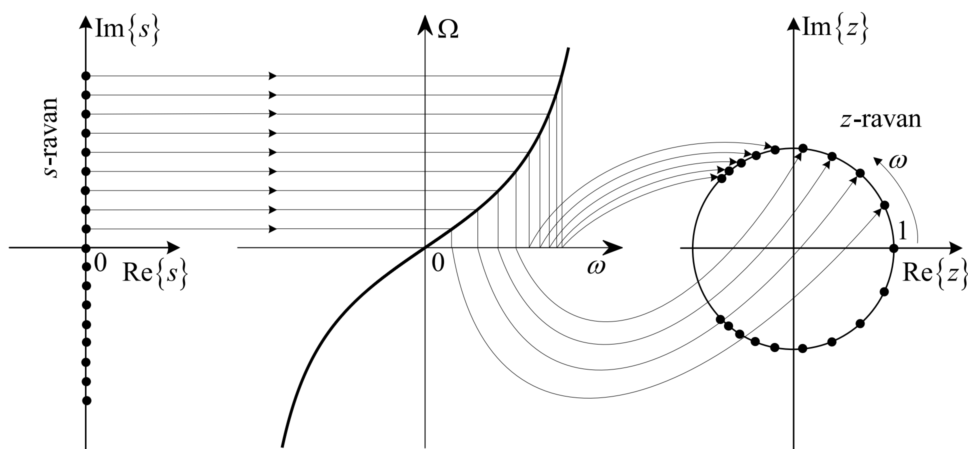
Ako je poznata frekvencijska karakteristika analognog filtra, frekvencijsku karakteristiku digitalnog filtra, pomoću bilinearne transformacije, dobijamo na sljedeći način:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \hat{H}(\Omega)\Big|_{\Omega = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}. \tag{14.96}$$

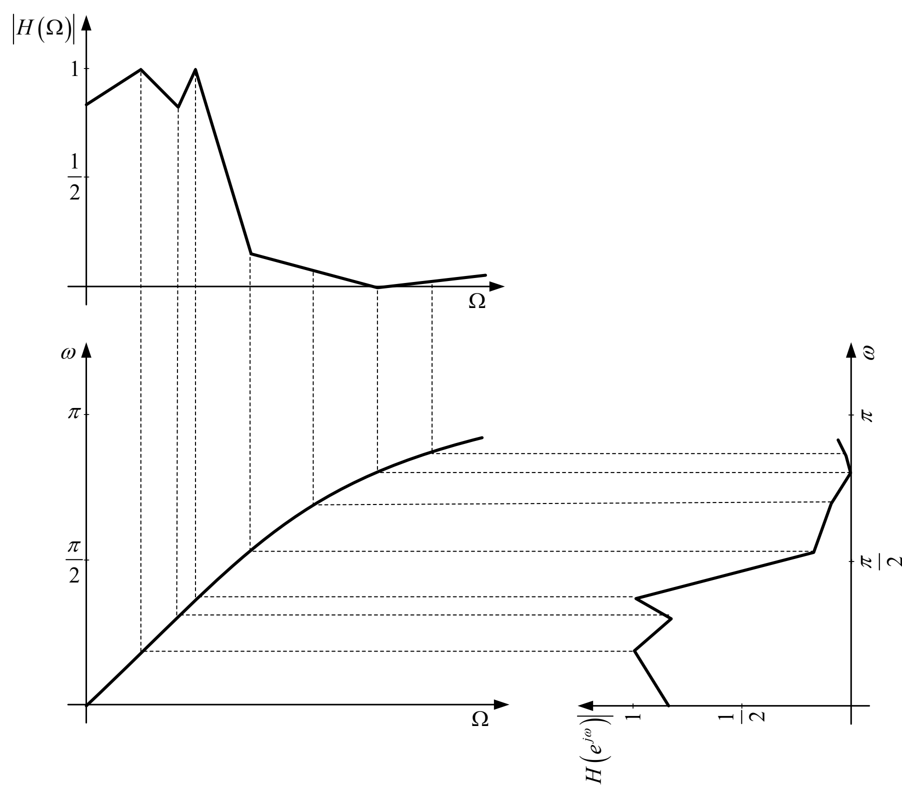
Zakonitost preslikavanja (14.95) je nelinearna, tako da preslikavanje ekvidistantnih tačaka sa imaginarne ose iz s-ravni ne rezultuje jednakim ugaonim rastojanjem tačaka na jediničnoj kružnici u z-ravni, kao što je ilustrovano na Slici 14.21. Zbog jednostavnosti prikaza, linijama koje ukazuju na način preslikavanja



Slika 14.20 Kriva preslikavanja analogne u digitalnu učestanost.

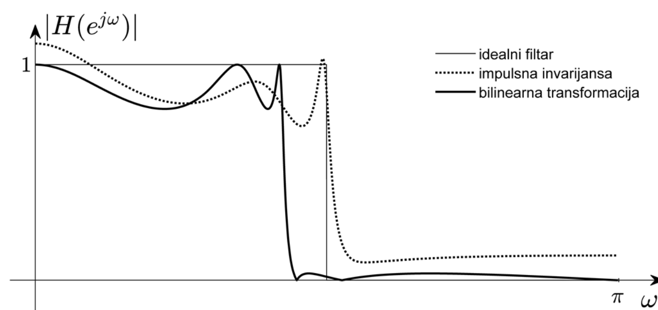


Slika 14.21 Nelinearna transformacija učestanosti kod bilinearne transformacije.



Slika 14.22 Primjer bilinearne transformacije amplitudne karakteristike analognog filtra u amplitudnu karakteristiku digitalnog filtra.

povezane su samo tačke sa pozitivnog dijela imaginarne ose iz *s*-ravni sa odgovarajućim tačkama na jediničnoj kružnici u *z*-ravni, u dijelu gdje je $0 \leq \omega < \pi$. Označene tačke sa negativnog dijela imaginarne ose se, na isti način, preslikavaju u označene tačke jedinične kružnice z-ravni, u dijelu gdje je $\pi \leq \omega < 2\pi$. Zbog nelinearnog preslikavanja dolazi do razvlačenja ili sabijanja frekvencijske karakteristike digitalnog filtra duž ω ose. Grafički proces preslikavanja amplitudne karakteristike analognog filtra u amplitudnu karakteristiku digitalnog filtra je, kroz primjer po segmentima linearizovane amplitudne karakteristike Čebiševljevog filtra, ilustrovan na Slici 14.22.



Slika 14.23 Amplitudne karakteristike digitalnih filtara dobijenih preslikavanjem analognog Čebiševljevog filtra metodom impulsne invarijanse i bilinearnom transformacijom.

U području niskih učestanosti, gdje je $\Omega\Delta t$ malo, kriva preslikavanja, data na Slici 14.20, je približno linearna, te su u tom dijelu odstupanja frekvencijske karakteristike digitalnog filtra od frekvencijske karakteristike analognog filtra najmanja. Sa Slike 14.20 je očito da se korak odmjeravanja Δt može koristiti za razvlačenje krive preslikavanja. Što je Δt manje, to je širi opseg u kom je kriva preslikavanja linearna, te su razlike frekvencijskih karakteristika u analognom i digitalnom domenu manje u širem području niskih učestanosti. Loša osobina smanjenja koraka odmjeravanja je povećan broj matematičkih operacija i povećanja potrošnja energije pri filtriranju signala.

Poređenja radi, na Slici 14.23 su date amplitudne karakteristike digitalnih filtara koje se dobiju preslikavanjem analognog Čebiševljevog filtra metodom impulsne invarijanse i bilinearnom transformacijom. Primjetna su izobličenja u obliku amplitudne karakteristike koja se dobije metodom impulsne invarijanse i u propusnom i u nepropusnom opsegu. Amplitudna karakteristika dobijena bilinearnom transformacijom je zadržala oblik, ali je došlo do njenog sabijanja, što je rezultovalo pomjeranjem graničnih učestanosti. Ovaj problem se rješava predistorzijom učestanosti prilikom projektovanja analognog filtra, što ćemo detaljno objasniti nakon što uvedemo frekvencijske transformacije koje se koriste za projektovanje NP filtara sa drugačijim graničnim učestanostima propusnog i nepropusnog opsega, te VP filtara, filtara PO i filtara NO.

14.2.6 Frekvencijske transformacije

Prilikom projektovanja IIR filtara preslikavanjem funkcije prenosa iz analognog u digitalni domen zadržali smo se na razmatranju samo analognog NP prototipa. Za projektovanje ostalih NP filtara, kod kojih je granična učestanost propusnog opsega različita od jedinice, VP filtara, kao i filtara PO i filtara NO, koriste se frekvencijske transformacije, u analognom ili digitalnom domenu, kojima se funkcija prenosa NP filtra transformiše u funkciju prenosa željenog filtra. Neovisno o tome u kom domenu se vrše frekvencijske transformacije, prvo se, na osnovu zadatih specifikacija, projektuje analogni NP prototip. Ako se frekvencijske transformacije primjenjuju u analognom domenu, funkcija prenosa analognog NP prototipa se transformiše u funkciju prenosa željenog analognog filtra, pa se na kraju koristi neki od metoda preslikavanja funkcije prenosa analognog filtra u funkciju prenosa digitalnog filtra. Prilikom primjene frekvencijskih transformacija u digitalnom domenu, nakon projektovanja analognog NP filtra, prvo se izvrši preslikavanje njegove funkcije prenosa u funkciju prenosa digitalnog NP filtra, koja se zatim, frekvencijskim transformacijama, prevodi u funkciju prenosa željenog digitalnog filtra. Primjenjuje li se za preslikavanje funkcije prenosa analognog filtra u digitalni domen bilinearna transformacija, oba pristupa će rezultovati jednakim funkcijama prenosa digitalnih filtara. To nije slučaj kada se primjenjuju drugi metodi preslikavanja. Tada se preporučuje primjena frekvencijskih transformacija u digitalnom domenu, kojima se iz analognog u digitalni domen uvijek preslikava funkcija prenosa NP filtra, te su loše osobine metoda preslikavanja manje izražene. Ovakav pristup omogućava da se metod aproksimacije izvoda i metod impulsne invarijanse koriste i za projektovanje visokopropusnih filtara i filtara nepropusnika opsega, što nije moguće ako se koriste frekvencijske transformacije u analognom domenu.

14.2.6.1 Frekvencijske transformacije u analognom domenu

Frekvencijskim transformacijama u analognom domenu transformišemo funkciju prenosa analognog NP prototipa u funkciju prenosa normalizovanog analognog filtra željenog tipa. Normalizovani analogni filtar se dobije

normalizacijom učestanosti sa pogodno odabranom učestanošću Ω_0, čiji izbor zavisi od tipa željenog filtra, što ćemo kasnije detaljno obrazložiti. Označimo sa $\overline{s}_n = \overline{\sigma}_n + j\overline{\omega}_n$ kompleksnu učestanost analognog NP prototipa, kod koga je $\overline{\omega}_n = 1$ granična učestanost propusnog opsega, a sa $s = \sigma + j\Omega$ kompleksnu učestanost željenog filtra. Za normalizovanu učestanost željenog filtra uvešćemo oznaku $\omega_n = \Omega/\Omega_0$, pa ćemo normalizovanu kompleksnu učestanost označiti sa $s_n = s/\Omega_0 = \sigma_n + j\omega_n$. Oznaku ω_n za normalizovanu učestanost kod analognih filtara ne treba miješati sa oznakom ω, koju koristimo za digitalnu učestanost.

Frekvencijska transformaciona funkcija:

$$\overline{s}_n = F\left(s_n\right), \tag{14.97}$$

treba da transformiše propusne i nepropusne opsege željenog normalizovanog filtra u propusni, odnosno nepropusni opseg NP prototipa. Ako pronađemo takvu transformaciju, pa u funkciji prenosa NP prototipa kompleksnu učestanost $\overline{s}_n$ zamijenimo sa $F\left(s_n\right)$, dobićemo funkciju prenosa željenog normalizovanog filtra. Budući da je funkcija prenosa željenog filtra realna racionalna funkcija, slijedi da funkcija $F\left(s_n\right)$ mora biti neparna racionalna funkcija, takva da je:

$$\overline{s}_n = j\overline{\omega}_n = F\left(j\omega_n\right) = jF\left(\omega_n\right). \tag{14.98}$$

Frekvencijska transformaciona funkcija se bira tako da se sve učestanosti iz propusnih opsega željenog normalizovanog filtra transformišu u propusni opseg NP prototipa, $\left|\overline{\omega}_n\right| \le 1$, a sve učestanosti iz nepropusnih opsega željenog filtra u nepropusni opseg NP prototipa, $\left|\overline{\omega}_n\right| > 1$. Zbog jednoznačnosti transformacije, $F\left(\omega_n\right)$ je monotono rastuća funkcija, koja ima jednostruke nule ω_{nb_i} u svakom propusnom opsegu i jednostruke polove ω_{na_i} u svakom nepropusnom opsegu. Njen opšti oblik je dat sa:

$$\overline{\omega}_n = F\left(\omega_n\right) = K\frac{\left(\omega_n^2 - \omega_{nb_1}^2\right)\left(\omega_n^2 - \omega_{nb_2}^2\right)\cdots\left(\omega_n^2 - \omega_{nb_{n-1}}^2\right)\left(\omega_n^2 - \omega_{nb_n}^2\right)}{\omega_n\left(\omega_n^2 - \omega_{na_1}^2\right)\left(\omega_n^2 - \omega_{na_2}^2\right)\cdots\left(\omega_n^2 - \omega_{na_{m-1}}^2\right)\left(\omega_n^2 - \omega_{na_m}^2\right)}. \tag{14.99}$$

Opšta forma frekvencijske transformacione funkcije je:

$$\overline{s}_n = F\left(s_n\right) = K\frac{\left(s_n^2+\omega_{nb_1}^2\right)\left(s_n^2+\omega_{nb_2}^2\right)\cdots\left(s_n^2+\omega_{nb_{n-1}}^2\right)\left(s_n^2+\omega_{nb_n}^2\right)}{s_n\left(s_n^2+\omega_{na_1}^2\right)\left(s_n^2+\omega_{na_2}^2\right)\cdots\left(s_n^2+\omega_{na_{m-1}}^2\right)\left(s_n^2+\omega_{na_m}^2\right)}. \qquad (14.100)$$

Postupak projektovanja digitalnih filtara koristeći frekvencijske transformacije u analognom domenu se svodi na sljedeće. Odabere se normalizujuća učestanost željenog filtra, Ω_0, tako da se, nakon normalizacije, granične učestanosti propusnih opsega željenog filtra preslikavaju u $\left|\overline{\omega}_n\right| = 1$ analognog prototipa. Zatim se odrede normalizovane granične učestanosti nepropusnih opsega željenog filtra i preslikaju u granične učestanosti nepropusnog opsega analognog NP prototipa. Ukoliko postoji više nepropusnih opsega željenog filtra, dobija se i više graničnih učestanosti nepropusnog opsega analognog NP prototipa. Budući da, nakon frekvencijske transformacije NP prototipa u željeni tip filtra, specifikacije treba da budu zadovoljene u svim opsezima, bira se najmanja od njih, pa se odredi funkcija prenosa analognog NP prototipa. Ona se frekvencijskom transformacijom (14.100) prevodi u funkciju prenosa željenog filtra sa normalizovanim učestanostima.

Nakon što se frekvencijskom transformacijom dobije funkcija prenosa normalizovanog analognog filtra željenog tipa, za određivanje funkcije prenosa koja zadovoljava zadate specifikacije, neophodno je smjenom:

$$\overline{s}_n = \frac{s}{\Omega_0}. \qquad (14.101)$$

uraditi denormalizaciju učestanosti. Denormalizacija učestanosti je dodatna frekvencijska transformacija kojom se skalira funkcija prenosa. Zatim se, tako dobijena funkcija prenosa analognog filtra, preslikava u digitalni domen.

Pri projektovanju NP filtra u analognom domenu normalizacija se vrši sa graničnom učestanošću njegovog propusnog opsega. Nakon projektovanja NP prototipa, frekvencijskom transformacijom, koja se kod NP filtara svodi na skaliranje, dato sa (14.101), se dobija funkcija prenosa NP filtra koja zadovoljava postavljene zahtjeve.

Prilikom transformacije učestanosti VP filtra u učestanosti NP prototipa, propusni opseg normalizovanog VP filtra, $|\omega_n| \geq 1$, treba preslikati u propusni opseg NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| \leq 1$, a njegov nepropusni opseg, $|\omega_n| < 1$, u nepropusni opseg NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| > 1$. Ove zahtjeve zadovoljava frekvencijska transformaciona funkcija koja ima pol u nuli i nulu u beskonačnosti, uz $F(1) = 1$ Prema tome, frekvencijska transformacija kojom se funkcija prenosa NP filtra prevodi u funkciju prenosa VP filtra je data sa:

$$\overline{s}_n = \frac{1}{s_n}. \tag{14.102}$$

Budući da se granična učestanost propusnog opsega normalizovanog VP filtra treba preslikati u graničnu učestanost propusnog opsega NP prototipa, normalizacija učestanosti kod VP filtra se radi sa graničnom učestanošću njegovog propusnog opsega.

Posmatrajmo sada filtar propusnik opsega, sa graničnim učestanostima propusnog opsega Ω_l i Ω_u, $\Omega_l < \Omega_u$, koje ćemo, nakon normalizacije sa Ω_0, označiti sa ω_{nl} i ω_{nu}. Propusni opseg ovog filtra, $\omega_{nl} \leq \omega_n \leq \omega_{nu}$, treba preslikati u propusni opseg NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| \leq 1$, a nepropusne opsege, $\omega_n < \omega_{nl}$ i $\omega_n > \omega_{nu}$, u nepropusni opseg NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| > 1$. Pri tome, da bi zadovoljila opštu formu datu sa (14.100), frekvencijska transformaciona funkcija treba da bude monotono rastuća sa nulom u jedinici, te polovima u nuli i beskonačnosti:

$$\overline{s}_n = K\frac{s_n^2 + 1}{s_n}. \tag{14.103}$$

Granične učestanosti propusnog opsega filtra PO, ω_{nl} i ω_{nu}, se preslikavaju u graničnu učestanost propusnog opsega NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| = 1$, pa rješavanjem jednačine $|\overline{\omega}_n| = 1 \Rightarrow \omega_n^2 \pm \frac{1}{K}\omega_n - 1 = 0$ dobijamo da je $\omega_{nu} - \omega_{nl} = K^{-1}$ i

$\omega_{nl}\omega_{nu} = 1$. Iz $\omega_{nl}\omega_{nu} = 1$ slijedi da normalizujuća učestanost Ω_0 kod filtra PO treba da bude geometrijska sredina graničnih učestanosti propusnog opsega:

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_l \Omega_u}\ , \tag{14.104}$$

dok je parametar K zapravo faktor kvaliteta:

$$K = \frac{1}{\omega_u - \omega_l} = \frac{\Omega_0}{\Omega_u - \Omega_l} = \frac{\Omega_0}{B} = Q\ , \tag{14.105}$$

gdje je $B = \Omega_u - \Omega_l$ širina propusnog opsega.

Treba napomenuti da ova transformacija uvijek rezultuje simetričnim filtrom PO, kod koga oba nepropusna opsega imaju podjednako slabljenje i širine oba prelazna opsega su podjednake. Stoga treba obratiti pažnju na vrijednosti učestanosti NP prototipa koje se dobiju preslikavanjem graničnih učestanosti nepropusnih opsega filtra PO, na kojima slabljenje treba biti veće od propisanog, te projektovati NP prototip sa strožijim zahtjevima.

Frekvencijska transformaciona funkcija (14.102) mijenja pozicije propusnog i nepropusnog opsega. To znači da bi primjenom funkcije preslikavanja (14.102) na filtar PO dobili filtar NO, pa je željena funkcija preslikavanja koja prevodi funkciju prenosa NP prototipa u funkciju prenosa normalizovanog filtra NO recipročna funkciji preslikavanja koja prevodi funkciju prenosa NP prototipa u funkciju prenosa normalizovanog filtra PO:

$$\overline{s}_n = \frac{1}{Q}\frac{s_n}{s_n^2 + 1}\ . \tag{14.106}$$

Normalizujuća učestanost Ω_0 jednaka je geometrijskoj sredini graničnih učestanosti nepropusnog opsega. Ovom frekvencijskom transformacijom se dobije simetrični filtar NO sa jednakim osobinama u oba propusna i oba prelazna opsega, te je, slično kao kod projektovanja filtra PO, potrebno projektovati NP prototip sa strožijim zahtjevima.

14.2.6.2 Frekvencijske transformacije u digitalnom domenu

Frekvencijskim transformacijama u digitalnom domenu se funkcija prenosa digitalnog NP filtra, sa graničnom učestanošću propusnog opsega označenom sa ω_p, transformiše u neki od sljedećih digitalnih filtara: NP filtar sa drugačijom graničnom učestanošću propusnog opsega, VP filtar, filtar PO i filtar NO. Transformaciona funkcija:

$$z^{-1} = f\left(\hat{z}^{-1}\right), \tag{14.107}$$

ima oblik svepropusne filtarske funkcije drugog reda, čime se osigurava da se jedinična kružnica iz z-ravni preslikava u jediničnu kružnicu u $\hat{z}$-ravni.

Pretpostavimo da smo, na osnovu zadatih specifikacija, po kojima je granična učestanost propusnog opsega digitalnog NP filtra ω_p, projektovali analogni prototip i preslikali ga u digitalni domen. Ako promijenimo specifikacije samo u pogledu granične učestanosti propusnog opsega NP filtra, nije neophodno projektovanje novog analognog prototipa i preslikavanje analognog u digitalni filtar, već je moguće transformaciju izvršiti u digitalnom domenu.

Promjenu širine propusnog opsega u analognom domenu možemo postići skaliranjem funkcije prenosa. Faktor skaliranja biramo u obliku $(1+\alpha)/(1-\alpha)$, pa smjenom:

$$s = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\hat{s}, \tag{14.108}$$

u funkciji prenosa NP analognog filtra, pogodnim odabirom parametra α, dobijamo željenu širinu propusnog opsega. Umjesto vraćanja iz z-domena u s-domen, navedenog skaliranja, te preslikavanja iz $\hat{s}$-domena u novi $\hat{z}$-domen, skaliranje frekvencijske karakteristike digitalnog filtra se može postići direktnim preslikavanjem iz z-ravni u $\hat{z}$-ravan. Ako se pri preslikavanju koristi bilinearna transformacija, onda su z i $\hat{z}$ vezani sljedećom relacijom:

$$\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\hat{z}^{-1}}{1+\hat{z}^{-1}} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\hat{z}^{-1}-\alpha}{1-\alpha\hat{z}^{-1}}. \tag{14.109}$$

Posmatranjem prethodne relacije na jediničnim kružnicama u z-ravni i $\hat{z}$-ravni, u tačkama koje odgovaraju graničnim učestanostima propusnog opsega poznatog NP filtra, ω_p, i ciljnog NP filtra, $\hat{\omega}_p$:

$$e^{-j\omega_p} = \frac{e^{-j\hat{\omega}_p} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\hat{\omega}_p}}, \tag{14.110}$$

dolazimo do vrijednosti za parametar skaliranja α:

$$\alpha = \frac{\sin\dfrac{\omega_p - \hat{\omega}_p}{2}}{\sin\dfrac{\omega_p + \hat{\omega}_p}{2}}, \tag{14.111}$$

koja je potrebna da se postigne željeno skaliranje frekvencijske karakteristike digitalnog NP filtra.

Ovakvom frekvencijskom transformacijom se sve tačke jedinične kružnice iz z-ravni preslikavaju u jediničnu kružnicu u $\hat{z}$-ravni. To vidimo iz relacije:

$$\hat{z} = \frac{z + \alpha}{1 + \alpha z} = z\frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + \alpha z}, \tag{14.112}$$

gdje, uvrštavanjem $z = e^{j\omega}$, dobijamo da je $|\hat{z}| = 1$, jer su, u tom slučaju, u razlomku u (14.112) brojnik i nazivnik konjugovano-kompleksni. Tačke na jediničnoj kružnici z-ravni i jediničnoj kružnici $\hat{z}$-ravni vezane su relacijom:

$$\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\mathrm{tg}\frac{\hat{\omega}}{2}. \tag{14.113}$$

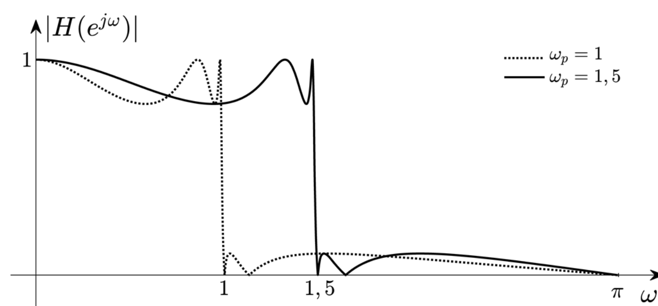
Ovakvo preslikavanje jednog digitalnog NP filtra u drugi digitalni NP filtar je linearno, te ne unosi dodatna izobličenja frekvencijske karakteristike.

Preostale frekvencijske transformacije u digitalnom domenu, poznate kao Konstatinidesove (A.G. Constantinides) frekvencijske transformacije, date su u Tabeli 14.1. Periodičnost frekvencijske karakteristike u digitalnom domenu omogućava da se do njihovih analitičkih izraza dođe skaliranjem i translacijom frekvencijske karakteristike NP filtra.

Tabela 14.1 Konstatinidesove frekvencijske transformacije.

Tip transformacije i ciljni propusni opseg	Relacija preslikavanja	Parametri
NP $\rightarrow$ NP $\hat{\omega} < \hat{\omega}_p$	$z^{-1} = \dfrac{\hat{z}^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \hat{z}^{-1}}$	$\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{\omega_p - \hat{\omega}_p}{2}}{\sin\dfrac{\omega_p + \hat{\omega}_p}{2}}$
NP $\rightarrow$ VP $\hat{\omega} > \hat{\omega}_p$	$z^{-1} = -\dfrac{\hat{z}^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \hat{z}^{-1}}$	$\alpha = -\dfrac{\cos\dfrac{\omega_p + \hat{\omega}_p}{2}}{\cos\dfrac{\omega_p - \hat{\omega}_p}{2}}$
NP $\rightarrow$ PO $\hat{\omega}_{p1} < \hat{\omega} < \hat{\omega}_{p2}$	$z^{-1} = -\dfrac{\hat{z}^{-2} - \left(\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)\hat{z}^{-1} + \dfrac{\beta-1}{\beta+1}}{\left(\dfrac{\beta-1}{\beta+1}\right)\hat{z}^{-2} - \left(\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)\hat{z}^{-1} + 1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\dfrac{\hat{\omega}_{p2} + \hat{\omega}_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{2}}$ $\beta = \operatorname{ctg}\dfrac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\omega_p}{2}$
NP $\rightarrow$ NPO $\hat{\omega} < \hat{\omega}_{p1} \cup \hat{\omega} > \hat{\omega}_{p2}$	$z^{-1} = \dfrac{\hat{z}^{-2} - \left(\dfrac{2\alpha}{1+\beta}\right)\hat{z}^{-1} + \dfrac{1-\beta}{1+\beta}}{\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)\hat{z}^{-2} - \left(\dfrac{2\alpha}{1+\beta}\right)\hat{z}^{-1} + 1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\dfrac{\hat{\omega}_{p2} + \hat{\omega}_{p1}}{2}}{\cos\dfrac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{2}}$ $\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\hat{\omega}_{p2} - \hat{\omega}_{p1}}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\omega_p}{2}$

Na Slici 14.24 prikazan je primjer frekvencijske transformacije funkcije prenosa NP filtra, sa graničnom učestanošću propusnog opsega $\omega_p = 1$, u funkciju prenosa NP filtra, čija je granična učestanost $\hat{\omega}_p = 1{,}5$, pri čemu je parametar skaliranja $\alpha = 0{,}2607$.



Slika 14.24 Primjer frekvencijske transformacije u digitalnom domenu kojom se funkcija prenosa NP filtra prevodi u funkciju prenosa NP filtra sa drugačijom graničnom učestanošću propusnog opsega.

Primjer 14.1:

Uporediti amplitudne karakteristike eliptičkih digitalnih filtara propusnika opsega, koje se dobiju metodom impulsne invarijanse i bilinearnom transformacijom, koristeći frekvencijske transformacije u analognom i digitalnom domenu. Granične frekvencije propusnog opsega su $F_{p1} = 905\,\text{Hz}$ i $F_{p2} = 1105\,\text{Hz}$, dok su granične frekvencije nepropusnih opsega $F_{s1} = 790\,\text{Hz}$ i $F_{s2} = 1120\,\text{Hz}$. Slabljenje u propusnom opsegu je $A_p = 3\,\text{dB}$, a u nepropusnim opsezima $A_s = 30\,\text{dB}$. Frekvencija odmjeravanja je $F_s = 2400\,\text{Hz}$.

Rješenje:

Specifikacije digitalnog filtra treba interpretirati u odnosu na datu frekvenciju odmjeravanja, tako da su granične digitalne učestanosti propusnog opsega digitalnog filtra $\omega_{p1} = 2\pi\left(F_{p1}/F_s\right) = 2,3693$ i $\omega_{p2} = 2\pi\left(F_{p2}/F_s\right) = 2,8929$, a granične digitalne učestanosti nepropusnih opsega $\omega_{s1} = 2\pi\left(F_{s1}/F_s\right) = 2,0682$ i $\omega_{s2} = 2\pi\left(F_{s2}/F_s\right) = 2,9322$.

Prvo ćemo razmotriti projektovanje filtra PO metodom impulsne invarijanse, koristeći frekvencijske transformacije u analognom, a zatim u digitalnom

domenu. Prije nego pristupimo projektovanju analognog NP prototipa, postavljene zahtjeve za filtar PO treba frekvencijskim transformacijama preslikati u zahtjeve za NP filtar. Normalizaciju učestanosti radimo sa učestanošću koja je geometrijska sredina graničnih učestanosti propusnog opsega, $\Omega_0 = 2\pi\sqrt{F_{p1}F_{p2}} = 2\pi \cdot 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Na osnovu (14.106), normalizovane granične učestanosti propusnog opsega analognog filtra PO se preslikavaju u graničnu učestanost propusnog opsega NP prototipa, $|\overline{\omega}_n| = 1$, dok se normalizovane granične učestanosti nepropusnih opsega analognog filtra PO preslikavaju u dvije granične učestanosti nepropusnog opsega NP prototipa, $|\overline{\omega}_{nis1}| = 2{,}3793$ i $|\overline{\omega}_{nis2}| = 1{,}1356$. Potrebno je projektovati NP prototip sa strožijim zahtjevom, određenim sa $|\overline{\omega}_{nis2}|$. Navedene specifikacije zadovoljava eliptički NP prototip petog reda, sa funkcijom prenosa:

$$H_{NPn}(s) = \frac{0{,}09998s^4 + 0{,}2909s^2 + 0{,}2013}{s^5 + 0{,}5669s^4 + 1{,}75s^3 + 0{,}7551s^2 + 0{,}7429s + 0{,}2013}. \quad (14.114)$$

Nakon frekvencijske transformacije u analognom domenu i denormalizacije učestanosti, dobija se da postavljene zahtjeve zadovoljava analogni filtar PO desetog reda, sa funkcijom prenosa:

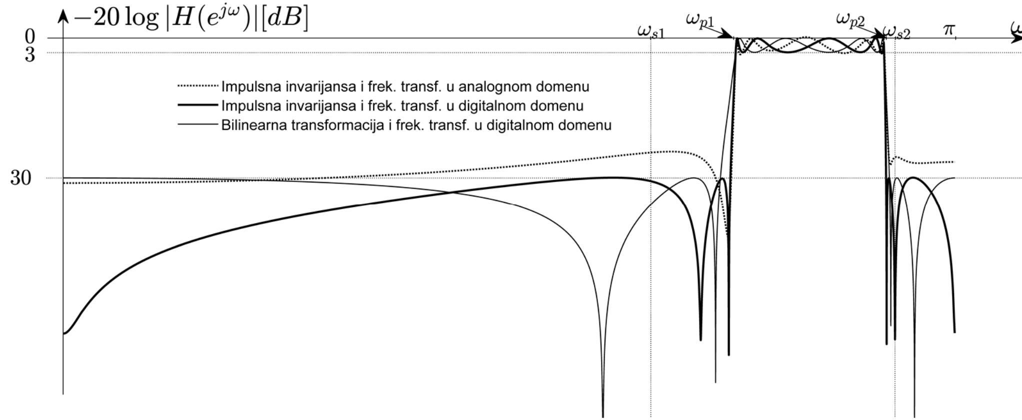
$$H_{PO}(s) = \frac{B_{PO}(s)}{A_{PO}(s)}, \quad (14.115)$$

čiji su polinomi u $B_{PO}(s)$ i $A_{PO}(s)$ oblika:

$$B_{PO}(s) = 125{,}6s^9 - 3{,}505 \cdot 10^{-11} s^8 + 2{,}042 \cdot 10^{10} s^7 - 0{,}003971 s^6 + 1{,}221 \cdot 10^{18} s^5 - \\ -1{,}453 \cdot 10^5 s^4 + 3{,}182 \cdot 10^{25} s^3 - 1{,}735 \cdot 10^{12} s^2 + 3{,}052 \cdot 10^{32} s,$$

$$A_{PO}(s) = s^{10} + 712{,}4s^9 + 2{,}002 \cdot 10^8 s^8 + 1{,}14 \cdot 10^{11} s^7 + 1{,}592 \cdot 10^{16} s^6 + 6{,}782 \cdot 10^{18} s^5 + \\ +6{,}283 \cdot 10^{23} s^4 + 1{,}777 \cdot 10^{26} s^3 + 1{,}232 \cdot 10^{31} s^2 + 1{,}731 \cdot 10^{33} s + 9{,}591 \cdot 10^{37}.$$

Preslikavanjem iz analognog u digitalni domen pomoću metoda impulsne invarijanse, dobija se digitalni filtar propusnik opsega, sa funkcijom prenosa:



Slika 14.25 Poređenje metoda projektovanja digitalnog filtra PO.

$$H_{POia}(z)=\frac{B_{POia}(z)}{A_{POia}(z)}, \tag{14.116}$$

gdje su polinomi u brojniku i nazivniku dati sa:

$$B_{POia}(z)=0{,}05235+0{,}3913z^{-1}+1{,}352\,z^{-2}+\;2{,}838z^{-3}+3{,}979z^{-4}+$$
$$+3{,}863z^{-5}+2{,}593z^{-6}+1{,}158z^{-7}+0{,}3112z^{-8}+0{,}03813z^{-9},$$

$$A_{POia}(z)=1+8{,}257z^{-1}+31{,}88z^{-2}+75{,}68z^{-3}+122{,}1z^{-4}+139{,}99z^{-5}+$$
$$+115{,}2z^{-6}+\;67{,}29z^{-7}+26{,}71z^{-8}+6{,}517z^{-9}+0{,}7432z^{-10}.$$

Sa Slike 14.25 se vidi da ovako dobijena amplitudna karakteristika, prikazana tačkastom linijom, ne ispunjava zahtjeve za minimalno potrebnim slabljenjem u nepropusnom opsegu. To je posljedica preklapanja spektra do kog dolazi kada se koristi metod impulsne invarijanse. Problem bi se mogao ublažiti povećanjem frekvencije odmjeravanja. Umjesto toga, vidjećemo da se bolji rezultati postižu ako se koriste frekvencijske transformacije u digitalnom domenu.

Kada se za projektovanje filtara koriste frekvencijske transformacije u digitalnom domenu, potrebno je prvo projektovati NP analogni filtar. Za graničnu učestanost njegovog propusnog opsega, koja treba da bude mala, kako

bismo umanjili izobličenja koja unosi metod impulsne invarijanse, proizvoljno biramo $\Omega_p = 32\,\text{rad/s}$. Funkciju prenosa ovakvog analognog NP filtra, sa slabljenjima u propusnom i nepropusnom opsegu od $3\,\text{dB}$ i $30\,\text{dB}$, respektivno, dobijamo denormalizacijom funkcije prenosa analognog NP prototipa sa učestanošću Ω_p:

$$H_{NP}(s) = \frac{3{,}199s^4 + 9531s^2 + 6{,}754\cdot 10^6}{s^5 + 18{,}14s^4 + 1792s^3 + 2{,}474\cdot 10^4 s^2 + 7{,}79\cdot 10^5 s + 6{,}754\cdot 10^6}. \tag{14.117}$$

Sada metodom impulsne invarijanse preslikamo funkciju prenosa ovog analognog NP filtra u digitalni domen i dobijemo funkciju prenosa digitalnog NP filtra u obliku:

$$H_{NPid}(z) = \frac{0{,}001333 - 0{,}005332z^{-1} + 0{,}007997z^{-2} - 0{,}005332z^{-3} + 0{,}001333z^{-4}}{1 - 4{,}992z^{-1} + 9{,}969z^{-2} - 9{,}954z^{-3} + 4{,}97z^{-4} - 0{,}9925z^{-5}}. \tag{14.118}$$

Konačno, njenom frekvencijskom transformacijom u digitalnom domenu, dobijamo funkciju prenosa digitalnog propusnika opsega:

$$H_{POid}(z) = \frac{B_{POid}(z)}{A_{POid}(z)}, \tag{14.119}$$

sa polinomima u brojniku i nazivniku:

$$B_{POid}(z) = 0{,}02587 + 0{,}1706z^{-1} + 0{,}4973z^{-2} + 0{,}8073\,z^{-3} + 0{,}7023z^{-4} + \\ + 0{,}09733z^{-5} - 0{,}5374z^{-6} - 0{,}7084z^{-7} - 0{,}4571z^{-8} - 0{,}1605z^{-9} - 0{,}0247z^{-10},$$

$$A_{POid}(z) = 1 + 8{,}387z^{-1} + 32{,}74z^{-2} + 78{,}29z^{-3} + 126{,}9z^{-4} + 145{,}5z^{-5} + \\ + 119.6z^{-6} + 69.54z^{-7} + 27.4z^{-8} + 6.612z^{-9} + 0.7428z^{-10}.$$

Za razliku od digitalnog filtra PO dobijenog frekvencijskom transformacijom u analognom domenu i metodom impulsne invarijanse, koji nema dovoljno slabljenje u nepropusnom opsegu, očitavanjem vrijednosti amplitudne karakteristike, koja je na Slici 14.25 prikazana tankom punom linijom, zaključujemo da ovako projektovan digitalni filtar ima minimalno slabljenje u

nepropusnom opsegu od $29,94\,\text{dB}$, što vrlo malo odstupa od specificiranog minimalnog potrebnog slabljenja od $30\,\text{dB}$.

Kada se za projektovanje digitalnih filtara koristi bilinearna transformacija, izobličenja amplitudne karakteristike digitalnog filtra, koja nastaju zbog nelinearnog preslikavanja, se koriguju predistorzijom učestanosti. Postavljene zahtjeve za granične učestanosti analognog filtra predistorzijom učestanosti treba korigovati tako da se njihove nove vrijednosti bilinearnom transformacijom preslikavaju u granične učestanosti digitalnog filtra, koji radi na zadatoj frekvenciji odmjeravanja. Na osnovu veze $F=\left(F_s/\pi\right)\text{tg}\dfrac{\omega}{2}$, ranije date sa (14.95), nove granične učestanosti propusnog opsega analognog filtra su $\hat{F}_{p1}=1879,0\,\text{Hz}$ i $\hat{F}_{p2}=6111,6\,\text{Hz}$, dok su granične učestanosti nepropusnih opsega $\hat{F}_{s1}=1284,1\,\text{Hz}$ i $\hat{F}_{s2}=7268,4\,\text{Hz}$. Normalizaciju učestanosti sada radimo sa $\hat{\Omega}_0=2\pi\sqrt{\hat{F}_{p1}\hat{F}_{p2}}=2\pi\cdot 3388,8\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, pa se sada normalizovane granične učestanosti propusnog opsega filtra PO preslikavaju u graničnu učestanost propusnog opsega NP prototipa, $\left|\overline{\omega}_n\right|=1$, dok se normalizovane granične učestanosti nepropusnih opsega ovog filtra PO preslikavaju u dvije granične učestanosti nepropusnog opsega NP prototipa, $\left|\overline{\omega}_{nbs1}\right|=1.8096$ i $\left|\overline{\omega}_{nbs2}\right|=1,3440$. Primijetimo da je, zbog predistorzije učestanosti, došlo do ublažavanja zahtjeva za strminom prelaznog opsega, pa je dovoljan eliptički NP prototip četvrtog reda, sa funkcijom prenosa:

$$\hat{H}_{NPn}(s)=\frac{0,0316s^4+0,2096s^2+0,2335}{s^4+0,5674s^3+1,3440s^2+0,4903s+0,3298}, \tag{14.120}$$

koja se, frekvencijskom transformacijom u analognom domenu, preslikava u funkciju prenosa filtra PO:

$$\hat{H}_{PO}(s)=\frac{\hat{B}_{PO}(s)}{\hat{A}_{PO}(s)}, \tag{14.121}$$

čiji su polinomi u $\hat{B}_{PO}(s)$ i $\hat{A}_{PO}(s)$ oblika:

$$\hat{B}_{PO}(s) = 0,03162s^8 - 1,383 \cdot 10^{-13} s^7 + 2,056 \cdot 10^8 s^6 - 0,0008048s^5 +$$
$$+2,902 \cdot 10^{17} s^4 - 9,096 \cdot 10^4 s^3 + 4,226 \cdot 10^{25} s^2 + 6,584 \cdot 10^{11} s + 1,336 \cdot 10^{33},$$

$$\hat{A}_{PO}(s) = s^8 + 1,509 \cdot 10^4 s^7 + 2,764 \cdot 10^9 s^6 + 2,974 \cdot 10^{13} s^5 +$$
$$+2,26 \cdot 10^{18} s^4 + 1,348 \cdot 10^{22} s^3 + 5,681 \cdot 10^{26} s^2 + 1,406 \cdot 10^{30} s + 4,224 \cdot 10^{34}.$$

Preslikavanjem iz analognog u digitalni domen pomoću bilinearne transformacije, dobija se digitalni filtar propusnik opsega, sa funkcijom prenosa:

$$H_{POba}(z) = \frac{B_{POba}(z)}{A_{POba}(z)}, \tag{14.122}$$

sa polinomima u brojniku i nazivniku:

$$B_{POba}(z) = 0,03801 + 0,2246z^{-1} + 0,6272\, z^{-2} + 1,093z^{-3} +$$
$$+1,305z^{-4} + 1,093z^{-5} + 0,6272z^{-6} + 0,22460z^{-7} + 0,03801z^{-8},$$

$$A_{POia}(z) = 1 + 6,681z^{-1} + 20,37z^{-2} + 36,98z^{-3} +$$
$$+43,66z^{-4} + 34,33z^{-5} + 17,56z^{-6} + 5,346z^{-7} + 0,7436z^{-8}.$$

Funkciju prenosa (14.122) smo dobili koristeći frekvencijske transformacije u analognom domenu, pa nakon toga bilinearnu transformaciju za preslikavanje iz analognog u digitalni domen. Pokazaćemo sada da se ista funkcija prenosa dobija ako se prvo primijeni bilinearna transformacija, a zatim frekvencijske transformacije u digitalnom domenu.

Frekvencijskom transformacijom u digitalnom domenu se funkcija prenosa digitalnog NP filtra transformiše u funkciju prenosa željenog digitalnog filtra. Stoga je prvo potrebno projektovati analogni NP filtar i izvršiti bilinearnu transformaciju funkcije prenosa analognog u funkciju prenosa digitalnog NP filtra. Za graničnu učestanost propusnog opsega NP filtra ćemo odabrati istu vrijednost koju smo koristili kod metoda impulsne invarijanse, $\Omega_p = 32\,\text{rad/s}$, te je funkcija prenosa analognog eliptičkog NP filtra četvrtog reda data sa:

$$\hat{H}_{NP}(s) = \frac{0,03162s^4 + 214,6s^2 + 2,449 \cdot 10^5}{s^4 + 18,16s^3 + 1376s^2 + 1,606 \cdot 10^4 s + 3,459 \cdot 10^5}. \tag{14.123}$$

Ova funkcija prenosa se bilinearnom transformacijom prevodi u funkciju prenosa digitalnog NP filtra:

$$H_{NPbd}(z) = \frac{0,03151 - 0,126z^{-1} + 0,189z^{-2} - 0,126z^{-3} + 0,03151z^{-4}}{1 - 3,992z^{-1} + 5,977z^{-2} - 3,977z^{-3} + 0,9925z^{-4}}, \quad (14.124)$$

a zatim se, primjenom Konstantinidesove transformacije NP filtra u filtar PO, dobije funkcija prenosa digitalnog filtra PO, koja je identična funkciji prenosa datoj sa (14.122). Za razliku od ostalih metoda preslikavanja iz analognog u digitalni domen, kada se koristi bilinearna transformacija, konačan oblik funkcije prenosa je isti, neovisno o tome da li se frekvencijske transformacije provode u analognom ili digitalnom domenu. Zaključujemo da amplitudna karakteristika filtra projektovanog bilinearnom transformacijom, prikazana na Slici 14.25 punom debelom linijom, u potpunosti ispunjava postavljene zahtjeve.

□

14.3 Projektovanje FIR filtara

Za razliku od IIR filtara gdje frekvencijsku karakteristiku oblikujemo mijenjajući položaje i nula i polova, kod FIR filtara oblik frekvencijske karakteristike određuje samo raspored nula u kompleksnoj *z*-ravni. Stoga se jednako stroge specifikacije postižu sa nižim redom IIR filtra nego što je to red FIR filtra, te FIR filtri unose veća kašnjenja i za njihovu realizaciju je potreban veći broj matematičkih operacija. Međutim, FIR filtri su uvijek stabilni i njima se daleko jednostavnije postiže linearna fazna karakteristika nego IIR filtrima, pa se FIR filtri uvijek primjenjuju kao frekvencijski selektivni sistemi u slučajevima kada je potrebno izbjeći fazna izobličenja. Klasični metodi projektovanja FIR filtara se zasnivaju na ograničavanju trajanja impulsnog odziva IIR digitalnog filtra, množenjem prozorskim sekvencama različitih oblika. Osim ovog metoda, često se koristi i metod projektovanja FIR filtara odmjeravanjem frekvencijske karakteristike, kojim se postiže da amplitudna karakteristika, u odabranim tačkama, ima zadate vrijednosti.

14.3.1 Metod množenja prozorskim sekvencama

Impulsni odziv filtra sa željenom frekvencijskom karakteristikom je, u opštem slučaju, beskonačnog trajanja, ali se često vrijednosti elemenata impulsnog odziva smanjuju tokom vremena. Stoga je, intuitivno gledano, najjednostavniji način dobijanja impulsnog odziva FIR filtra skraćenje trajanja impulsnog odziva IIR filtra, koji ispunjava zadate specifikacije, što se postiže njegovim množenjem sa prozorskom sekvencom konačnog trajanja.

Ako je željena frekvencijska karakteristika $H_D\left(e^{j\omega}\right)$, odgovarajući impulsni odziv IIR filtra možemo dobiti pomoću IDTFT:

$$h_D\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_D\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega . \qquad (14.125)$$

Na primjer, ako je željeni filtar idealni NP filtar, njegova frekvencijska karakteristika je data sa (13.29), a impulsni odziv sa (13.30).

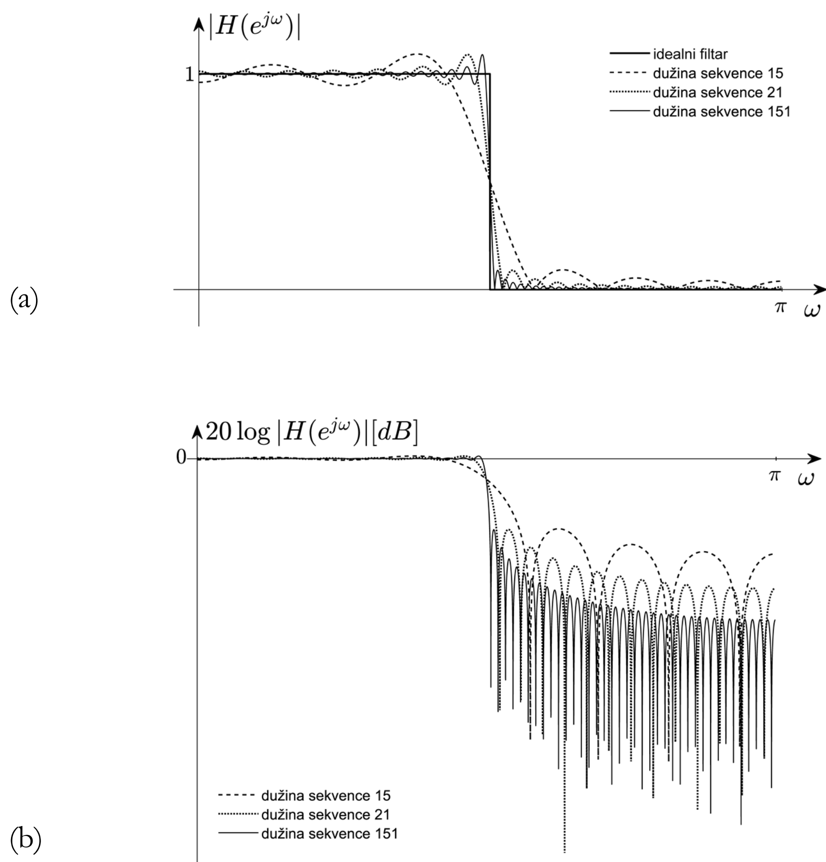
Nakon određivanja impulsnog odziva željenog IIR filtra, impulsni odziv FIR filtra, trajanja $N=2L-1$, se dobije množenjem sa prozorskom sekvencom:

$$h\left(n\right)=h_D\left(n\right)p\left(n\right), \qquad (14.126)$$

pri čemu je prozorska sekvenca:

$$p\left(n\right)=0, \left|n\right|\geq L . \qquad (14.127)$$

Frekvencijsku karakteristiku dobijenog FIR filtra određujemo kao DTFT od $h\left(n\right)$. Ona se razlikuje od zadate jer, posmatrano u frekvencijskom domenu, nastaje kao cirkularna konvolucija željene frekvencijske karakteristike $H_D\left(e^{j\omega}\right)$ i DTFT prozorske sekvence $p\left(n\right)$, $P\left(e^{j\omega}\right)$. Amplitudne karakteristike FIR filtara, dobijenih množenjem impulsnog odziva idealnog NP filtra, kod koga je granica propusnog opsega $\omega_p=\pi/2$, sa pravougaonim prozorskim sekvencama trajanja 15, 21 i 151, prikazane su na Slici 14.26(a), a njihove krive pojačanja na Slici 14.26(b). Primjetno je da dolazi do glačanja amplitudne karakteristike, u



Slika 14.26 FIR filtri projektovani množenjem pravougaonim prozorskim sekvencama različitog trajanja: (a) amplitudne karakteristike i (b) krive pojačanja.

smislu ublažavanja skokovitih promjena, uz neželjena talasanja koja u propusnom opsegu povećavaju, a u nepropusnom opsegu smanjuju slabljenje.

Efekte ove aproksimacije lakše analiziramo ako frekvencijsku karakteristiku $H_D\left(e^{j\omega}\right)$ željenog digitalnog filtra, koja je periodična funkcija po ω sa periodom 2π, razvijemo u Furijeov red:

$$H_D\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega n}, \tag{14.128}$$

gdje je:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega . \tag{14.129}$$

Napomenimo da su u ovom razvoju u Furijeov red vremenski i frekvencijski domen zamijenili uloge, posmatrano u odnosu na uobičajenu formulaciju razvoja u Furijeov red. Poredeći (14.129) sa (14.125) zaključujemo da koeficijenti ovog Furijeovog reda predstavljaju impulsni odziv željenog digitalnog filtra $h_D(n)$. To znači da, ako impulsni odziv FIR filtra dobijemo iz $h_D(n)$ množenjem pravougaonom prozorskom sekvencom, zapravo aproksimiramo željenu frekvencijsku karakteristiku $H_D\left(e^{j\omega}\right)$ zadržavajući samo konačan broj članova njenog razvoja u Furijeov red. Prekinuti razvoj u Furijeov red je optimalna aproksimacija sa stanovišta srednje kvadratne greške, pa se može reći da se ovim metodom projektuje filtar koji je optimalan u smislu minimizacije srednje kvadratne greške aproksimacije amplitudne karakteristike. Optimalnim filtrima ćemo više pažnje posvetiti u Glavi 15.

Prekinuti razvoj u Furijeov red, koji je ekvivalent korištenju pravougaone prozorske sekvence za ograničavanje trajanja impulsnog odziva, za posljedicu ima oscilatorno ponašanje u okolini skokovitih promjena, pojavu poznatu pod nazivom Gibsov (Josiah Willard Gibbs) fenomen. Zbog ovog takozvanog "zvonjenja" u amplitudnoj karakteristici, slabljenje u dijelovima propusnog opsega je preveliko, a u dijelovima nepropusnog opsega nedovoljno, te direktno odsijecanje impulsnog odziva nije zadovoljavajući metod za aproksimaciju frekvencijske karakteristike filtra.

Gibsov fenomen možemo posmatrati i kao rezultat cirkularne konvolucije željene frekvencijske karakteristike, $H_D\left(e^{j\omega}\right)$, i DTFT prozorske sekvence, $P\left(e^{j\omega}\right)$. Pri povećanju dužine prozorske sekvence dolazi do sužavanja glavnog i bočnih lukova u njenom spektru, što pri cirkularnoj konvoluciji daje uži prelazni opseg, kao što smo vidjeli na Slici 14.26. Međutim, amplituda oscilacija se ne smanjuje, jer istovremeno sa sužavanjem spektra prozorske sekvence dolazi i do njegovog povećanja, pa vrijednosti maksimuma cirkularne konvolucije ostaju nepromijenjene. Problem se ublažava primjenom prozorskih sekvenci drugačijih oblika, čiji efekat treba da bude bolje glačanje amplitudne karakteristike. To se postiže smanjenjem bočnih lukova u spektru prozorskih funkcija, na uštrb povećanja širine glavnog luka, te je cijena koja se pri tome plaća proširenje prelaznog opsega filtra. Najčešće korištene prozorske sekvence su Bartletova, Hanova, Hamingova, Blakmenova i Kajzerova, čiji su analitički izrazi dati u Tabeli 8.1, a uporedni prikaz frekvencijskih karakteristika na Slici 8.10.

Prilikom projektovanja FIR filtara ovom metodom koristimo Tabelu 14.2. Prvo, na osnovu minimalno potrebnog slabljenja u nepropusnom opsegu, odaberemo tip prozorske sekvence, a zatim, na osnovu širine prelaznog opsega, izračunamo njenu potrebnu dužinu, *N*. Kod Kajzerove sekvence iznos slabljenja u nepropusnom opsegu zavisi od parametra β, čija se vrijednost određuje na osnovu empirijskog izraza:

$$\beta = \begin{cases} 0, & R_s \le 21\,\mathrm{dB}, \\ 0{,}5842\left(R_s - 21\right)^{0{,}4} + 0{,}07886\left(R_s - 21\right), & 21\,\mathrm{dB} < R_s \le 50\,\mathrm{dB}, \\ 0{,}1102\left(R_s - 8{,}7\right), & R_s > 50\,\mathrm{dB}. \end{cases} \tag{14.130}$$

Pod pretpostavkom da se projektuje niskopropusni filtar, minimalna potrebna dužina Kajzerove prozorske sekvence se određuje koristeći empirijski izraz:

$$N = \begin{cases} \dfrac{1{,}8\pi}{\Delta\omega}, & R_s \le 21\,\mathrm{dB}, \\ \dfrac{R_s - 7{,}95}{2{,}285\Delta\omega}, & R_s > 21\,\mathrm{dB}, \end{cases} \tag{14.131}$$

gdje je $\Delta\omega$ širina prelaznog opsega.

Tabela 14.2 Vrijednosti parametara prozorskih sekvenci koje se koriste za projektovanje FIR filtara.

Naziv sekvence	Širina prelaznog opsega	Maksimalno slabljenje u propusnom opsegu	Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu
Pravougaona	$\frac{1,8\pi}{N}$	0,75 dB	21 dB
Bartletova (Trougaona)	$\frac{5,6\pi}{N}$	0,45 dB	26 dB
Hanova	$\frac{6,2\pi}{N}$	0,055 dB	44 dB
Hamingova	$\frac{6,6\pi}{N}$	0,019 dB	53 dB
Blakmenova	$\frac{11\pi}{N}$	0,0017 dB	74 dB

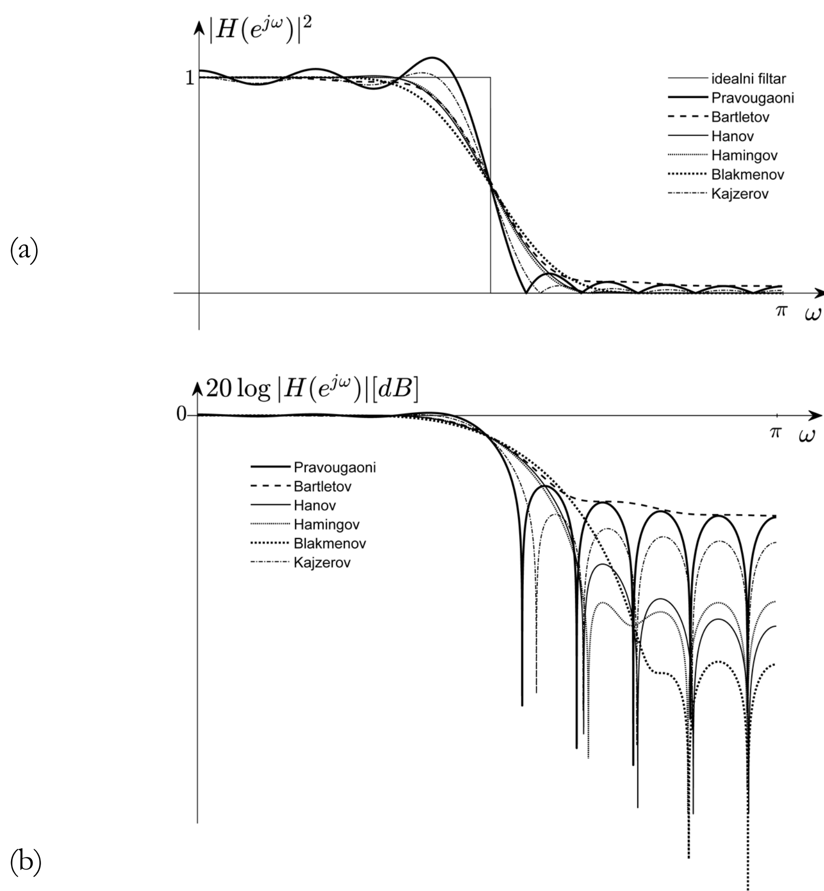
Za aproksimativno izračunavanje vrijednosti elemenata Beselove sekvence iz Tabele 8.1 može se koristiti prvih K članova reda (u praksi se uzima $K \approx 20$):

$$I_0(\beta) = \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{(\beta/2)^k}{k!} \right)^2 . \tag{14.132}$$

Na Slici 14.27 su prikazane karakteristike FIR filtara projektovanih metodom množenja prozorskim sekvencama.

(a)

(b)



Slika 14.27 Poređenje FIR filtara projektovanih množenjem prozorskim sekvencama dužine 21: (a) amplitudne karakteristike i (b) krive pojačanja.

14.3.2 Metod odmjeravanja frekvencijske karakteristike

Pojektovanje FIR filtara metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike omogućava postizanje željenih vrijednosti u tačkama odmjeravanja, dok odstupanja frekvencijske karakteristike projektovanog filtra od zadate frekvencijske karakteristike u ostalim tačkama mogu biti značajna.

Ukoliko znamo vrijednosti frekvencijske karakteristike u *N* tačaka, tj. za $\omega = \omega_k$, $k = 0,1,\cdots,N-1$, najjednostavniji način razmišljanja nas vodi do zaključka da je moguće uvrštavanjem tih parova vrijednosti u $H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$ formirati *N* jednačina sa *N* nepoznatih iz kojih ćemo odrediti *N* elemenata impulsnog odziva. Na taj način zapravo vršimo aproksimaciju frekvencijske karakteristike trigonometrijskim polinomom, jer je:

$$\left(e^{j\omega}\right)^n = e^{jn\omega} \Rightarrow \left(\cos\omega + j\sin\omega\right)^n = \cos n\omega + j\sin n\omega, \qquad (14.133)$$

pri čemu su elementi impulsnog odziva koeficijenti trigonometrijskih polinoma. To se lako uočava na primjerima FIR filtara *N*-tog reda sa linearnom faznom karakteristikom, čije su frekvencijske karakteristike date sa (13.37)-(13.40). Za polinom *N*-tog reda je moguće odrediti njegove koeficijente, tj. elemente impulsnog odziva, tako da on prolazi kroz N zadatih tačaka, te će filtar sa tako određenim impulsnim odzivom imati frekvencijsku karakteristiku koja je u tačkama odmjeravanja jednaka zadatim vrijednostima. Na ostalim učestanostima frekvencijska karakteristika će biti aproksimirana trigonometrijskim polinomom *N*-tog reda.

<u>Primjer 14.2:</u>

Odrediti elemente impulsnog odziva FIR filtra tipa I, petog reda, ako su poznate vrijednosti njegove frekvencijske karakteristike u 3 tačke: $H\left(e^{j0}\right) = 1$, $H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $H\left(e^{j\pi}\right) = 0$.

Rješenje:

Da bismo odredili elemente impulsnog odziva FIR filtra tipa I, petog reda, zbog simetrije impulsnog odziva, dovoljno je poznavati vrijednosti frekvencijske karakteristike u 3 tačke. Zahtijevane vrijednosti frekvencijske karakteristike uvrštavamo u izraz za frekvencijsku karakteristiku traženog filtra:

$$H_{\mathrm{I}}\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{h_{\mathrm{I}}\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2h_{\mathrm{I}}(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]\right\}$$

i tako formiramo 3 jednačine:

$$H_{\mathrm{I}}\left(e^{j0}\right)=2h_{\mathrm{I}}(0)+2h_{\mathrm{I}}(1)+h_{\mathrm{I}}(2)=1\,,$$

$$H_{\mathrm{I}}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}h_{\mathrm{I}}(1)+h_{\mathrm{I}}(2)=e^{-j\frac{\pi}{4}}\,,$$

$$H_{\mathrm{I}}\left(e^{j\pi}\right)=2h_{\mathrm{I}}(0)-2h_{\mathrm{I}}(1)+h_{\mathrm{I}}(2)=0\,,$$

iz kojih određujemo elemente impulsnog odziva:

$$h(2)=0,6464\,,$$

$$h(0)=h(4)=-0,0732\,,$$

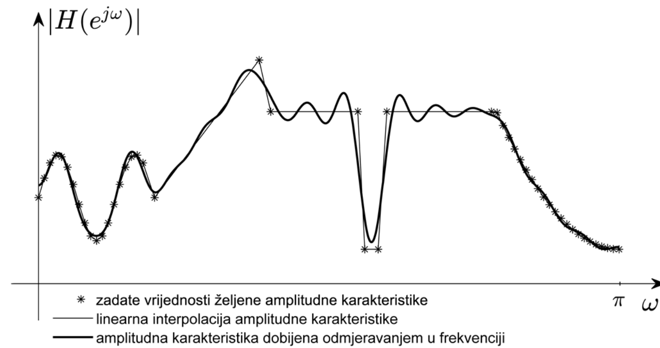
$$h(1)=h(3)=0,25\,.$$

□

Način određivanja vrijednosti elemenata impulsnog odziva FIR filtra prikazan u prethodnom primjeru nije praktičan za filtre višeg reda, jer zahtijeva velik broj matematičkih operacija. Drugi, efikasniji, pristup se zasniva na činjenici da DFT impulsnog odziva predstavlja uniformno odmjerenu frekvencijsku karakteristiku digitalnog filtra:

$$H(k)=H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\,,\ k=0,1,\ldots,N-1\,. \tag{14.134}$$

Inverznom DFT od $H(k)$ se dobija impulsni odziv filtra konačnog trajanja:



Slika 14.28 Amplitudne karakteristike željenog i FIR filtra 64. reda dobijenog metodom odmjeravanja u frekvenciji, koristeći IDFT u 8192 tačke.

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk} , \tag{14.135}$$

čija frekvencijska karakteristika u tačkama odmjeravanja ima zadate vrijednosti $H(k),\ k = 0,1,...,N-1$. Funkciju prenosa ovako projektovanog filtra lako nađemo kao *z*-transformaciju impulsnog odziva:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}} . \tag{14.136}$$

Projektovanje filtra se zasniva na relaciji (14.136), jer se funkcija prenosa filtra, koji ima zadate vrijednosti frekvencijske karakteristike $H(k),\ k = 0,1,...,N-1$ u uniformno raspoređenim tačkama frekvencijske ose, dobije jednostavnim uvrštavanjem tih vrijednosti u (14.136). Primjer amplitudne karakteristike ovako projektovanog filtra je dat na Slici 14.28.

Dodatna poboljšanja se mogu postići ako se frekvencijska karakteristika zada u većem broju tačaka nego što je red filtra, ili ako se izvrši njena interpolacija u frekvencijskom domenu. Pri takvom pristupu, inverzna DFT se radi u mnogo većem broju tačaka nego što je red filtra, a zatim koriste prozorske sekvence za skraćivanje impulsnog odziva, kako bi se dobio traženi red filtra.

Glava 15

OPTIMALNI I ADAPTIVNI FILTRI

Optimalni filtri se projektuju tako da imaju najbolje moguće performanse po nekom specifičnom kriterijumu. To se postiže minimizacijom kriterijumske funkcije, kojom se opisuje odstupanje projektovanih od specificiranih karakteristika filtra, npr. frekvencijske karakteristike ili impulsnog odziva, ili maksimizacijom kvaliteta signala, ponekad uz određena ograničenja. Optimalni filtri se često koriste u situacijama gdje je signal narušen šumom. Tada se signal koji se filtrira posmatra kao jedna realizacija slučajnog procesa, a za projektovanje filtara je potrebno poznavati njegove statističke osobine. Prilikom filtriranja slučajnih procesa cilj je da se na izlazu filtra generišu realizacije slučajnog procesa koje što je moguće manje odstupaju od realizacija željenog slučajnog procesa. *Adaptivni filtri* u toku rada mijenjaju svoje karakteristike na osnovu informacija sadržanih u ulaznim podacima, što ih čini prikladnim za dinamička okruženja u kojima se statističke osobine signala i šuma mijenjaju tokom vremena. Pri projektovanju adaptivnih filtara nije potrebno poznavati statističke osobina signala i šuma, već se koriste iterativni algoritmi za podešavanje koeficijenata impulsnog odziva u vremenskim intervalima između svaka dva uzastopna odmjerka ulaznog signala, po nekom odabranom kriterijumu optimalnosti. U tu svrhu se koriste algoritmi za adaptivno učenje, kao što su metod najbržeg spusta i metod rekurzivnih najmanjih kvadrata.

15.1 Optimalni FIR filtri

Već smo pominjali da idealni filtar ne možemo implementirati u praksi. Stoga moramo prihvatiti neku vrstu kompromisa pri projektovanju bilo kojeg praktično realizibilnog filtra. U tom smislu, projektovanje digitalnih filtara možemo posmatrati kao pronalaženje optimalne aproksimacije željenog frekvencijskog odziva, prema nekom kriterijumu optimalnosti, u odnosu na skup realizibilnih koeficijenata filtra. U nekim aplikacijama, npr. filtriranju audio signala, kriterijum optimalnosti je teško precizno matematički definisati, jer je u proces ocjene kvaliteta filtriranog signala uključena i ljudska percepcija. Stoga je vrijedno razmotriti i suboptimalne metode, koje pronalaze rješenje koje je dovoljno blizu optimalnom, a imaju druge prednosti, kao što su jednostavnost realizacije i/ili brzina rada.

Jedan od najčešće korištenih kriterijuma optimalnosti u obradi signala je minimum srednje kvadratne greške, koja se definiše preko L_2 norme, drugim korijenom iz sume kvadrata svih odstupanja od željene vrijednosti. Pri projektovanju filtara to se odnosi na odstupanja projektovane od željene amplitudne karakteristike ili odstupanja projektovanog impulsnog odziva od željenog impulsnog odziva. Neka je $\mathbf{h} = \left[h(0), h(1), \cdots, h(M)\right]$ impulsni odziv željenog kauzalnog FIR filtra, i neka $\hat{\mathbf{h}} = \left[\hat{h}(0), \hat{h}(1), \cdots, \hat{h}(M)\right]$ označava impulsni odziv projektovanog kauzalnog FIR filtra. Tada grešku preko L_2 norme definišemo sa:

$$J_2\left(\hat{\mathbf{h}}\right) = \left\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\right\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{M}\left|h(n) - \hat{h}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{15.1}$$

Problem projektovanja optimalnog filtra se svodi na pronalaženje optimalnih vrijednosti elemenata impulsnog odziva $\hat{\mathbf{h}}$, za koje greška $J_2\left(\hat{\mathbf{h}}\right)$ ima minimum. Takav postupak optimizacije nazivamo *metod najmanjih kvadrata*.

Prilikom projektovanja digitalnih filtara, kriterijum optimalnosti možemo, umjesto za odstupanje impulsnog odziva od željenih vrijednosti, vezati za

odstupanje frekvencijske karakteristike od željenog oblika. Ako se filtar projektuje metodom najmanjih kvadrata, tako da se postigne optimalna aproksimacija impulsnog odziva, na osnovu Parsevalove teoreme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)-\hat{h}(n)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\omega}\right)-\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega, \tag{15.2}$$

gdje su $H\left(e^{j\omega}\right)=\text{DTFT}\left\{h(n)\right\}$ i $\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)=\text{DTFT}\left\{\hat{h}(n)\right\}$ frekvencijske karakteristike željenog i projektovanog filtra, respektivno, zaključujemo da je i frekvencijska karakteristika projektovanog filtra optimalna aproksimacija frekvencijske karakteristike željenog filtra, po kriterijumu najmanjih kvadrata.

Na sličan način možemo projektovati filtre koristeći kriterijum optimalnosti kojim se zahtijeva minimizacija greške definisana preko L_p norme:

$$J_p\left(\hat{\mathbf{h}}\right)=\left\|\mathbf{h}-\hat{\mathbf{h}}\right\|_p=\left(\sum_{n=0}^{M}\left|h(n)-\hat{h}(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15.3}$$

U graničnom slučaju, kada $p\to\infty$, u normi L_p dominira maksimalni element sume (15.3). Ta činjenica se koristi pri projektovanju optimalnih Čebiševljevih filtara, minimizacijom maksimalnog odstupanja frekvencijske karakteristike od željenog oblika. U nastavku ovog poglavlja ćemo detaljno obraditi metod najmanjih kvadrata i njegove primjene u projektovanju digitalnih FIR filtara, a zatim i optimalne Čebiševljeve filtre.

15.1.1 Metod najmanjih kvadrata

Jedan od najjednostavnijih optimizacionih metoda projektovanja digitalnih filtara je metod najmanjih kvadrata. Osim za projektovanje filtara, metod najmanjih kvadrata se primjenjuje i prilikom rješavanja drugih problema digitalne obrade signala, a i šire. U ovom poglavlju ćemo, osim za projektovanje filtra sa željenom amplitudnom karakteristikom, metod najmanjih kvadrata upotrijebiti i za projektovanje filtra za predikciju signala.

Posmatrajmo preodređen sistem linearnih jednačina:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(L) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0M} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M0} & a_{M1} & \cdots & a_{MM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L0} & a_{L1} & \cdots & a_{LM} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}, \tag{15.4}$$

kod koga je broj redova matrice $\mathbf{A}$ veći od broja kolona $(L > M)$. Ovaj sistem jednačina u matričnom obliku zapisujemo sa:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,. \tag{15.5}$$

Pretpostavićemo da su kolone matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisne. Budući da ne možemo pronaći rješenje za $\mathbf{x}$ koje zadovoljava sve jednačine, traži se aproksimativno rješenje $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}}$, koje je optimalno po nekom kriterijumu. Jedan od najčešće korištenih metoda za određivanje aproksimativnog rješenja je metod najmanjih kvadrata, kod koga se rješenje traži tako da se minimizira energija greške (kvadrat greške definisane preko L_2 norme), koja je data sa:

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2\,. \tag{15.6}$$

Zapisano u razvijenom obliku, imamo da je:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}\ . \end{aligned} \tag{15.7}$$

Primijetimo da su svi članovi greške u (15.7) skalari. Pored toga, član $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ je transponovan u odnosu na $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, pa ta dva skalarna člana imaju jednake vrijednosti. Greška $J(\mathbf{x})$ je kvadratnog oblika, te ima globalni minimum, koji se može pronaći izjednačavajući gradijent:

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_0} & \dfrac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_M} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = -2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{15.8}$$

sa nulom. Na taj način dobijamo sistem tzv. *normalnih jednačina*:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} . \tag{15.9}$$

Uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ invertibilna, rješenje normalnih jednačina je dato sa:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} . \tag{15.10}$$

Matrica $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ poznata je pod nazivom pseudoinverz matrice $\mathbf{A}$. Dobijeno rješenje je optimalno rješenje preodređenog sistema linearnih jednačina (15.5) u smislu najmanjih kvadrata:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \left\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right\|_2^2 = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} . \tag{15.11}$$

Budući da metodom najmanjih kvadrata minimiziramo Euklidovu distancu, geometrijska interpretacija ovog postupka, data na Slici 15.1, nam sugeriše da se najmanja greška postiže podešavajući komponente $\left[x(0), x(1), \cdots, x(M)\right]^{\mathrm{T}}$ vektora $\mathbf{x}$ sve dok vektor greške $\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ ne postane ortogonalan na vektor:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x(0)\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{M0} \\ \vdots \\ a_{L0} \end{bmatrix} + x(1)\begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \\ \vdots \\ a_{L1} \end{bmatrix} + \cdots + x(M)\begin{bmatrix} a_{0M} \\ a_{1M} \\ \vdots \\ a_{MM} \\ \vdots \\ a_{LM} \end{bmatrix}, \tag{15.12}$$

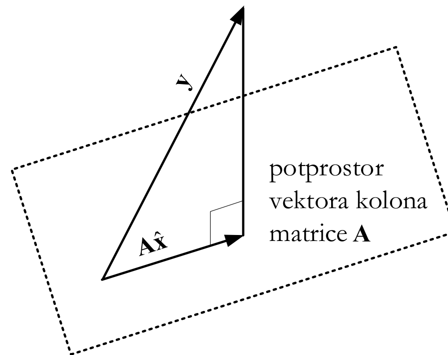
odnosno na vektorski potprostor koji formiraju vektori kolona matrice $\mathbf{A}$. Tada vrijedi da je:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}, \tag{15.13}$$

što je poznato kao *princip ortogonalnosti*.

Koristeći princip ortogonalnosti dobijamo da je:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{15.14}$$



Slika 15.1 Geometrijska interpretacija principa ortogonalnosti.

te na jednostavniji način dolazimo do istog rješenja koje smo već dobili izjednačavajući gradijent greške $J(\mathbf{x})$ sa nulom:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}. \tag{15.15}$$

15.1.2 Projektovanje FIR filtara metodom najmanjih kvadrata

Neka je željena amplitudna karakteristika FIR filtra reda N zadana u $L+1$ tačaka sa $\left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right|$, $k=0,1,\ldots,L$, pri čemu je $L \gg N$. Pretpostavimo da projektujemo FIR filtar sa linearnom faznom karakteristikom tipa I i da je frekvencijska karakteristika filtra realna, tako da vrijedi da je $H\left(e^{j\omega_k}\right)=\left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right|$. Prvo ćemo projektovati nekauzalnu verziju ovog filtra, koja se dobije translacijom impulsnog odziva, tako da bude simetričan oko ishodišta. Nakon završenog projektovanja, elemente impulsnog odziva kauzalnog FIR filtra tipa I jednostavno dobijamo translacijom za $M=(N-1)/2$ diskretnih vremenskih jedinica. U zadanim tačkama za frekvencijsku karakteristiku vrijedi da je:

$$H\left(e^{j\omega_k}\right)=h(0)+2\sum_{n=1}^{M}h(n)\cos\omega_k n,\ k=0,1,\ldots,L. \tag{15.16}$$

U razvijenom matričnom obliku možemo napisati $L+1$ jednačina sa $M+1$ nepoznatih vrijednosti elemenata impulsnog odziva koje želimo da odredimo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H\left(e^{j\omega_0}\right) \\ H\left(e^{j\omega_1}\right) \\ \vdots \\ H\left(e^{j\omega_M}\right) \\ \vdots \\ H\left(e^{j\omega_L}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2\cos(\omega_0) & \cdots & 2\cos(\omega_0 M) \\ 1 & 2\cos(\omega_1) & \cdots & 2\cos(\omega_1 M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2\cos(\omega_M) & \cdots & 2\cos(\omega_M M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2\cos(\omega_L) & \cdots & 2\cos(\omega_L M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}. \tag{15.17}$$

Sistem jednačina $\mathbf{H}=\mathbf{Ah}$ je preodređen. Elemente impulsnog odziva možemo odrediti metodom najmanjih kvadrata, na sljedeći način:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}}=\arg\min_{\mathbf{h}}\left\|\mathbf{H}-\mathbf{Ah}\right\|_2^2=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}. \tag{15.18}$$

Tako projektovan filtar je optimalan u smislu najmanjih kvadrata. Sličan postupak se može provesti i za druge tipove FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom.

15.1.3 Linearna predikcija

Ukoliko su korelisane, vrijednosti elemenata vremenske sekvence u budućim trenucima se mogu procijeniti na osnovu poznatih vrijednosti elemenata te sekvence u prošlosti i u tekućem trenutku. Ovaj postupak se naziva *predikcija unaprijed*. Jedan od načina predviđanja vrijednosti budućih elemenata vremenske sekvence koristi linearnu kombinaciju poznatih vrijednosti, pa tada govorimo o *linearnoj predikciji*. Na sličan način se može uraditi i procjena nedostajućih vrijednosti elemenata signala u prošlosti, što se naziva *predikcija unazad*. Mi ćemo naše razmatranje ograničiti na linearnu predikciju unaprijed. Signal koji sadrži

predviđene vrijednosti signala $x(n)$ ćemo nazvati predikcija signala i označiti sa $\breve{x}(n)$. Predikciju signala u trenutku $n+1$ možemo formirati kao linearnu kombinaciju na osnovu $M+1$, do tog trenutka poznatih, vrijednosti signala:

$$\breve{x}(n+1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M). \tag{15.19}$$

Sistem koji, na ovaj način, vrši predikciju signala nazivamo *linearni prediktor*. Primijetimo da je linearni prediktor filtar sa konačnim impulsnim odzivom. Koeficijenti prediktora $b_0, b_1,, \cdots, b_M$ su jednaki elementima njegovog impulsnog odziva. Oni se mogu odrediti metodom najmanjih kvadrata iz sistema od $N > M+1$ jednačina, dobijenih iz (15.19), uvrštavanjem da je $n = M, M+1, \ldots, M+N-1$, uz poznate vrijednosti elemenata signala iz prošlosti iz opsega $0 \le n \le N+M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M+1) \\ x(M+2) \\ \vdots \\ x(M+N) \end{bmatrix}}_{\breve{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) & x(M-1) & \cdots & x(0) \\ x(M+1) & x(M) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(M+N-1) & x(M+N-2) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \tag{15.20}$$

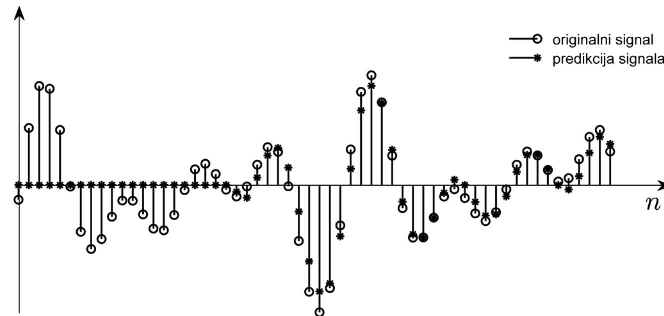
Pri tome smatramo da vektor $\left[x(M+1), \ldots, x(M+N)\right]^{\mathrm{T}}$ sadrži poznate vrijednosti elementata signala. Optimalni koeficijenti prediktora određeni metodom najmanjih kvadrata iz sistema jednačina:

$$\breve{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{b}, \tag{15.21}$$

su dati sa:

$$\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{o}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \breve{\mathbf{x}}. \tag{15.22}$$

Jednom kad se odrede koeficijenti prediktora, rekurzivna jednačina (15.19) se može koristiti za procjenu budućih vrijednosti signala, za $n \ge M+N+1$. Tokom vremena, kako pristižu nove informacije o signalu i nove vrijednosti elemenata signala postaju poznate, sistem (15.21) se može ponovo rješavati sa ciljem korekcije vrijednosti koeficijenata prediktora. Primjer predikcije signala prediktorom trećeg reda dat je na Slici 15.2.



Slika 15.2 Predikcija signala prediktorom trećeg reda. Prvih 20 elemenata sekvence je korišteno za određivanje koeficijenata prediktora.

15.1.4 Optimalni filtri za glačanje signala

Glačanje signala (eng. *smoothing*) je vrsta filtriranja signala koja ima za cilj uklanjanje šuma kreiranjem verzije signala koja će biti više glatka, a uz to što je moguće sličnija originalnom signalu. Budući da derivacije ukazuju na promjene u signalu, glatkoća signala se mjeri energijom njegovih derivacija. Što je signal više gladak, njegove derivacije sadrže manje energije.

Kod ove vrste filtara se ne traže optimalne vrijednosti impulsnog odziva na osnovu zahtjeva postavljenih za frekvencijsku karakteristiku, već se određuje optimalno rješenje za signal na izlazu filtra. Kada radimo sa diskretnim signalima, umjesto derivacija koristimo diferencije. Definišimo matricu:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15.23}$$

Tada je $\mathbf{Dx}$ diferencija drugog reda (diskretna forma druge derivacije) signala $x(n)$. Što je signal $x(n)$ više gladak, energija $\|\mathbf{Dx}\|_2^2$ njegove druge diferencije je

manja. Ako je $x(n)$ signal sa šumom, a $y(n)$ njegova glatka verzija, onda optimalni signal $y(n)$ možemo dobiti kao rješenje problema definisanog sa:

$$\min_{\mathbf{y}}\left\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2+\lambda\|\mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2\right\}, \tag{15.24}$$

gdje parametar $\lambda > 0$ treba specificirati. Ako stavimo da je $\lambda \approx 0$ onda minimiziramo samo $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2$ i tražimo rješenje za $y(n)$ forsirajući da signal $y(n)$ bude što sličniji signalu $x(n)$. Takav signal će biti vrlo malo zaglađen. Povećavajući vrijednost parametra λ forsiramo minimizaciju $\|\mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2$ i pronalaženje što je moguće više glatkog signala $y(n)$. Pogodnim izborom parametra λ možemo postići minimizaciju po oba kriterijuma, tako da tražimo da signal $y(n)$ bude istovremeno i gladak i sličan signalu $x(n)$.

Rješenje dobijamo minimizacijom funkcije greške:

$$J(\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2+\lambda\|\mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2, \tag{15.25}$$

izjednačavajući njen gradijent sa nulom:

$$\frac{\partial J(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}=2(\mathbf{y}-\mathbf{x})+2\lambda\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y}=\mathbf{0}. \tag{15.26}$$

Optimalno rješenje se dobije u obliku:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{o}}=\left(\mathbf{I}+\lambda\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{x}. \tag{15.27}$$

Uzimajući u obzir da je matrica $\mathbf{I}+\lambda\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}$ trakasta (jedine vrijednosti koje nisu nula su blizu glavne dijagonale), moguće je pronaći brze algoritme za njeno invertovanje.

Drugi pristup glačanju signala zasniva se na fitovanju polinoma u okvire podataka sa šumom, a poznat je i pod nazivom Savicki (Abraham Savitzky) - Golej (Marcel J. E. Golay) filtriranje. Optimalni signal na izlazu filtra se dobije modeliranjem signala fitovanim polinomom unaprijed zadanog reda. Određivanje koeficijenata polinoma se vrši metodom najmanjih kvadrata, tako

da se postigne minimalna srednja kvadratna greška odstupanja polinoma od signala u zadanim tačkama. Neka je red polinoma koji fitujemo M, tako da je:

$$p(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_M n^M, \tag{15.28}$$

i neka je $\{n_0, n_1, n_2, \cdots, n_N\}$ skup tačaka u kojima želimo postići najmanje odstupanje polinoma od signala. Formirajmo preodređen sistem jednačina, izjednačavajući vrijednosti polinoma sa vrijednostima signala u tim tačkama:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_M n_0^M &= x(n_0), \\ a_0 + a_1 n_1 + a_2 n_1^2 + \cdots + a_M n_1^M &= x(n_1), \\ a_0 + a_1 n_2 + a_2 n_2^2 + \cdots + a_M n_2^M &= x(n_2), \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 n_N + a_2 n_N^2 + \cdots + a_M n_N^M &= x(n_N). \end{aligned} \tag{15.29}$$

Uz oznake: $\mathbf{x} = \left[x(n_0), x(n_1), \ldots, x(n_N)\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{a} = \left[a_0, a_1, \ldots, a_M\right]^{\mathrm{T}}$ i

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & n_0 & n_0^2 & \cdots & n_0^M \\ 1 & n_1 & n_1^1 & \cdots & n_1^M \\ 1 & n_2 & n_2^2 & \cdots & n_2^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n_N & n_N^2 & \cdots & n_N^M \end{bmatrix}, \tag{15.30}$$

u matričnom obliku možemo pisati da je:

$$\mathbf{Qa} = \mathbf{x}. \tag{15.31}$$

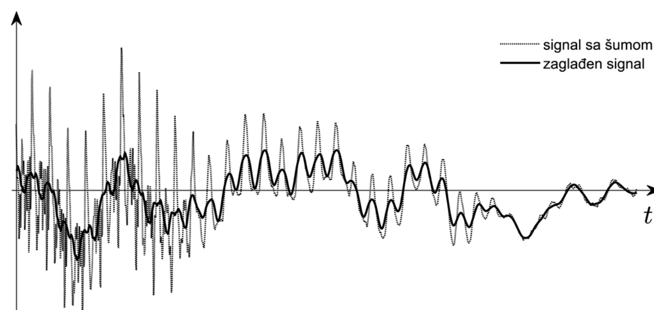
Uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$ invertibilna, optimalno rješenje za koeficijente polinoma se dobija pseudoinverzijom:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{o}} = \left(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\right)^{-1} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \tag{15.32}$$

Optimalno rješenje je u obliku polinoma unaprijed zadanog reda M:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{o}} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{o}}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}, \tag{15.33}$$

gdje je $\mathbf{n} = \left[1, n, n^2, \ldots, n^M\right]^{\mathrm{T}}$.



Slika 15.3 Glačanje signala Savicki-Golej filtrom. Radi preglednosti, diskretni signali su grafički predstavljeni kao kontinualni.

Polinomi višeg reda omogućavaju postizanje visokog nivoa glačanja bez slabljenja bitnih karakteristika signala. Savicki-Golej filtri se tipično koriste za glačanje zašumljenog signala čiji je frekvencijski opseg (posmatrano bez šuma) velik. Iako su efikasniji u očuvanju relevantnih visokofrekvencijskih komponenti signala od standardnih FIR filtara, koji imaju tendenciju da uklone i značajan dio visokofrekvencijskog sadržaja signala zajedno sa šumom, manje su uspješni u samom uklanjanju šuma. Primjer glačanja signala Savicki-Golej filtrom dat je na Slici 15.3.

15.1.5 Optimalni Čebiševljevi FIR filtri

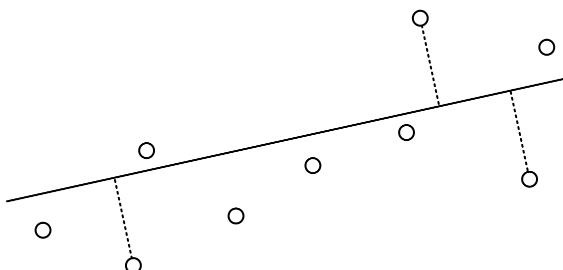
Za projektovanje optimalnih Čebiševljevih filtara potrebno je da zadana frekvencijska karakteristika bude čisto realna ili čisto imaginarna. Ovim metodom projektovanja digitalnih FIR filtara minimizira se greška koja se definiše kao maksimalna ponderisana apsolutna razlika između željene, $H\left(e^{j\omega}\right)$, i projektovane, $\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)$, frekvencijske karakteristike, tzv. Čebiševljeva greška:

$$\left\|E\left(e^{j\omega}\right)\right\|_{\infty} = \max_{\omega\in\Omega} E\left(e^{j\omega}\right) = \max_{\omega\in\Omega}\left\{W\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right) - \hat{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|\right\}, \tag{15.34}$$

gdje je Ω unija frekvencijskih opsega u kojima se radi optimizacija frekvencijske karakteristike, a $W\left(e^{j\omega}\right)$ nenegativna težinska funkcija, čiju ćemo ulogu objasniti kasnije. Čebiševljev kriterijum optimizacije često se naziva i *minimaks kriterijum*. Problem projektovanja optimalnih Čebiševljevih filtara se svodi na odabir elemenata impulsnog odziva po Čebiševljevom kriterijumu. Iako su optimalna rješenja u Čebiševljevom smislu jedinstvena, ne postoji algoritam koji garantuje njihovo pronalaženje. U praksi se koriste iterativni numerički algoritmi: tehnika linearnog programiranja i *Remezov* (Евге́ний Я́ковлевич Ре́мез) *algoritam višestruke izmjene*. Iako manje uopšten nego linearno programiranje, Remezov algoritam se široko koristi, jer je vrlo robustan i brzo konvergira ka optimalnom rješenju, te tehniku linearnog programiranja nećemo razmatrati

Remezov algoritam višestruke izmjene se bazira na *teoremi alternacije*, koja kaže da minimizacija Čebiševljeve greške rezultira greškom sa jednolikim oscilacijama. Po teoremi alternacije, polinom stepena M najbolje aproksimira krivu zadanu konačnim skupom tačaka, čiji broj je veći od M, ako i samo ako se maksimalna greška aproksimacije postigne u najmanje $M+2$ tačaka, i to sa naizmjeničnim predznacima. Umjesto strogog matematičkog dokaza teoreme alternacije, posmatrajmo geometrijsku interpretaciju aproksimacije neke krive polinomom prvog stepena (pravom), datu na Slici 15.4. Pretpostavimo da je prikazana prava linija optimalna aproksimacija, u Čebiševljevom smislu, krive zadane skupom tačaka, označenih kružićima na Slici 15.4. Neka je prvo maksimalno odstupanje od optimalne prave negativno, kao što je, crtkanom duži, prikazano na Slici 15.4. Tada mora da postoji bar još jedna jednako udaljena tačka od optimalne prave, ali s njene druge strane, sa pozitivnim odstupanjem. U suprotnom, pomakom prave prema dole maksimalna greška bi se smanjila, te data prava ne bi bila optimalna aproksimacija zadane krive. Osim toga, mora da postoji i treća tačka sa maksimalnim negativnim odstupanjem, jer bismo u suprotnom, rotacijom prave, mogli dobiti manju maksimalnu grešku, pa data prava ne bi bila optimalno rješenje po Čebiševljevom kriterijumu. Slično se može pokazati za polinome višeg stepena.

Po teoremi alternacije, aproksimacija frekvencijske karakteristike polinomom M-tog stepena je optimalna u Čebiševljevom smislu ako postoji najmanje $R=M+2$ učestanosti ω_k za koje vrijedi da je:



Slika 15.4 Geometrijska interpretacija aproksimacije krive polinomom prvog stepena.

$$\hat{H}\left(e^{j\omega_k}\right) = H\left(e^{j\omega_k}\right) + c\left(-1\right)^k \left\|E\left(e^{j\omega}\right)\right\|_\infty, \ k = 1,2,\cdots,R, \tag{15.35}$$

gdje je c jednako 1 ili -1, ovisno o tome da li je prvo maksimalno odstupanje negativno ili pozitivno, respektivno. Tačke ω_k, $k = 1,2,\ldots,R$, frekvencijske ose, u kojima nastupa maksimalna Čebiševljeva greška, nazivaju se učestanosti ekstrema. Vrijedi da je $0 \le \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_R \le \pi$.

Remezov algoritam se pokazao kao prikladan za projektovanje FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom. Radi jednostavnijeg razmatranja, kao kod projektovanja FIR filtara metodom najmanjih kvadrata, posmatraćemo projektovanje nekauzalne varijante FIR filtara sa linearnom faznom karakteristikom tipa I, *N*-tog reda, čija je frekvencijska karakteristika oblika:

$$\hat{H}\left(e^{j\omega}\right) = h\left(0\right) + 2\sum_{n=1}^{M} \hat{h}\left(n\right)\cos\omega n, \tag{15.36}$$

gdje smo uveli oznaku da je $M = \left(N-1\right)/2$. Slično razmatranje se može provesti i za filtre tipa II, III i IV. Ako sumu u (15.36) razvijemo koristeći jednakost:

$$\begin{aligned}\cos\omega n = {} & 2^{n-1}\cos^n\omega - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2}\omega + \\ & + \frac{n\left(n-3\right)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}\omega - \frac{n\left(n-3\right)\left(n-5\right)}{3!}2^{n-7}\cos^{n-6}\omega + \cdots\end{aligned} \tag{15.37}$$

zaključujemo da je frekvencijska karakteristika polinom M-tog stepena po $\cos\omega$, $\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{P}\left(\cos\omega\right)$, sa koeficijentima koji zavise od $\hat{h}\left(n\right)$, $n=0,1,\cdots,M$. Stoga za traženje optimalnih vrijednosti elemenata impulsnog odziva, tako da se aproksimira željena frekvencijska karakteristika polinomom datim sa (15.36), možemo koristiti teorem alternacije. Ako je željena frekvencijska karakteristika konstantna po frekvencijskim opsezima u kojima se radi optimizacija, optimalno rješenje će imati frekvencijsku karakteristiku sa jednolikim oscilacijama. Učestanosti ekstrema su locirane na granicama opsega i tamo gdje je $d\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)\big/d\omega=-\mathrm{P}'\left(\cos\omega\right)\sin\omega=0$: u $\omega=0$, $\omega=\pi$ i na pozicijama $M-1$ nula polinoma $\mathrm{P}'\left(\cos\omega\right)$. Po teoremi alternacije nama, za optimalno fitovanje frekvencijske karakteristike polinomom, treba $M+2$ učestanosti ekstrema sa alternirajućim znakom greške. Ako imamo dva opsega, propusni i nepropusni, postoje tri mogućnosti za izbor učestanosti ekstrema. Uz dvije učestanosti na granicama propusnog i nepropusnog opsega, u skup učestanosti ekstrema ulaze:

a) $\omega=0$ i svih $M-1$ nula polinoma $\mathrm{P}'\left(\cos\omega\right)$,
b) $\omega=\pi$ i svih $M-1$ nula polinoma $\mathrm{P}'\left(\cos\omega\right)$,
c) $\omega=0$, $\omega=\pi$ i $M-2$ nula polinoma $\mathrm{P}'\left(\cos\omega\right)$.

Remez je pokazao da će, pod prilično opštim uslovima, algoritam koji uzima početnu procjenu lokacije frekvencija ekstrema i mijenja ih sa novim skupom izračunatim u svakoj iteraciji, monotono konvergirati do optimalnog rješenja po minimaks kriterijumu, ako se proračun provodi bez greške zaokruživanja. Efikasnost ovog algoritma dolazi od pronalaženja optimalnog rješenja direktnim konstruisanjem funkcije koja zadovoljava teoremu alternacije umjesto minimiziranja Čebiševljeve kriterijumske greške.

Postoji više varijacija metoda projektovanja FIR filtara koji koriste Remezov algoritam, ovisno o tome koji parametri se zadaju prilikom specifikacije filtra. Parks (Thomas W. Parks) i MekKlelen (James H. McClellan) su formulisali osnovni problem projektovanja Čebiševljevog FIR filtra specificirajući željenu amplitudnu karakteristiku $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$, a zatim minimizirajući težinsku Čebiševljevu kriterijumsku grešku u propusnom i nepropusnom opsegu. Za niskopropusni

filtar specificiraju se granična učestanost propusnog opsega ω_p i granična učestanost nepropusnog opsega ω_s (koje moraju da se razlikuju), te maksimalno dozvoljene valovitosti u propusnom i nepropusnom opsegu δ_p i δ_s, respektivno. Težinska funkcija se uobičajeno bira na sljedeći način:

$$W\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\delta_p, & 0\le\omega\le\omega_p,\\ 0, & \omega_p<\omega<\omega_s,\\ \delta_s, & \omega_s\le\omega\le\pi.\end{cases} \tag{15.38}$$

Valovitosti u propusnom i nepropusnom opsegu su međusobno proporcionalne, tako da je dovoljno zadati samo jednu od njih. Ako za valovitost uvedemo oznaku:

$$\delta=c\cdot\left\|E\left(e^{j\omega}\right)\right\|_\infty, \tag{15.39}$$

primjenjujući Remezov algoritam višestruke izmjene iskazan sa (15.35) i relaciju (15.36), možemo pisati jednačine:

$$H\left(e^{j\omega_k}\right)=\hat{h}(0)+2\sum_{n=1}^{M}\hat{h}(n)\cos\omega_k n-\frac{(-1)^k\,\delta}{W\left(e^{j\omega_k}\right)},\ k=1,2,\cdots,R, \tag{15.40}$$

gdje su ω_k učestanosti ekstrema. Primijetimo da imamo R jednačina sa $R-1$ nepoznatih koeficijenata filtra koje treba odrediti. Tako posmatran sistem jednačina je preodređen. Ako i parametar δ posmatramo kao nepoznanicu, sistem postaje određen, pa u razvijenoj matričnoj formi pišemo:

$$\begin{bmatrix}H\left(e^{j\omega_1}\right)\\ H\left(e^{j\omega_2}\right)\\ \vdots\\ H\left(e^{j\omega_R}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos(\omega_1) & \cdots & \cos(\omega_1 M) & 1/W\left(e^{j\omega_1}\right)\\ 1 & \cos(\omega_2) & \cdots & \cos(\omega_2 M) & -1/W\left(e^{j\omega_2}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cos(\omega_R) & \cdots & \cos(\omega_R M) & -(-1)^R/W\left(e^{j\omega_R}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{h}(0)\\ \hat{h}(1)\\ \vdots\\ \hat{h}(M)\\ \delta\end{bmatrix}. \tag{15.41}$$

Iz ovih jednačina potrebno je odrediti vrijednosti elemenata impulsnog odziva $\hat{h}(n),\ n=0,1,\cdots,M$ i minimalnu valovitost δ tako da se minimizira težinska

Čebiševljeva greška. Pod uslovom da su sve učestanosti ekstrema različite, rješenje je jedinstveno. Postupak je iterativan i sastoji se od rješavanja problema interpolacije frekvencijske karakteristike kroz referentni zadani skup od R tačaka (15.41) i ažuriranja referentnog skupa Remezovim metodom višestruke izmjene:

1. Odabere se inicijalni skup frekvencija ekstrema, najčešće kao ravnomjerno raspoređene tačke na frekvencijskoj osi iz opsega $[0,\pi]$, izuzev regiona gdje je $W\left(e^{j\omega}\right)=0$, pri čemu znak greške treba da alternira u odabranim tačkama;
2. Uradi se fitovanje frekvencijske karakteristike polinomom, čiji su koeficijenti elementi impulsnog odziva, rješavanjem sistema jednačina datog sa (15.41) i odredi vrijednost parametra δ;
3. Sa dobijenim vrijednostima elemenata impulsnog odziva $\hat{h}(n)$, na osnovu (15.36) i (15.34) izračunaju se frekvencijska karakteristika filtra $H\left(e^{j\omega}\right)$ i Čebiševljeva greška $E\left(e^{j\omega}\right)$ u gusto raspoređenim tačkama;
4. Ako je najveća greška $E\left(e^{j\omega}\right)$ jednaka parametru δ određenom u koraku 2, konvergencija je dostignuta. U suprotnom, pronađu se lokalni minimumi i maksimumi greške $E\left(e^{j\omega}\right)$, formira novi referentni skup i vrati na korak 2.

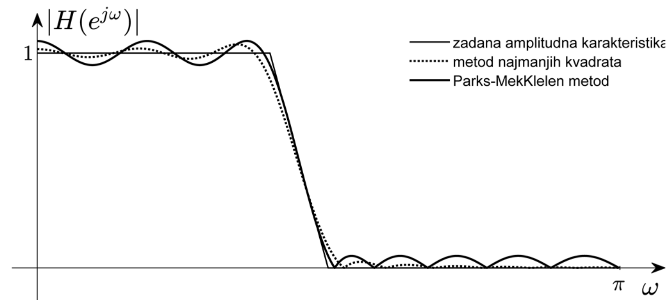
U praksi se novi referentni skup formira od lokalnih minimuma i maksimuma greške $E\left(e^{j\omega}\right)$. Prilikom ažuriranja skupa učestanosti ekstrema neophodno je zadovoljiti sljedeće kriterijume:

1. Na novom skupu učestanosti ekstrema odstupanje projektovane od željene frekvencijske karakteristike $E\left(e^{j\omega}\right)$ mora da alternira;
2. $E\left(e^{j\omega_k}\right)\geq\delta$ za svaku učestanost ekstrema ω_k iz novog skupa;
3. $E\left(e^{j\omega_k}\right)>\delta$ za bar jednu učestanost ekstrema ω_k iz novog skupa.

Ova iterativna procedura se naziva algoritam višestruke izmjene jer se u svakoj iteraciji mijenjaju sve frekvencije ekstrema referentnog skupa. Interesantno je primijetiti da vrijednost parametra δ monotono raste iz iteracije u iteraciju i na kraju postaje jednaka minimalnoj Čebiševljevoj grešci koju je moguće postići za datu specifikaciju filtra. Konvergencija se tipično postiže za petnaestak iteracija. Ipak, treba napomenuti da je konvergencija malo vjerovatna za FIR filtre čiji red prevazilazi nekoliko stotina.

15.1.6 Uporedne karakteristike optimalnih FIR filtara

Najjednostavniji način projektovanja FIR filtara je metod množenja prozorskim sekvencama, ali se ovim metodom ne mogu tačno realizovati zadane granične učestanosti, jer se njihove vrijednosti mijenjaju nakon množenja sa prozorskom sekvencom i zavise od oblika sekvence. Uz to, dužina impulsnog odziva koja se dobija ovim metodom je najveća od svih navedenih metoda, zbog čega je i složenost realizacije najveća. Metod odmjeravanja frekvencijske karakteristike je znatno složeniji za projektovanje, ima bolju kontrolu graničnih učestanosti i daje dužinu impulsnog odziva sličnu kao metod množenja prozorskim sekvencama. Njegova prednost se ogleda u korištenju specijalizovanih struktura prilikom realizacije, kao što ćemo vidjeti u Glavi 16. Projektovanjem pomoću optimizacionih metoda postiže se bolja kontrola položaja graničnih učestanosti i znatno manja dužina impulsnog odziva. Parks-MekKlelen metod i metod najmanjih kvadrata aproksimiraju amplitudnu karakteristiku koja je po segmentima linearna. U odnosu na Parks-MekKlelen metod, filtar projektovan metodom najmanjih kvadrata ima bolje karakteristike u najvećem dijelu propusnog i nepropusnog opsega, ali ne i na njihovim rubovima i u prelaznom opsegu, što se može vidjeti na Slici 15.5. Odstupanja od željene amplitudne karakteristike su najveća u prelaznom opsegu i njegovoj okolini, a budući da Parks-MekKlelen metod minimizira maksimalnu grešku, njegove preformanse u tim oblastima su bolje.



Slika 15.5 Amplitudne karakteristike optimalnih FIR filtara dobijenih metodom najmanjih kvadrata i Parks-MekKlelen metodom.

15.2 Optimalni IIR filtri

U odnosu na FIR filtre, jednačine diferencija kojima se opisuju IIR filtri imaju manji broj članova, što rezultuje manjom računskom složenošću implementacije. Uz to, manje je kašnjenje signala na izlazu filtra u odnosu na ulazni signal. Nedostatak IIR filtara se ogleda u tome da prilikom njihovog projektovanja nije moguće kontrolisati faznu karakteristiku, te da, za razliku od FIR filtara, nisu uvijek stabilni. Problem projektovanja optimalnih IIR filtara se svodi na pronalaženje aproksimacije frekvencijske karakteristike koja, u opštem slučaju, ima i nule i polove, uz uslov da polovi, zbog stabilnosti, budu u unutrašnjosti jediničnog kruga u *z*-ravni. Iako ovako jasno formulisan, problem projektovanja optimalnih IIR filtara je teško rješiv u praksi, jer greška aproksimacije, definisana preko neke norme, tipično nije konveksna funkcija filtarskih koeficijenata, te algoritmi za traženje minimuma mogu završiti u lokalnim minimumima, dajući tako suboptimalno rješenje. Iako su optimizacioni metodi projektovanja IIR filtara mnogo složeniji u poređenju sa FIR filtrima, zbog njihove jednostavne implementacije prihvatljiva su i suboptimalna rješenja u smislu praktično upotrebljivih kauzalnih IIR filtara, ako je projektovanje izvodivo u razumnom vremenu.

Kao prirodan slijed razmatranja, za kriterijum optimalnosti pri projektovanju IIR filtara nameće se minimalna *greška izlaza*, koja se definiše kao odstupanje impulsnog odziva projektovanog filtra, $\hat{h}(n)$, od željenog impulsnog odziva, $h(n)$:

$$\begin{aligned} e_o(n) = h(n) - \hat{h}(n) = h(n) + \hat{a}_1\hat{h}(n-1) + \cdots + \hat{a}_N\hat{h}(n-N) - \\ -\hat{b}_0\delta(n) - \hat{b}_1\delta(n-1) - \cdots - \hat{b}_M\delta(n-M) \end{aligned} \tag{15.42}$$

Kako u (15.42) figurišu umnošci koeficijenata projektovanog filtra i elemenata njegovog impulsnog odziva, minimizacija greške izlaza izjednačavanjem parcijalnih izvoda po filtarskim koeficijentima sa nulom: $\partial\left(\sum_{n=0}^{\infty}|e_o(n)|^2\right)\Big/\partial\hat{a}_k = 0,\ k = 1,2,\ldots,N$ i $\partial\left(\sum_{n=0}^{\infty}|e_o(n)|^2\right)\Big/\partial\hat{b}_k = 0,\ k = 0,1,\ldots,M$ vodi nelinearnim jednačinama, zbog čega ovaj metod nije praktično upotrebljiv.

Rješenje se nalazi u modifikaciji kriterijuma optimalnosti, sa ciljem da se problem opiše sistemom linearnih jednačina koji se može riješiti metodom najmanjih kvadrata. U frekvencijskom domenu greška izlaza opisuje odstupanje od željene frekvencijske karakteristike:

$$E_o\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) - \hat{H}\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) - \frac{\hat{B}\left(e^{j\omega}\right)}{\hat{A}\left(e^{j\omega}\right)}, \tag{15.43}$$

gdje smo frekvencijsku karakteristiku $\hat{H}\left(e^{j\omega}\right)$ napisali u obliku racionalne funkcije, kao količnik $\hat{B}\left(e^{j\omega}\right)$ i $\hat{A}\left(e^{j\omega}\right)$. Ako modifikujemo ovu grešku tako da i lijevu i desnu stranu (15.43) pomnožimo sa $\hat{A}\left(e^{j\omega}\right)$, dobićemo tzv. *grešku u jednačini diferencija*:

$$E_e\left(e^{j\omega}\right) = \hat{A}\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right) - \hat{B}\left(e^{j\omega}\right), \tag{15.44}$$

koja, zapisana u vremenskom domenu, ima oblik:

$$\begin{aligned} e_e(n) = h(n) + \hat{a}_1 h(n-1) + \cdots + \hat{a}_N h(n-N) - \\ -\hat{b}_0\delta(n) - \hat{b}_1\delta(n-1) - \cdots - \hat{b}_M\delta(n-M). \end{aligned} \tag{15.45}$$

Važno je primijetiti da je greška u jednačini diferencija, za razliku od greške izlaza, linearno zavisna od filtarskih koeficijenata, jer su oni sada pomnoženi sa elemenatima impulsnog odziva željenog filtra, a ne sa elementima impulsnog odziva projektovanog filtra, što je slučaj u (15.42).

Neka je $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} = \left[\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_N, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_M \right]$ vektor nepoznatih koeficijenata u jednačini diferencija koja opisuje projektovani filtar. Označimo L_2 normu greške u jednačini diferencija sa $J_{e2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$, tako da je:

$$J_{e2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left\| \hat{A}\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) - \hat{B}\left(e^{j\omega}\right) \right\|_2, \; 0 \le \omega < 2\pi . \tag{15.46}$$

Primijetimo da (15.46) možemo zapisati i kao:

$$J_{e2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left\| \left|\hat{A}\left(e^{j\omega}\right)\right| \left| H\left(e^{j\omega}\right) - \hat{H}\left(e^{j\omega}\right) \right| \right\|_2, \; 0 \le \omega < 2\pi , \tag{15.47}$$

što upućuje da se greška u jednačini diferencija može tumačiti kao ponderisana greška izlaza, u kojoj je težinska funkcija data sa $\left|\hat{A}\left(e^{j\omega}\right)\right|$. Kako je ova težinska funkcija određena polovima projektovanog filtra, greška je manje ponderisana u blizini polova. Pošto frekvencijska karakteristika filtra ima izražene nagle promjene (maksimume) u okolini polova, očigledno je da ovako definisan kriterijum optimalnosti pripisuje manji značaj tim dijelovima spektra, dok se s druge strane, daleko od polova, može očekivati dobra aproksimacija frekvencijske karakteristike.

Projektovanje optimalnih IIR filtara se vrši direktnom minimizacijom greške u jednačini diferencija u frekvencijskom domenu, ili metodima kao što su Pronijev i Jul-Volkerov, koji minimiziraju grešku u jednačini diferencija posmatranu u vremenskom domenu. Osim navedenih, od značaja su i optimizacioni metodi koji se zasnivaju na modeliranju signala, kod kojih se određuju parametri modela, tako da se na izlazu sistema koji je pobuđen jediničnim impulsom, generišu odmjerci impulsnog odziva tako da što manje odstupaju od zadanih vrijednosti. Radi jednostavnijeg izlaganja, zadržaćemo se na projektovanju filtara sa realnim impulsnim odzivom.

15.2.1 Direktni metod projektovanja optimalnih IIR filtara

Direktnim metodom projektovanja optimalnih IIR filtara optimizacija filtarskih karakteristika se vrši u frekvencijskom domenu. Ako je željena frekvencijska karakteristika $H\left(e^{j\omega}\right)$ zadana u L tačaka ω_k, $k=0,1,\ldots,L-1$, na jediničnoj kružnici u z-ravni, cilj je da nađemo optimalne vrijednosti za koeficijente vektora $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, tako da greška u jednačini diferencija iskazana u frekvencijskom domenu:

$$J_{e2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\sum_{k=0}^{L-1}\left|\hat{A}\left(e^{j\omega_k}\right)H\left(e^{j\omega_k}\right)-\hat{B}\left(e^{j\omega_k}\right)\right|^2 \tag{15.48}$$

bude minimalna. Pošto $J_{e2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ ima kvadratni oblik, rješenje se lako dobija izjednačavanjem gradijenta greške sa nulom. Postoje metodi, kao što je Štajglic (Kenneth Steiglitz) - Mekbrajd (L. McBride) iterativni algoritam, koji eliminišu efekat ponderisanja u grešci jednačine diferencija tako da rješenje konvergira u minimizator greške izlaza.

15.2.2 Pronijev method

Pronijev (Gaspard Clair François Marie Riche de Prony) metod minimizira grešku u jednačini diferencija iskazanu u vremenskom domenu, modelirajući impulsni odziv filtra. Na taj način postiže se aproksimacija i amplitudne i fazne karakteristike. Posmatrajući grešku u jednačini diferencija odvojeno za $0\le n\le M$ i $n>M$, možemo pisati da je:

$$e_e\left(n\right)=\begin{cases} h\left(n\right)+\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_k h\left(n-k\right)-\hat{b}_n, & 0\le n\le M,\\ h\left(n\right)+\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_k h\left(n-k\right), & n>M. \end{cases} \tag{15.49}$$

Za $n>M$ greška zavisi samo od položaja polova, odnosno vrijednosti koeficijenata $\hat{a}_k$, $k=1,2,\cdots,N$. Stoga se, prvo, zanemarujući uticaj nula funkcije

prenosa, određuju koeficijenti filtra u nazivniku frekvencijske karakteristike, minimizirajući grešku datu sa:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|e_e(n)\right|^2=\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|h(n)+\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_k h(n-k)\right|^2 . \tag{15.50}$$

Sistem jednačina (15.50) je preodređen, kvadratnog oblika, pa je po principu ortogonalnosti, pri optimalnom rješenju, greška ortogonalna na elemente impulsnog odziva:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} e_e(n)h(n-k)=0,\ k=1,2,\ldots,N . \tag{15.51}$$

Nakon uvrštavanja izraza za $e_e(n)$ u (15.51) dobijamo:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty}\left\{h(n)+\sum_{l=1}^{N}\hat{a}_l h(n-l)\right\}h(n-k)=0,\ k=1,2,\ldots,N , \tag{15.52}$$

ili, ekvivalentno:

$$\sum_{l=1}^{N}\hat{a}_l\left\{\sum_{n=M+1}^{\infty}h(n-l)h(n-k)\right\}=-\sum_{n=M+1}^{\infty}h(n)h(n-k),\ k=1,2,\ldots,N . \tag{15.53}$$

Uvodeći oznaku:

$$r_h(k,l)=\sum_{n=M+1}^{\infty}h(n-l)h(n-k),\ k=1,2,\ldots,N,\ l=1,2,\ldots,N , \tag{15.54}$$

(15.53) postaje

$$\sum_{l=1}^{N}\hat{a}_l r_h(k,l)=-r_h(k,0),\ k=1,2,\ldots,N . \tag{15.55}$$

Jednačine (15.55) su poznate pod nazivom *Pronijeve normalne jednačine*. Iz N Pronijevih jednačina sa N nepoznatih, koje, kad se napišu u razvijenom obliku, glase:

$$\begin{bmatrix} r_h(1,1) & r_h(1,2) & \cdots & r_h(1,N)\\ r_h(2,1) & r_h(2,2) & \cdots & r_h(2,N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_h(N,1) & r_h(N,2) & \cdots & r_h(N,N)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \vdots\\ \hat{a}_N\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} r_h(1,0)\\ r_h(2,0)\\ \vdots\\ r_h(N,0)\end{bmatrix}, \tag{15.56}$$

određuju se koeficijenti filtra $\hat{a}_k$, $k = 1,2,\ldots,N$, u nazivniku funkcije prenosa.

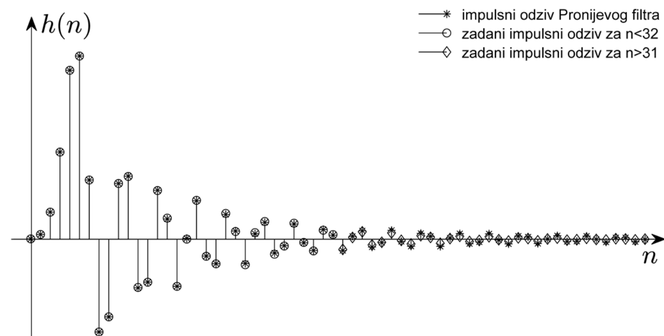
Nakon što su poznati koeficijenti $\hat{a}_k$, $k = 1,2,\ldots,N$, koeficijenti $\hat{b}_k$, $k = 0,1,\ldots,M$, iz brojnika funkcije prenosa, se određuju iz (15.49):

$$\hat{b}_n = h(n) + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k h(n-k),\ 0 \le n \le M\ , \tag{15.57}$$

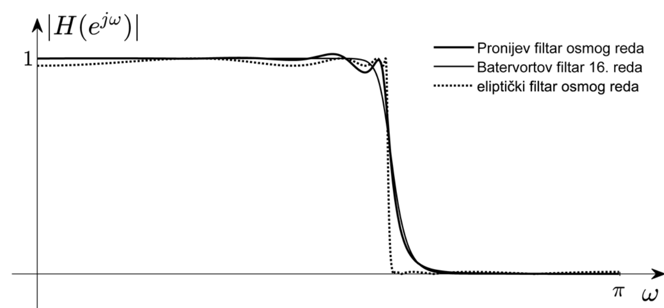
što u razvijenom obliku zapisujemo sa:

$$\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(M) & h(M-1) & h(M-2) & \cdots & h(M-N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_M \end{bmatrix}. \tag{15.58}$$

Primijetimo da je $r_h(k,l)$ u (15.54) autokorelaciona sekvenca modifikovanog impulsnog odziva $h(n)$, u smislu da su sve vrijednosti impulsnog odziva za $n \le M - N$ postavljene na nulu. To znači da vrijednosti $h(n)$ za $n \le M - N$ ne utiču na oblikovanje nazivnika funkcije prenosa. Vrijednosti $h(n)$ za $n \le M - N$ se, sa već određenim koeficijentima u nazivniku funkcije prenosa, koriste za određivanje koeficijenata u njenom brojniku. Koeficijenti $\hat{a}_k$, $k = 1,2,\ldots,N$, su optimalni, jer se sistem Pronijevih normalnih jednačina, iz kojih se ti koeficijenti određuju, dobija minimizacijom greške (15.50). Pri tome bi za određivanje autokorelacione sekvence u sistemu Pronijevih normalnih jednačina na osnovu (15.54) trebalo koristiti beskonačno mnogo elemenata impulsnog odziva, što u praksi nije slučaj, već se vrši procjena ove autokorelacione sekvence na osnovu konačnog broja zadanih elemenata impulsnog odziva, podrazumijevajući da impulsni odziv tokom vremena iščezava. Za određivanje koeficijenata $\hat{b}_k$, $k = 0,1,\cdots,M$, nije korištena dodatna optimizacija, već su dobijeni kao rješenja određenog sistema jednačina (15.58).



Slika 15.6 Aproksimacija impulsnog odziva Pronijevim metodom.



Slika 15.7 Poređenje amplitudnih karakteristika Pronijevog, Batervortovog i eliptičkog filtra.

Primjer impulsnog odziva optimalnog IIR filtra koji je projektovan Pronijevim metodom prikazan je na Slici 15.6. Red polinoma i u brojniku i u nazivniku projektovanog Pronijevog filtra je 8, a željeni impulsni odziv je kreiran na osnovu Batervortovog filtra 16. reda. Za projektovanje Pronijevog filtra korištena su 32 elementa tako dobijenog impulsnog odziva. Vidljivo je dobro modeliranje elemenata impulsnog odziva i u dijelu koji nije korišten za projektovanje. Kada su u pitanju frekvencijske karakteristike, prikazane na Slici 15.7, Pronijevim metodom se dobije bolje razdvajanje propusnog i nepropusnog opsega nego kod Batervortovog filtra dvostruko većeg reda. Ako se Pronijev filtar poredi sa eliptičkim filtrom istog reda, primjetno je da amplitudna karakteristika u području nižih učestanosti daleko manje odstupa od zadane, a

veća odstupanja u vidu oscilacija se pojavljuju tek u blizini granične učestanosti. Strmina u prelaznom opsegu je nešto manja, s tim da se veće razlike uočavaju tek u oblasti gdje filtar već ima značajno slabljenje.

15.2.3 Jul - Volkerov metod

Za projektovanje IIR filtara može se koristiti Jul-Volkerov metod, kojim se vrši modeliranje autokorelacione sekvence impulsnog odziva, tako da se postigne minimalna greška u jednačini diferencija. Pri tome se koriste metode koje se inače primjenjuju za modeliranje ARMA procesa, a impulsni odziv, koji je deterministički signal, se posmatra kao jedna realizacija slučajnog procesa. Radi pojednostavljenja procedure i skraćenja vremena potrebnog za projektovanje, AR i MA parametri modela se određuju zasebno, pomoću modifikovanih Jul-Volkerovih jednačina. Na taj način se dobija, u praksi prihvatljivo, suboptimalno rješenje u odnosu na ono koje bi se dobilo istovremenim određivanjem AR i MA parametara modela.

Podrazumijevajući da je zadana amplitudna karakteristika $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ željenog filtra, vremenski usrednjenu autokorelacionu sekvencu impulsnog odziva dobijamo inverznom *DTFT* njegove spektralne gustine snage:

$$\hat{r}_{hh}(m) = IDTFT\left\{\frac{1}{L}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\right\}. \tag{15.59}$$

Prilikom projektovanja IIR filtara ovom metodom određuju se parametri ARMA (N,M) modela, gdje se autokorelaciona sekvenca $\hat{r}_{hh}(m)$ koristi kao procjena statističke autokorelacije.

Prvo se, pomoću modifikovanih Jul-Volkerovih jednačina:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{hh}(M) & \hat{r}_{hh}(M-1) & \cdots & \hat{r}_{hh}(M+1-P) \\ \hat{r}_{hh}(M+1) & \hat{r}_{hh}(M) & \cdots & \hat{r}_{hh}(M+2-P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{hh}(M+P-1) & \hat{r}_{hh}(M+P-2) & \cdots & \hat{r}_{hh}(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{r}_{hh}(M+1) \\ \hat{r}_{hh}(M+2) \\ \vdots \\ \hat{r}_{hh}(M+P) \end{bmatrix}, \tag{15.60}$$

gdje $P \in \mathbb{N}$, odrede AR parametri, $\hat{a}_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\text{ARMA}(N, M)$ modela. Modifikovane Jul-Volkerove jednačina se razlikuju od Jul-Volkerovih jednačina datih sa (9.132), u smislu da se u njima koristi segment autokorelacione sekvence sa vrijednostima nezavisne promjenljive m koje su za M veće nego u (9.132), te da broj jednačina može biti veći od broja AR parametara modela. Nešto kasnije ćemo vidjeti da se vrijednosti autokorelacione sekvence za $|m| \le M$ koriste za određivanje MA parametara $\text{ARMA}(N, M)$ modela. Ukupan broj tačaka u kojima je potrebno izračunati autokorelacionu sekvencu treba da ispunjava uslov $L > M + P$. Na primjer, ako je amplitudna karakteristika željenog filtra zadana u $L = M + P + 1$ ekvidistantnih tačaka, korištenjem IDFT za izračunavanje (15.59) možemo odrediti L elemenata autokorelacione sekvence, za $m = 0, 1, \ldots, M + P$.

Vrijednosti autokorelacione sekvence modeliranog impulsnog odziva jednake su njenim vrijednostima izračunatim na osnovu (15.59), pa su i vrijednosti amplitudne karakteristike jednake zadanim. Ako je $P = N$, sistem jednačina (15.60) je određen. Pri korištenju određenog sistema jednačina, za postizanje zadanih vrijednosti amplitudne karakteristike u velikom broju tačaka potreban je visok red modela, što zahtijeva velik broj računskih operacija i može dovesti do nestabilnosti sistema usljed numeričkih grešaka. Korištenje preodređenog sistema modifikovanih Jul-Volkerovih jednačina, uz $P > N$, omogućava da se pronađe optimalno rješenje za AR parametre modela, čime se, sa modelom nižeg reda nego što je broj tačaka u kojima je zadana, aproksimira željena amplitudna karakteristika. Optimalni AR parametri modela se mogu odrediti metodom najmanjih kvadrata. Korištenjem modela nižeg reda se smanjuje broj računskih operacija prilikom filtriranja i postiže amplitudna karakteristika koja je više glatka. Činjenica da se aproksimacija amplitudne karakteristike može postići u velikom broju tačaka sa relativno malim redom modela pruža veliku fleksibilnost prilikom specifikacije filtra.

Nakon što su određene vrijednosti AR parametara modela, za određivanje MA parametara $\hat{b}_k$, $k = 0, 1, \ldots, M$, se koristi sistem jednačina (9.141), koji ćemo ovdje, radi preglednosti, ponoviti, uvrštavajući vremenski usrednjenu autokorelacionu sekvencu, $\hat{r}_{hh}(m)$, kao procjenu autokorelacione sekvence

impulsnog odziva, te koristeći oznake $\hat{h}$ i $\hat{b}$ za procijenjene vrijednosti impulsnog odziva i MA parametara, respektivno:

$$\sum_{k=0}^{M-m} \hat{b}_{m+k}\hat{h}(k) = \hat{r}_{hh}(m) + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k \hat{r}_{hh}(m-k),\ 0 \le m \le M\ . \tag{15.61}$$

Budući da modeliramo impulsni odziv, model se pobuđuje jediničnim impulsom, pa je u (9.141) $\sigma_S^2 = 1$. U ovom sistemu jednačina figurišu vrijednosti autokorelacione sekvence za $0 \le m \le M$, te stoga MA parametari modela utiču na uobličavanje autokorelacione sekvence samo za $0 \le m \le M$. Ako su AR parametri modela određeni metodom najmanjih kvadrata, onda nakon određivanja MA parametara dobijamo aproksimaciju autokorelacione sekvence i samog impulsnog odziva, koja ne garantuje prolazak amplitudne karakteristike projektovanog filtra kroz tačke sa zadanim vrijednostima željene amplitudne karakteristike.

Kako je sistem jednačina (15.61) nelinearan, određivanje MA parametara modela nije jednostavno. Ako u tom sistemu jednačina uvedemo oznake da je $\hat{b}(k) = \hat{b}_k$ i $c(m) = \sum_{k=0}^{M-m} \hat{b}(m+k)h(k) = \hat{b}(m) * h(-m)$, dobijamo:

$$c(m) = \hat{r}_{hh}(m) + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k \hat{r}_{hh}(m-k),\ 0 \le m \le M\ , \tag{15.62}$$

što nam omogućava da odredimo elemente signala $c(m),\ m = 0,1,\ldots,M$. Sada nam preostaje da te vrijednosti iskoristimo za određivanje koeficijenta $\hat{b}_k,\ k = 0,1,\ldots,M$. Vidjećemo da će nam za to biti dovoljan samo kauzalni dio autokorelacione sekvence impulsnog odziva. U tu svrhu, znajući da za autokorelacionu sekvencu vrijedi da je $\hat{r}_{hh}(n) = \hat{r}_{hh}(-n)$, uradimo njenu aditivnu dekompoziciju na kauzalni, $\hat{r}_{hh}^{+}(n)$, i antikauzalni, $\hat{r}_{hh}^{+}(-n)$, dio:

$$\hat{r}_{hh}(n) = \hat{r}_{hh}^{+}(n) + \hat{r}_{hh}^{+}(-n), \tag{15.63}$$

gdje je:

$$\hat{r}_{hh}^{+}(n) = \hat{r}_{hh}(n)u(n) - \frac{1}{2}\hat{r}_{hh}(0)\delta(n). \tag{15.64}$$

Pri tome smo polovinu vrijednosti $\hat{r}_{hh}(0)$ ostavili u kauzalnom, a polovinu pridružili antikauzalnom dijelu. Ovakva dekompozicija nam omogućava da spektralnu gustinu energije impulsnog odziva, $S_{hh}(e^{j\omega})$, procjenjujemo preko DTFT kauzalnog dijela vremenski usrednjene autokorelacione sekvence impulsnog odziva, $\left[\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})\right]_+ = \mathrm{DTFT}\left\{\hat{r}_{hh}^+(n)\right\}$:

$$\hat{S}_{hh}(e^{j\omega}) = \left[\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})\right]_+ + \left[\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})\right]_+^* = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left[\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})\right]_+\right\}. \tag{15.65}$$

Ako na isti način uradimo aditivnu dekompoziciju signala $c(m)$, njegov kauzalni dio je:

$$c^+(m) = \hat{r}_{hh}^+(m) + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k \hat{r}_{hh}^+(m-k),\ 0 \le m \le M\ , \tag{15.66}$$

a odgovarajuća DTFT je data sa:

$$C^+(e^{j\omega}) = \hat{A}(e^{j\omega})\left[\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})\right]_+, \tag{15.67}$$

gdje je $\hat{A}(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\left[1, \hat{a}(k)\right]\right\}$ i $\hat{a}(k) = \hat{a}_k,\ k = 1, 2, \ldots, N$. Sada procjenu spektralne gustine energije impulsnog odziva možemo napisati u obliku:

$$\hat{S}_{hh}(e^{j\omega}) = \frac{C^+(e^{j\omega})\hat{A}^*(e^{j\omega}) + C^{+*}(e^{j\omega})\hat{A}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})\hat{A}^*(e^{j\omega})}. \tag{15.68}$$

Kako je $\hat{S}_{hh}(e^{j\omega}) = \hat{B}(e^{j\omega})\hat{B}^*(e^{j\omega}) / \hat{A}(e^{j\omega})\hat{A}^*(e^{j\omega})$, imamo da je:

$$\hat{B}(e^{j\omega})\hat{B}^*(e^{j\omega}) = C^+(e^{j\omega})\hat{A}^*(e^{j\omega}) + C^{+*}(e^{j\omega})\hat{A}(e^{j\omega}), \tag{15.69}$$

odakle se, pomoću tehnike spektralne faktorizacije, mogu odrediti koeficijenti polinoma $\hat{b}_k,\ k = 0, 1, \ldots, M$, uz uslov da filtar bude minimalno fazni, na sljedeći način.

Procjena spektralne gustine energije $\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})$ je realna funkcija, koja se može posmatrati kao frekvencijska karakteristika sistema sa funkcijom prenosa

$\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*) = \left[\hat{B}(z)/\hat{A}(z)\right]\left[\hat{B}^*(1/z^*)/\hat{A}^*(1/z^*)\right]$. Nule/polovi funkcije prenosa $\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*)$ dolaze u recipročnim i konjugovano kompleksnim parovima. Ako je $r_i e^{j\omega_i}$ nula/pol od $\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*)$ tada su $r_i e^{-j\omega_i}$, $(1/r_i)e^{-j\omega_i}$ i $(1/r_i)e^{j\omega_i}$ takođe nule/polovi od $\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*)$. Faktorizacijom polinoma u brojniku i nazivniku funkcije prenosa $\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*)$ i formiranjem funkcije prenosa $\hat{H}(z)$ na osnovu nula i polova koji se nalaze unutar jediničnog kruga kreiramo minimalno fazni sistem, te vraćanjem u vremenski domen odredimo impulsni odziv filtra. Preostale nule i polovi, koji su van jediničnog kruga, formiraju funkciju prenosa $\hat{H}^*(1/z^*)$. Iako naizgled jednostavan, ovaj postupak spektralne faktorizacije se rijetko koristi zbog složenosti algoritama za faktorizaciju polinoma višeg reda.

Umjesto toga, češće se koristi postupak zasnovan na računanju logaritma, tako da se logaritam procjene spektralne gustine energije $\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})$ predstavi kao zbir logaritama multiplikativnih faktora polinoma u brojniku i nazivniku od $\hat{H}(e^{j\omega})\hat{H}^*(e^{j\omega})$. Zatim se uradi inverzna DFT. Budući da je $\hat{S}_{hh}(e^{j\omega})$ realna funkcija, njen transformacioni par u vremenskom domenu je parna sekvenca. Kauzalni dio te sekvence potiče od nula i polova funkcije prenosa $\hat{H}(z)\hat{H}^*(1/z^*)$ koji se nalaze unutar jediničnog kruga, dok antikauzalni dio sekvence potiče od preostalih nula i polova van jediničnog kruga. Zadrži se samo kauzalni dio dobijene sekvence, vrati u frekvencijski domen i stepenuje kako bi se poništilo prethodno provedeno računanje logaritma, te na kraju inverzom DFT konačno dobije impulsni odziv filtra $\hat{h}(n)$. Impulsni odziv filtra sa funkcijom prenosa $\hat{H}(z) = \hat{B}(z)/\hat{A}(z)$ je beskonačnog trajanja. Ako se za njegovo određivanje koristi IDFT, može doći do preklapanja i narušavanja filtarskih karakteristika. Stoga broj tačaka $K+1$ u kojima se računa DFT treba da bude dovoljno velik da to preklapanje bude zanemarljivo.

Na kraju, iz impulsnog odziva filtra $\hat{h}(n)$, poznavajući polinom $\hat{A}(z)$, treba odrediti polinom $\hat{B}(z)$. Projektovani filtar sa funkcijom prenosa $\hat{H}(z)=\hat{B}(z)/\hat{A}(z)$ možemo posmatrati kao kaskadnu vezu IIR sistema bez konačnih nula transmisije, sa funkcijom prenosa $1/\hat{A}(z)$, i FIR sistema sa funkcijom prenosa $\hat{B}(z)$, čije ćemo impulsne odzive označiti sa $\hat{h}_{IIR}(n)$ i $\hat{h}_{FIR}(n)$, respektivno. Tada vrijedi da je:

$$\hat{h}(n)=\hat{h}_{IIR}(n)*\hat{h}_{FIR}(n), \tag{15.70}$$

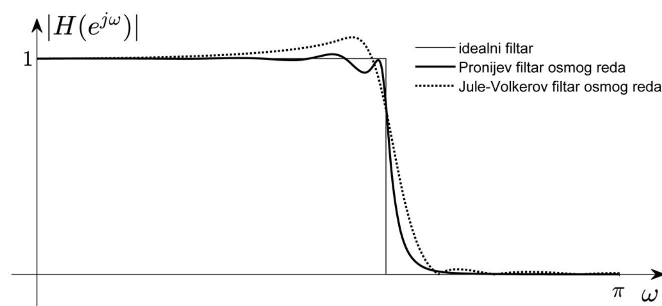
pa u razvijenom obliku imamo:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}(0) \\ \hat{h}(1) \\ \hat{h}(2) \\ \vdots \\ \hat{h}(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{IIR}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_{IIR}(1) & \hat{h}_{IIR}(0) & \cdots & 0 \\ \hat{h}_{IIR}(2) & \hat{h}_{IIR}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_{IIR}(K) & \hat{h}_{IIR}(K-1) & \cdots & \hat{h}_{IIR}(K-M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{FIR}(0) \\ \hat{h}_{FIR}(1) \\ \vdots \\ \hat{h}_{FIR}(M) \end{bmatrix}. \tag{15.71}$$

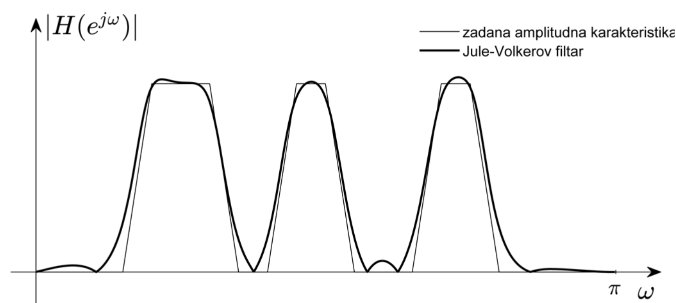
Budući da je sistem preodređen (po pravilu je $K>M$), impulsni odziv FIR filtra, čije vrijednosti su jednake koeficijentima polinoma $\hat{B}(z)$, se dobija metodom najmanjih kvadrata.

15.2.4 Uporedne karakteristike optimalnih IIR filtara

Za razliku od Pronijevog metoda, Jul-Volkerov metod ne zahtijeva niti prihvata informacije o fazi kao ulazne podatke. Aproksimira se samo amplitudna karakteristika, pri čemu se ne provjerava niti jedan specifičan kriterijum optimalnosti, osim što se prilikom rješavanja preodređenih sistema jednačina prilikom računanja koeficijenata filtra koristi metod najmanjih kvadrata. Nakon što se odrede koeficijenti filtra, predstavljeni u aritmetici sa konačnim brojem bita, potrebno je ponovo ispitati stabilnost filtra.



Slika 15.8 Poređenje Jul-Volkerovog i Pronijevog filtra osmog reda.



Slika 15.9 Aproksimacija amplitudne karakteristike sa više propusnih i nepropusnih opsega optimalnim Jul-Volkerovim filtrom 15 reda.

Uporedne amplitudne karakteristike Jul-Volkerovog i Pronijevog filtra osmog reda su prikazane na Slici 15.8. Očito je da Pronijev metod, u ovom slučaju, rezultuje filtrom sa boljim karakteristikama. Međutim, zbog jednostavnog načina specifikacije, jer se zadaju samo granične učestanosti propusnih i nepropusnih opsega i željene vrijednosti amplitudne karakteristike u tim tačkama, dok se unutar pojedinačnih opsega vrši linearna aproksimacija željene amplitudne karakteristike, Jul-Volkerov metod ima prednost kada se projektuju filtri sa više propusnih i nepropusnih opsega. Primjer aproksimacije amplitudne karakteristike sa više propusnih i nepropusnih opsega optimalnim Jul-Volkerovim filtrom 15 reda je prikazan na Slici 15.9.

15.3 Optimalni filtri u prisustvu šuma

Do sada smo naučili kako da projektujemo filtre čije specifikacije zadajemo u frekvencijskom domenu, najčešće sa namjerom da neke frekvencijske komponente propustimo sa što manjim slabljenjem, a druge maksimalno potisnemo, te kako da projektujemo jednostavne filtre za uobličivanje signala u vremenskom domenu. Ovi filtri dobro funkcionišu za širok spektar aplikacija i intenzivno se koriste, posebno kada je tip šuma poznat i kada je cilj jednostavno uklanjanje šuma iz određenih frekvencijskih opsega. Kada to nije slučaj, ali su poznate statističke karakteristike signala i šuma, bolje rezultate daju optimalni filtri, koje ćemo obraditi u ovom poglavlju. Jedan od čestih problema sa kojim se susrećemo u praksi je detekcija poznatog uzorka u signalu narušenom šumom. Stoga ćemo prvo opisati tzv. prilagođeni filtar, koji se koristi za pronalaženje optimalne lokacije u analiziranom signalu gdje postoji najveća sličnost sa uzorkom koji tražimo. Zatim ćemo razmotriti filtriranje slučajnih procesa, gdje je osnovni cilj postizanje željenih statističkih osobina slučajnog procesa na izlazu filtra. Ovisno o prirodi problema i raspoloživim informacijama o statističkim osobinama signala, u tu svrhu se koriste tri tipa Vinerovog filtra, nekauzalni i kauzalni IIR Vinerov filtar, te Vinerov FIR filtar. U praktičnim primjenama ovi filtri se koriste za rad sa realnim signalima, pa ćemo, radi lakšeg razumijevanja, u nastavku izlaganja podrazumijevati da radimo samo sa realnim signalima. U klasu optimalnih filtara ubrajamo i Kalmanov filtar, koji se koristi za procjenu i predviđanje stanja sistema u prisustvu šuma.

15.3.1 Prilagođeni filtar

Prilagođeni filtar se može interpretirati kao sistem koji, po kriterijumu najmanjih kvadrata, u analiziranom signalu $x(n)$ traži optimalnu lokaciju i optimalni faktor skaliranja za koje je analizirani signal najsličniji datom uzorku $f(n)$. Budući da je kroskorelacija mjera sličnosti signala, za cilj ćemo postaviti pronalaženje signala $g(n)$, sa kojim treba da uradimo kroskorelaciju analiziranog signala, tako

da vrijednost kroskorelacije bude velika na poziciji gdje analizirani signal sadrži dati, eventualno skalirani, uzorak. Kroskorelaciju analiziranog signala $x(n)$ sa signalom $g(n)$ jednostavno realizujemo kao njegovu konvoluciju sa impulsnim odzivom oblika $h(n)=g(-n)$, te se zadatak svodi na projektovanje filtra sa ovakvim impulsnim odzivom. Ukoliko postoji izražen maksimum odziva tako projektovanog optimalnog filtra, lokacija maksimuma ukazuje na poziciju u signalu gdje postoji visoka kroskorelacija, odnosno sličnost, sa datim uzorkom.

U praktičnim primjenama, analizirani signal je uvijek narušen šumom. Stoga pretpostavljamo da je signal koji sadrži traženi uzorak skalirana i pomjerena verzija poznatog uzorka $f(n)$, dodatno narušena nekorelisanim šumom $v(n)$ nulte srednje vrijednosti, i pišemo da je:

$$s(n)=\mu_0 f(n-k_0), \tag{15.72}$$

$$x(n)=s(n)+v(n), \tag{15.73}$$

gdje je μ_0 faktor skaliranja, a k_0 pomak poznatog uzorka. Kroskorelacija analiziranog signala, kada on sadrži skaliranu i pomjerenu verziju datog uzorka, sa sekvencom $g(n)$, treba da ima izražen maksimum., što će se desiti kada postoji velika sličnost sekvence $g(n)$ sa signalom $x(n)$. Stoga je potrebno odrediti oblik sekvence, $g(n)$, optimalni faktor skaliranja, $\hat{\mu}_o$ i optimalni pomak, $\hat{k}_o$, minimizirajući srednje kvadratno odstupanje skalirane i pomjerene sekvence $g(n)$ od signala $x(n)$:

$$\hat{\mu}_o,\hat{k}_o=\arg\min_{\mu,k}\sum_n\left|x(n)-\mu g(n-k)\right|^2. \tag{15.74}$$

Nakon razvoja sume (15.74), dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_o,\hat{k}_o=\arg\min_{\mu,k}\Big\{&\sum_n\left|s(n)+v(n)\right|^2+\mu^2\sum_n\left|g(n-k)\right|^2-\\&-2\mu\sum_n s(n)g(n-k)-2\mu\sum_n v(n)g(n-k)\Big\}.\end{aligned} \tag{15.75}$$

Prva suma u (15.75) ne zavisi od izbora faktora skaliranja i lokacije signala $g(n)$, pa se može izostaviti iz razmatranja. Pored toga, pretpostavljamo da je šum, $\nu(n)$, nekorelisan sa impulsnim odzivom filtra i da ima nultu srednju vrijednost, pa se i poslednja suma u (15.75) može izostaviti. Tako se problem optimizacije svodi na:

$$\hat{\mu}_o, \hat{k}_o = \arg\max_{\mu,k}\left[2\mu\sum_n s(n)g(n-k) - \mu^2\sum_n \left|g(n-k)\right|^2\right]. \tag{15.76}$$

Izjednačavajući prvi izvod ove kriterijumske funkcije po μ sa nulom, dobijamo analitičko rješenje za optimalni faktor skaliranja:

$$\hat{\mu}_o = \frac{\sum_n s(n)g(n-k)}{\sum_n \left|g(n-k)\right|^2}. \tag{15.77}$$

Nakon uvrštavanja $\hat{\mu}_o$ u (15.76), problem se svodi na traženje optimalne vrijednosti pomaka sekvence $g(n)$:

$$\hat{k}_o = \arg\max_k \frac{\left|\sum_n s(n)g(n-k)\right|^2}{\sum_n \left|g(n-k)\right|^2}, \tag{15.78}$$

pri kome će vrijednost kroskorelacije signala $s(n)$ i $g(n)$ u (15.78) biti maksimalna. Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti:

$$\frac{\left|\sum_n s(n)g(n-k)\right|^2}{\sum_n \left|g(n-k)\right|^2} \le \frac{\sum_n \left|s(n)\right|^2 \sum_n \left|g(n-k)\right|^2}{\sum_n \left|g(n-k)\right|^2} = \sum_n \left|s(n)\right|^2 \tag{15.79}$$

maksimalnu vrijednost je moguće postići samo kada je:

$$\hat{g}\left(n-\hat{k}_o\right) = \kappa s(n) = Kf\left(n-k_0\right), \tag{15.80}$$

uz proizvoljne realne vrijednosti konstanti κ i K, koje su različite od nule. Optimalno rješenje za pomak je jednako pomaku poznatog uzorka u signalu

koji filtriramo, $\hat{k}_o = k_0$. Uz razuman izbor da je $K = 1$, imamo da je:

$$\hat{g}(n) = f(n). \tag{15.81}$$

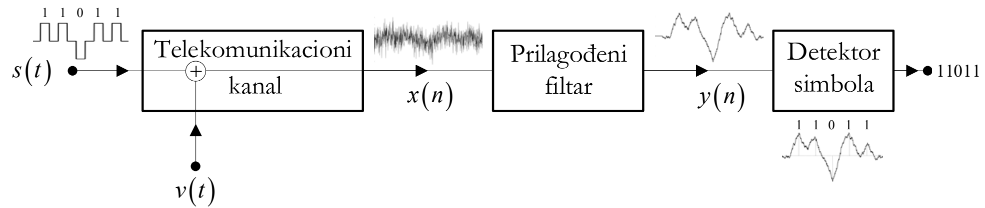
Koristeći vezu između konvolucije i kroskorelacije, dobijamo da je impulsni odziv optimalnog filtra jednak konjugovano-kompleksnom reflektovanom uzorku:

$$\hat{h}_o(n) = \hat{g}(-n) = f(-n). \tag{15.82}$$

Filtar sa takvim impulsnim odzivom nazivamo *prilagođeni filtar*. Filtrirani signal će imati maksimalnu vrijednost na poziciji gdje analizirani signal $x(n)$ najbolje odgovara, u smislu najmanjih kvadrata, uzorku $f(n)$.

Prilagođeni filtar se često koristi u telekomunikacijama da poveća vjerovatnoću ispravne detekcije primljenih simbola, kao i za detekciju poznatog uzorka na slikama, u radarskim signalima i drugim vidovima signala. Na primjeru primjene u telekomunikacijama, pokazaćemo da prilagođeni filtar maksimizira odnos snage prijemnog signala u trenutku detekcije prema srednjoj snazi šuma. U digitalnim telekomunikacijama simbolom $f(n)$, u obliku pravougaonog impulsa, se koduje binarna jedinica, a simbolom $-f(n)$ binarna nula. Na Slici 15.10 je data blok šema primjene prilagođenog filtra za detekciju primljenih simbola. Predajna sekvenca binarnih simbola $s(t)$, u obliku povorke analognih pravougaonih impulsa, prilikom prolaska kroz telekomunikacioni kanal biva narušena aditivnim šumom $v(t)$. Primljeni signal se digitalizuje i vodi na ulaz digitalnog prilagođenog filtra. Radi preglednosti, signali na ulazu i izlazu digitalnog prilagođenog filtra su grafički prikazani kao kontinualni. Na izlazu prilagođenog filtra pojavljuju se maksimumi korelacije, koji se lako detektuju pomoću praga i poznatog perioda slanja simbola.

Pretpostavimo da diskretizovani primljeni signal $x(n) = s(n) + v(n)$ u sebi sadrži simbol (uzorak) pomjeren na lokaciju k_0, $s(n) = f(n - k_0)$, narušen aditivnim Gausovim šumom, $v(n)$, nulte srednje vrijednosti i varijanse σ_0^2. Signal na izlazu prilagođenog filtra je oblika $y(n) = y_s(n) + w(n)$, gdje je:



Slika 15.10 Blok šema primjene prilagođenog filtra u telekomunikacijama.

$$y_s(n) = h(n) * s(n), \tag{15.83}$$

dok je šum $w(n)$:

$$w(n) = v(n) * h(n), \tag{15.84}$$

sadržan u signalu na izlazu prilagođenog filtra, takođe Gausov šum, nulte srednje vrijednosti, sa spektralnom gustinom snage:

$$P_{ww}\left(e^{j\omega}\right) = \sigma_0^2 \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2. \tag{15.85}$$

Varijansa šuma na izlazu prilagođenog filtra je jednaka vrijednosti njegove autokorelacije u nuli, koju dobijemo inverznom DTFT njegove spektralne gustine snage:

$$\sigma_w^2 = E\left\{w^2(n)\right\} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega. \tag{15.86}$$

Kako nam je cilj da minimiziramo srednju snagu šuma i istovremeno maksimiziramo snagu odziva na pobudu u obliku datog uzorka:

$$y_s(n) = s(n) * h(n), \tag{15.87}$$

na izlazu prilagođenog filtra u trenutku detekcije k_0, kriterijumsku funkciju zapisujemo sa:

$$\eta = \frac{\left|y_s(k_0)\right|^2}{E\left\{w^2(n)\right\}} = \frac{\left|\int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k_0} d\omega\right|^2}{\sigma_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}. \tag{15.88}$$

Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti imamo da je:

$$\frac{\left|\int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega k_0}d\omega\right|^2}{\sigma_0^2\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega} \leq \frac{\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|S\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega\right]\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega\right]}{\sigma_0^2\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega} = \frac{1}{\sigma_0^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|S\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega\right], \tag{15.89}$$

pa maksimalnu vrijednost kriterijumske funkcije postižemo kada je:

$$\hat{H}\left(e^{j\omega}\right) = \kappa S^*\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega k_0}, \tag{15.90}$$

uz proizvoljnu realnu vrijednost κ, različitu od nule. Razumljivo je usvojiti da je $\kappa = 1$. To nas dovodi do impulsnog odziva koji je oblika:

$$\hat{h}(n) = s(k_0 - n) = f(-n). \tag{15.91}$$

Ovaj rezultat, koji smo dobili maksimizirajući odnos snage prijemnog signala u trenutku detekcije prema srednjoj snazi šuma, je jednak impulsnom odzivu prilagođenog filtra $\hat{h}_o(n)$, koji smo ranije izveli, koristeći metod najmanjih kvadrata. Zaključujemo da prilagođeni filtar maksimizira odnos snage signala u trenutku detekcije simbola i srednje snage šuma.

U odsustvu šuma, filtriranje prilagođenim filtrom je jednako autokorelaciji primljenog signala $s(n)$, koja je pomjerena za k_0. Budući da autokorelacija ima maksimalnu vrijednost u nuli, maksimalan odziv na izlazu filtra pobuđenog sa $s(n)$ dobijamo na lokaciji k_0. Ako je period simbola koji se šalju jednak k_0, onda će maksimumi korelacije nastupiti na lokacijama detekcije simbola. To nam omogućava da, jednostavnim poređenjem vrijednosti signala na izlazu prilagođenog filtra sa usvojenim pragom, sa većom vjerovatnoćom ispravne detekcije dekodujemo binarne simbole.

15.3.2 Vinerov filtar

Vinerov filtar se koristi u cilju postizanja željenih statističkih osobina izlaznog slučajnog procesa prilikom filtriranja slučajnih procesa. Projektuje se tako da, na osnovu realizacija $x(n)$ ulaznog slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$, na svom izlazu generiše realizacije $\hat{y}(n)$, sa njim povezanog slučajnog procesa $\hat{\mathbf{Y}}_n$, koje, od realizacija $y(n)$ željenog slučajnog procesa $\mathbf{Y}_n$, što manje odstupaju u smislu srednje kvadratne greške, date sa:

$$\xi(\hat{\mathbf{h}}) = E\left\{e^2(n)\right\} = E\left\{\left(y(n) - \hat{y}(n)\right)^2\right\}, \tag{15.92}$$

gdje se statističko usrednjavanje vrši po članovima ansambla. Princip rada Vinerovog filtra prikazan je na Slici 15.11.

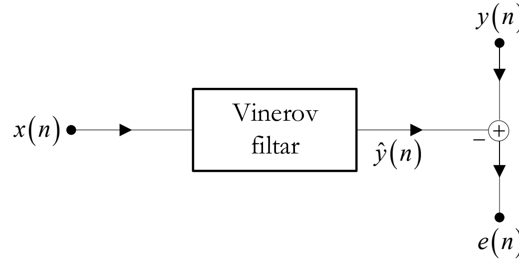
Pri ovakvoj formulaciji problema, postavlja se pitanje da li, ako grešku definišemo preko razlike između željenog signala $y(n)$ i procjene željenog signala $\hat{y}(n)$, treba da poznajemo željen signal. Odgovor je negativan, jer ćemo na kraju izvođenja vidjeti da optimalni koeficijenti filtra zavise od statističkih osobina željenog signala, koje mogu biti poznate, ili se mogu procijeniti, a ne od samog željenog signala.

Pretpostavimo da su slučajni procesi realni i stacionarni u širem smislu. Nulta srednja vrednost nije striktno neophodna, iako je centriranje podataka poželjno u praktičnim realizacijama. Impulsni odziv Vinerovog filtra dobijamo minimizacijom srednje kvadratne greške:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}} = \arg\min_{\mathbf{h}} E\left\{e^2(n)\right\} = \arg\min_{\mathbf{h}} E\left\{\left(y(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right)^2\right\}, \tag{15.93}$$

postavljajući da derivacije srednje kvadratne greške po $h(m)$ budu jednake nuli:

$$\frac{\partial}{\partial h(m)} = -2E\left\{\left(\underbrace{y(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)}_{e(n)}\right)x(n-m)\right\} = 0, \tag{15.94}$$



Slika 15.11 Princip rada Vinerovog filtra.

za svako *m*, osim za one vrijednosti elemenata impulsnog odziva koje su, eventualno, na neki način unaprijed određene, kao što je, recimo, slučaj kod kauzalnog impulsnog odziva, gdje se traži da vrijednosti elemenata impulsnog odziva budu jednake nuli za negativne vrijednosti nezavisne promjenljive. Iz tog uslova dobijamo da je:

$$E\left\{e(n)x(n-m)\right\}=0\,, \tag{15.95}$$

odnosno da je kroskorelaciona sekvenca slučajnog procesa greške $\mathbf{E}_n$ i ulaznog slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$ jednaka nuli:

$$r_{\mathbf{EX}}(m)=0\,, \tag{15.96}$$

za svako razmatrano m. Stoga je (15.95) princip ortogonalnosti za slučajne procese.

Za ergodične procese, kada statističko usrednjavanje možemo zamijeniti usrednjavanjem u vremenu, ovaj uslov se svodi na:

$$\sum_n e(n)x(n-m)=0\,. \tag{15.97}$$

Posmatrajući grešku $e(n)$ i ulazne podatke $x(n-m)$ kao vektore, zaključujemo da je vektor greške ortogonalan na sve vektore ulaznih podataka koji se koriste za generisanje procjene $\hat{y}(n)$. Kada su slučajni procesi nultih srednjih vrijednosti, ortogonalnost je ekvivalentna nekorelisanosti iskazanoj sa (15.96).

Primijetimo da je:

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{EX}}(m) &= E\{e(n)x(n-m)\} = \\ &= E\{(y(n)-\hat{y}(n))x(n-m)\} = \\ &= r_{\mathbf{YX}}(m) - r_{\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}(m), \end{aligned} \tag{15.98}$$

pa je:

$$r_{\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}(m) = r_{\mathbf{YX}}(m). \tag{15.99}$$

To znači da se Vinerovim filtrom postiže da kroskorelacija slučajnog procesa na izlazu filtra i ulaznog slučajnog procesa bude jednaka kroskorelaciji željenog i ulaznog slučajnog procesa.

Srednju kvadratnu grešku možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= E\{y^2(n)\} - 2E\{y(n)\hat{y}(n)\} + E\{\hat{y}(n)\hat{y}(n)\} = \\ &= E\{y^2(n)\} - 2E\left\{y(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right\} + \\ &+ E\left\{\hat{y}(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right\} = \\ &= r_{\mathbf{YY}}(0) - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)r_{\mathbf{YX}}(k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)r_{\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}(k), \end{aligned} \tag{15.100}$$

odakle, uzimajući u obzir (15.99), pronalazimo njenu minimalnu vrijednost:

$$\min E\{e^2(n)\} = r_{\mathbf{YY}}(0) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)r_{\mathbf{YX}}(k), \tag{15.101}$$

Koja se postiže pri optimalnom izboru vrijednosti elemenata impulsnog odziva. Primijetimo da je minimalna vrijednost srednje kvadratne greške manja ukoliko postoji veća korelisanost ulaznog i željenog slučajnog procesa, a ne može da bude veća od vrijednosti autokorelacije željenog slučajnog procesa u nuli.

Budući da se slučajni signal $\hat{y}(n)$ dobija filtriranjem slučajnog signala $x(n)$ impulsnim odzivom optimalnog Vinerovog filtra $\hat{h}(n)$, vrijedi da je:

$$r_{\hat{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}(m) = \hat{h}(m) * r_{\mathbf{XX}}(m). \tag{15.102}$$

Kombinujući (15.102) sa (15.99), dobijamo:

$$\hat{h}(m) * r_{\mathbf{XX}}(m) = r_{\mathbf{YX}}(m), \tag{15.103}$$

odnosno:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) r_{\mathbf{XX}}(m-k) = r_{\mathbf{YX}}(m), \tag{15.104}$$

odakle treba da, poznavajući autokorelacionu sekvencu ulaznog slučajnog procesa i kroskorelacionu sekvencu željenog i ulaznog slučajnog procesa, odredimo vrijednosti elemenata impulsnog odziva optimalnog Vinerovog filtra.

Uvedena pretpostavka da su željeni signal i šum slučajni procesi, stacionarni u širem smislu, te da su poznate njihove autokorelacione sekvence, je rijedak slučaj u praksi. Ipak, Vinerov filtar nije koristan samo sa teorijskog stanovišta jer, u mnogim slučajevima, željeni signal može biti približno stacionaran u širem smislu u kratkom vremenskom periodu. Govor je, na primjer, slučajni proces koji varira u vremenu, ali se, u vremenskim intervalima širine 15-20 ms, može smatrati da je stacionaran u širem smislu. Uzorci iz takvih vremenskih intervala se mogu koristiti za procjenu autokorelacionih i kroskorelacionih sekvenci. Te procjene se, umjesto pravih vrijednosti, koriste u (15.104) za određivanje impulsnog odziva optimalnog Vinerovog filtra.

Vinerov filtar može da se projektuje kao IIR nekauzalni ili kauzalni filtar, te kao FIR filtar. U nastavku izlaganja ćemo posebno razmotriti ova tri tipa Vinerovog filtra.

15.3.2.1 Vinerov nekauzalni IIR filtar

U slučaju filtra sa beskonačnim impulsnim odzivom, (15.104) je skup beskonačno mnogo jednačina, te ga nije moguće riješiti metodama koje se uobičajeno koriste za rješavanje linearnih jednačina. Stoga rješenje tražimo u transformacionom domenu. Kada nema ograničenja u pogledu vrijednosti impulsnog odziva, tj. kada ne postoje vrijednosti koje su unaprijed određene, na (15.104) je moguće primijeniti z-transformaciju:

$$\hat{H}_{IIR}(z)\Gamma_{\mathbf{XX}}(z) = \Gamma_{\mathbf{YX}}(z), \tag{15.105}$$

pri čemu je $\hat{h}(m) \leftrightarrow \hat{H}_{IIR}(z)$, $r_{\mathbf{XX}}(m) \leftrightarrow \Gamma_{\mathbf{XX}}(z)$ i $r_{\mathbf{YX}}(m) \leftrightarrow \Gamma_{\mathbf{YX}}(z)$. Sada lako dobijamo funkciju prenosa nekauzalnog IIR Vinerovog filtra:

$$\hat{H}_{IIR}(z) = \frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)}{\Gamma_{\mathbf{XX}}(z)}. \tag{15.106}$$

Ukoliko za neku od korelacionih sekvenci u (15.104) ne egzistira *z*-transformacija, primjenom Furijeove transformacije za diskretne signale dolazimo do frekvencijske karakteristike nekauzalnog IIR Vinerovog filtra:

$$\hat{H}_{IIR}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}\left(e^{j\omega}\right)}{\Gamma_{\mathbf{XX}}\left(e^{j\omega}\right)}, \tag{15.107}$$

pri čemu je $\Gamma_{\mathbf{XX}}\left(e^{j\omega}\right)$ spektralna gustina snage ulaznog procesa, dok je $\Gamma_{\mathbf{YX}}\left(e^{j\omega}\right)$ *krosspektralna gustina snage* slučajnih procesa na izlazu i ulazu filtra.

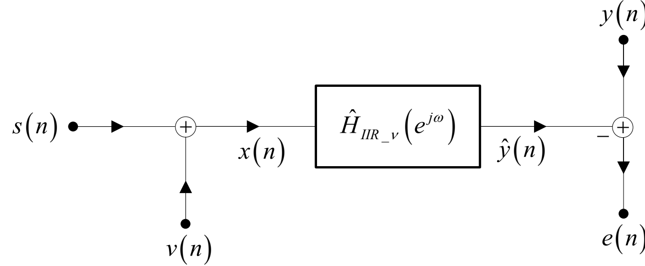
Vinerov IIR filtar za uklanjanje šuma

Jedna od najčešćih primjena IIR Vinerovog filtra je uklanjanje šuma $\nu(n)$ iz signala $x(n) = s(n) + \nu(n)$, prema blok šemi na Slici 15.12. Pretpostavimo da su ulazni slučajni proces $\mathbf{S}_n$, sa realizacijama $s(n)$, i šum $\boldsymbol{\Upsilon}_n$, čije realizacije smo označili sa $\nu(n)$, nekorelisani slučajni procesi, stacionarni u širem smislu. Tada vrijedi da je:

$$\begin{gathered} E\{x(n)x(n-k)\} = E\{[s(n)+\nu(n)][s(n-k)+\nu(n-k)]\}, \\ r_{\mathbf{XX}}(k) = r_{\mathbf{SS}}(k) + r_{\boldsymbol{\Upsilon\Upsilon}}(k), \end{gathered} \tag{15.108}$$

$$\begin{gathered} E\{y(n)x(n-k)\} = E\{s(n)[s(n-k)+\nu(n-k)]\}, \\ r_{\mathbf{YX}}(k) = r_{\mathbf{SS}}(k), \end{gathered} \tag{15.109}$$

pa frekvencijsku karakteristiku optimalnog IIR Vinerovog filtra za uklanjanje šuma možemo zapisati u obliku:



Slika 15.12 Vinerov IIR filtar za uklanjanje šuma.

$$\hat{H}_{IIR_v}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\Gamma_{SS}\left(e^{j\omega}\right)}{\Gamma_{SS}\left(e^{j\omega}\right)+\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)}, \tag{15.110}$$

gdje je $\Gamma_{SS}\left(e^{j\omega}\right)$ spektralna gustina snage ulaznog slučajnog procesa prije narušavanja šumom, a $\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)$ spektralna gustina snage šuma. Primijetimo dvije važne osobine ovog filtra. Na učestanostima gdje je spektralna gustina snage šuma mala, skoro da nema potrebe za filtriranjem signala, i amplitudna karakteristika filtra je približno jednaka jedinici, $\hat{H}_{IIR_v}\left(e^{j\omega}\right)\approx 1$. Na učestanostima gdje šum dominira, $\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)\to\infty$, izlaz filtra je približno jednak nuli, jer je na tim učestanostima $\hat{H}_{IIR_v}\left(e^{j\omega}\right)\approx 0$.

U praksi se u (15.110) koriste procijenjene vrijednosti spektralnih gustina snaga $\Gamma_{SS}\left(e^{j\omega}\right)$ i $\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)$. Spektralna gustina snaga ulaznog slučajnog procesa prije narušavanja šumom, $\mathbf{S}_n$, i spektralna gustina snage šuma, Υ_n, se najčešće procjenjuju na osnovu pretpostavki o prirodi šuma. U mnogim primjenama se može pretpostaviti da se radi o bijelom šumu, poznate varijanse σ_v^2, te je procjenjena vrijednost autokorelacije šuma, $\hat{r}_{\Upsilon\Upsilon}(k)$, jednaka nuli za svako *k*, osim za $k=0$, gdje je $\hat{r}_{\Upsilon\Upsilon}(0)=\sigma_v^2$. Ako šum nije bijeli, koriste se modeli šuma za procjenu njegove autokorelacije. U situacijama kada je moguće snimiti šum na ulazu filtra bez željenog signala, autokorelaciju šuma je moguće procijeniti

računanjem autokorelacije jedne njegove realizacije. Pored toga, na osnovu izmjerenih vrijednosti signala na ulazu filtra, može se procijeniti autokorelacija slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$ na ulazu filtra, $\hat{r}_{\mathbf{XX}}(k)$. Kako smo uveli pretpostavku da slučajni proces $\mathbf{S}_n$ i šum Υ_n nisu korelisani, procjenu autokorelacije slučajnog procesa $\mathbf{S}_n$ računamo kao razliku autokorelacije slučajnog procesa $\mathbf{X}_n$ na ulazu filtra i šuma Υ_n, $\hat{r}_{\mathbf{SS}}(k)=\hat{r}_{\mathbf{XX}}(k)-\hat{r}_{\Upsilon\Upsilon}(k)$. Procijenjene spektralne gustine snaga slučajnih procesa se određuju kao DTFT procjena njihovih autokorelacija. Kada postoji neka prethodna informacija ili pretpostavka o prirodi slučajnog procesa $\mathbf{S}_n$, njegovu autokorelaciju možemo odrediti i na druge načine. Recimo, ako znamo da se $\mathbf{S}_n$ može modelirati kao AR proces, njegova autokorelacija se može procijeniti iz parametara modela. Na primjer, ako se koristi AR model prvog reda, $s(n)=a_1 s(n-1)+w(n)$, gdje je a_1 parametar modela, a $w(n)$ bijeli šum na ulazu modela sa varijansom σ_w^2, onda je procjena spektralne gustine snage slučajnog procesa $\mathbf{S}_n$ data sa:

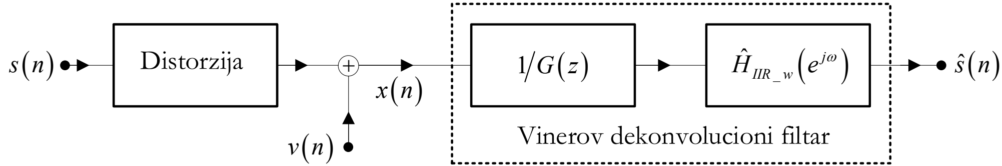
$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{SS}}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sigma_w^2}{\left|1-a_1 e^{-j\omega}\right|^2}, \tag{15.111}$$

a odgovarajuća autokorelaciona sekvenca je:

$$\hat{r}_{\mathbf{SS}}(k)=a_1^{|k|}. \tag{15.112}$$

Vinerov dekonvolucioni filtar

U toku akvizicije i prenosa, originalni signal često biva degradiran, npr. zbog neidealnih karakteristika senzora i neidealnih kanala za prenos signala. Te vrste degradacija se uglavnom mogu procijeniti i opisati kao prolazak signala kroz sistem koji vrši degradaciju, sa poznatom funkcijom prenosa $G(z)$. Ukoliko je sistem za degradaciju invertibilan, teorijski gledano, prolaskom degradiranog signala kroz filtar sa funkcijom prenosa $1/G(z)$, trebali bismo dobiti originalni signal. U praksi to funkcioniše samo ako signal nije narušen šumom, što skoro nikada nije slučaj. Poseban problem predstavljaju učestanosti na kojima $G(z)$ ima male vrijednosti, jer inverzni filtar za rekonstrukciju signala, sa funkcijom



Slika 15.13 Vinerov dekonvolucioni filtar.

prenosa $1/G(z)$, ima veliko pojačanje na tim učestanostima. Budući da je baš na tim učestanostima korisni signal jako potisnut a šum dominantan u signalu, nakon propuštanja kroz inverzni filtar, šum će biti jako pojačan i kompletan signal postaje neupotrebljiv. Zbog toga se, prije propuštanja signala kroz inverzni filtar, primjenjuje Vinerov filtar za uklanjanje šuma. Kaskadna veza inverznog filtra i IIR Vinerovog filtra za uklanjanje šuma, prikazana na Slici 15.13, se jednim imenom naziva *Vinerov dekonvolucioni filtar*. Često se označava i kao filtar za ekvalizaciju kanala, jer se koristi za rekonstrukciju signala nakon prolaska kroz prenosni kanal.

Inverzni filtar rekonstruiše originalni signal $s(n)$, ali istovremeno modifikuje i šum $v(n)$, pa ćemo šum na izlazu inverznog filtra označiti sa $w(n)$. Zbog prolaska šuma $v(n)$ kroz filtar sa funkcijom prenosa $1/G(z)$, možemo pisati da je spektralna gustina snage šuma $w(n)$ data sa:

$$\Gamma_{\mathbf{ww}}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}}\Gamma_{\mathbf{vv}}\left(e^{j\omega}\right). \tag{15.113}$$

Znajući funkciju prenosa Vinerovog filtra za uklanjanje šuma, datu sa (15.110), koju sad primjenjujemo na signal $s(n)$ narušen šumom $w(n)$, a ne šumom $v(n)$, dobijamo da je:

$$\hat{H}_{IIR_w}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\Gamma_{\mathbf{ss}}\left(e^{j\omega}\right)}{\Gamma_{\mathbf{ss}}\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}}\Gamma_{\mathbf{vv}}\left(e^{j\omega}\right)}. \tag{15.114}$$

Kaskadnim vezivanjem inverznog filtra i Vinerovog filtra za uklanjanje šuma, dobijamo Vinerov dekonvolucioni filtar sa frekvencijskom karakteristikom:

$$\hat{H}_{IIR_deconv}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{G\left(e^{j\omega}\right)}\cdot\frac{\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\Gamma_{\mathbf{SS}}\left(e^{j\omega}\right)}{\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\Gamma_{\mathbf{SS}}\left(e^{j\omega}\right)+\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)},\tag{15.115}$$

koja se može zapisati u jednostavnijem obliku sa:

$$\hat{H}_{IIR_deconv}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{G^*\left(e^{j\omega}\right)\Gamma_{\mathbf{SS}}\left(e^{j\omega}\right)}{\left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\Gamma_{\mathbf{SS}}\left(e^{j\omega}\right)+\Gamma_{\Upsilon\Upsilon}\left(e^{j\omega}\right)}.\tag{15.116}$$

U odsustvu šuma, Vinerov dekonvolucioni filtar postaje inverzni filtar.

15.3.2.2 Vinerov kauzalni IIR filtar

Nekauzalni IIR Vinerov filtar nije pogodan za rad u realnom vremenu. Ako želimo kauzalan IIR Vinerov filtar, prilikom optimizacije je neophodno postaviti dodatni uslov, da vrijednosti elemenata impulsnog odziva kauzalnog IIR Vinerovog filtra $\hat{h}_c(m)$ budu jednake nuli za $m<0$, tako da je:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{h}_c(k)r_{\mathbf{XX}}(m-k)&=r_{\mathbf{YX}}(m),\ m\geq 0,\\ \hat{h}_c(m)&=0,\qquad m<0.\end{aligned}\tag{15.117}$$

U (15.117) se više ne radi o jednostavnoj konvoluciji, pa se rješenje pronalazi postupkom koji su predložili Šenon (Claude Elwood Shannon) i Bode (Hendrik Wade Bode). Tim postupkom se prvo razmatra jednostavni slučaj, kada je ulazni signal bijeli šum, nulte srednje vrijednosti i jedinične varijanse, tako da je:

$$r_{\mathbf{XX}}(m)=\delta(m).\tag{15.118}$$

Tada kauzalne Vinerove jednačine (15.117) poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{h}_c(k)r_{\mathbf{XX}}(m-k)=\hat{h}_c(m)&=r_{\mathbf{YX}}(m),\ m\geq 0,\\ \hat{h}_c(m)&=0,\qquad m<0.\end{aligned}\tag{15.119}$$

U slučaju nekauzalnog IIR Vinerovog filtra pobuđenog istom pobudom imali bismo da je:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) r_{\mathbf{XX}}(m-k) = \hat{h}(m) = r_{\mathbf{YX}}(m), \ \forall m. \tag{15.120}$$

Pri ovoj specifičnoj pobudi, optimalne vrijednosti elemenata impulsnog odziva kauzalnog IIR Vinerovog filtra jednake su optimalnim vrijednostima impulsnog odziva nekauzalnog IIR Vinerovog filtra za $m \geq 0$. To nas navodi na ideju da, ako osiguramo da je filtar uvijek pobuđen bijelim šumom nulte srednje vrijednosti i jedinične varijanse, optimalno rješenje za kauzalnu varijantu filtra lako možemo odrediti zadržavajući jednake vrijednosti impulsnog odziva kao kod nekauzalnog filtra, $\hat{h}_c(m) = \hat{h}(m)$, za $m \geq 0$, a izjednačavajući sa nulom vrijednosti impulsnog odziva $\hat{h}_c(m)$ za $m < 0$.

Ulaz filtra uobičajeno nije bijeli šum, te treba izvršiti tzv. izbjeljivanje ulaznog signala. Za to je neophodno imati a priori znanje o autokorelaciji ulaznog signala, ili njenoj *z*-transformaciji. Pretpostavićemo da je *z*-transformacija autokorelacione sekvence racionalna funkcija. Autokorelaciona sekvenca je parna, pa za njenu *z*-transformaciju vrijedi da je $\Gamma_{\mathbf{XX}}(z) = \Gamma_{\mathbf{XX}}(z^{-1})$, tako da svaki pol i svaka nula imaju svog recipročno simetričnog para. Stoga možemo izvršiti faktorizaciju:

$$\Gamma_{\mathbf{XX}}(z) = \Gamma_{\mathbf{XX}}^{+}(z) \cdot \Gamma_{\mathbf{XX}}^{-}(z), \tag{15.121}$$

tako da se svi polovi i nule $\Gamma_{\mathbf{XX}}^{+}(z)$ nalaze unutar jediničnog kruga, dok se svi polovi i nule $\Gamma_{\mathbf{XX}}^{-}(z)$ nalaze van jediničnog kruga u z-ravni. Dodatno vrijedi da je $\Gamma_{\mathbf{XX}}^{+}(z) = \Gamma_{\mathbf{XX}}^{-}(z^{-1})$ i $\Gamma_{\mathbf{XX}}^{+}(z^{-1}) = \Gamma_{\mathbf{XX}}^{-}(z)$. Znajući ove osobine, pokazaćemo da filtar sa funkcijom prenosa:

$$H_{wh}(z) = \frac{1}{\Gamma_{\mathbf{XX}}^{+}(z)}, \tag{15.122}$$

radi izbjeljivanje signala, tako da su na izlazu filtra realizacije bijelog šuma, čija autokorelacija odgovara delta sekvenci. U tu svrhu, pretpostavićemo da ulazni

slučajni proces ima autokorelacionu sekvencu $r_{\mathbf{XX}}(m)$, dok ćemo autokorelacionu sekvencu slučajnog procesa na izlazu filtra za izbjeljivanje označiti sa $r_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(m)$. Za *z*-transformaciju autokorelacione sekvence na izlazu filtra za izbjeljivanje vrijedi da je:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(z) &= H_{wh}(z)\cdot H_{wh}\left(z^{-1}\right)\cdot\Gamma_{\mathbf{XX}}(z) = \\ &= \frac{1}{\Gamma^{+}_{\mathbf{XX}}(z)}\cdot\frac{1}{\Gamma^{-}_{\mathbf{XX}}(z)}\cdot\Gamma_{\mathbf{XX}}(z) = 1,\end{aligned} \tag{15.123}$$

odnosno da je:

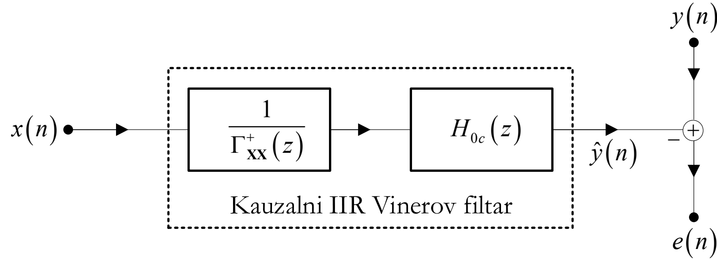
$$r_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(m) = \delta(m), \tag{15.124}$$

te se zaista radi o filtru za izbjeljivanje. Filtar za izbjeljivanje je stabilan i kauzalan, jer su mu svi polovi i sve nule unutar jediničnog kruga u z-ravni. Osim toga, filtar za izbjeljivanje ne mijenja ulazni signal u ireverzibilnom smislu, jer postoji njegov inverzni filtar, sa funkcijom prenosa $\Gamma^{+}_{\mathbf{XX}}(z)$, koji je takođe stabilan i kauzalan.

Kad bismo projektovali optimalni nekauzalni IIR Vinerov filtar, nakon filtra za izbjeljivanje kaskadno bi trebalo dodati nekauzalni filtar sa beskonačnim impulsnim odzivom, tako da funkcija prenosa te kaskadne veze bude jednaka ranije određenoj funkciji prenosa optimalnog nekauzalnog Vinerovog filtra, $\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)/\Gamma_{\mathbf{XX}}(z)$. Impulsni odziv tog filtra ćemo označiti sa $h_0(m)$, a njegovu funkciju prenosa sa $H_0(z)$. Iz navedenog uslova nalazimo da je:

$$H_0(z) = \frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)}{\Gamma_{\mathbf{XX}}(z)}\cdot\Gamma^{+}_{\mathbf{XX}}(z) = \frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)}{\Gamma^{-}_{\mathbf{XX}}(z)}. \tag{15.125}$$

Nas zanima kauzalna verzija, pa ćemo nekauzalni filtar sa funkcijom prenosa $H_0(z)$ zamijeniti njegovom kauzalnom varijantom. Budući da je na ulazu filtra sa funkcijom prenosa $H_0(z)$ bijeli šum, kauzalnu varijantu tog filtra, čiji ćemo impulsni odziv označiti sa $h_{0c}(m)$, dobijamo povratkom u vremenski domen i uzimanjem da je $h_{0c}(m) = h_0(m)$ za $m \geq 0$, a $h_{0c}(m) = 0$ za $m < 0$. Transformacioni par tako dobijenog kauzalnog impulsnog odziva označićemo



Slika 15.14 Šenon-Bodeova realizacija kauzalnog IIR Vinerovog filtra.

sa $H_{0c}(z)$, a operator $[\cdot]_+$ ćemo koristiti da označimo *z*-transformaciju na ovakav način modifikovane sekvence:

$$H_{0c}(z)=\left[\frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)}{\Gamma^{-}_{\mathbf{XX}}(z)}\right]_+ . \tag{15.126}$$

Sada možemo formulisati izraz za funkciju prenosa Šanon-Bodeove realizacije kauzalnog IIR Vinerovog filtra sa:

$$H_{IIR_c}(z)=\frac{1}{\Gamma^{+}_{\mathbf{XX}}(z)}\cdot\left[\frac{\Gamma_{\mathbf{YX}}(z)}{\Gamma^{-}_{\mathbf{XX}}(z)}\right]_+ . \tag{15.127}$$

Blok šema na Slici 15.14 prikazuje ovu vrstu realizacije kauzalnog IIR Vinerovog filtra. Detaljnom matematičkom analizom, koja prevazilazi okvire ove knjige, može se pokazati da je srednja kvadratna greška koja se dobije kauzalnim rješenjem veća nego kod optimalnog nekauzalnog IIR Vinerovog filtra.

15.3.2.3 Vinerov FIR filtar

Ako je impulsni odziv filtra konačne dužine N, sistem (15.104) ima konačan broj jednačina koje treba riješiti po N nepoznatih vrijednosti elemenata impulsnog odziva. Nakon što uvedemo oznake za vektor formiran od elemenata impulsnog odziva:

$$\hat{\mathbf{h}}=\left[\hat{h}(n)\quad \hat{h}(n-1)\quad \cdots\quad \hat{h}(n-N+1)\right]^{\mathrm{T}} \tag{15.128}$$

i slučajni vektor na ulazu filtra:

$$\mathbf{X}=\left[x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{15.129}$$

slučajne signale na izlazu Vinerovog FIR filtra možemo zapisati sa:

$$\hat{y}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{h}(k)x(n-k)=\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{h}}. \tag{15.130}$$

Trenutna greška, koja ukazuje na odstupanje filtriranog od željenog signala u svakom vremenskom trenutku, je data sa:

$$e(n)=y(n)-\hat{y}(n)=y(n)-\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}, \tag{15.131}$$

a srednja kvadratna greška ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\xi\left(\hat{\mathbf{h}}\right)&=E\left\{e^2(n)\right\}=E\left\{y^2(n)\right\}-2E\left\{\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\,y(n)\right\}+E\left\{\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{h}}\right\}=\\&=r_{\mathbf{YY}}(0)-2\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}E\left\{\mathbf{X}\,y(n)\right\}+\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}E\left\{\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right\}\hat{\mathbf{h}}.\end{aligned} \tag{15.132}$$

Primijetimo da srednja kvadratna greška ima kvadratnu zavisnost od koeficijenata impulsnog odziva, te ima globalni minimum kada je:

$$\begin{aligned}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}\right)&=\left[\frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}(0)} \quad \frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}(1)} \quad \cdots \quad \frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}(N-1)}\right]^{\mathrm{T}}=\\&=-2E\left\{\left[\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}(0)} \quad \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}(1)} \quad \cdots \quad \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}(N-1)}\right]^{\mathrm{T}}\left(y(n)-\hat{y}(n)\right)\right\}=\\&=-2E\left\{\left[x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)\right]^{\mathrm{T}}\left(y(n)-\hat{y}(n)\right)\right\}=\\&=-2E\left\{\mathbf{X}\left(y(n)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{h}}\right)\right\}=\mathbf{0}.\end{aligned} \tag{15.133}$$

Nakon što uvedemo oznake za kroskorelacioni vektor:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}=E\left\{\mathbf{X}\,y(n)\right\}=E\left\{\begin{bmatrix}x(n)\\x(n-1)\\\vdots\\x(n-N+1)\end{bmatrix}y(n)\right\}=\begin{bmatrix}r_{\mathbf{YX}}(0)\\r_{\mathbf{YX}}(1)\\\vdots\\r_{\mathbf{YX}}(N-1)\end{bmatrix}, \tag{15.134}$$

i autokorelacionu matricu slučajnog vektora $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XX}} = E\left\{\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right\} =$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-N+1) \end{bmatrix}\right\} = \tag{15.135}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{\mathbf{XX}}(0) & r_{\mathbf{XX}}(1) & \cdots & r_{\mathbf{XX}}(N-1) \\ r_{\mathbf{XX}}(1) & r_{\mathbf{XX}}(0) & \cdots & r_{\mathbf{XX}}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\mathbf{XX}}(N-1) & r_{\mathbf{XX}}(N-2) & \cdots & r_{\mathbf{XX}}(0) \end{bmatrix},$$

dobijamo tzv. *Viner* (Norbert Wiener) - *Hopfove* (Eberhard Hopf) *jednačine*:

$$-2\mathbf{p}_{\mathbf{YX}} + 2\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{0}. \tag{15.136}$$

Autokorelaciona matrica $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$ je, osim za $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}} = \mathbf{0}$, pozitivno semidefinitna, tako da postoji njena inverzna matrica. Rješavanjem Viner-Hopfove jednačine dobijamo optimalne koeficijente impulsnog odziva Vinerovog FIR filtra:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}} = \mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}. \tag{15.137}$$

U praktičnim primjenama, podrazumijevajući da se radi o ergodičnim procesima, koriste se procijenjene vrijednosti elemenata $r_{\mathbf{XX}}(k)$ autokorelacione matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$, dobijene vremenskim usrednjavanjem:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k),\ k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{15.138}$$

Za procjenu vrijednosti elemenata $r_{\mathbf{YX}}(k)$ kroskorelacionog vektora $\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}$ ne možemo koristiti isti princip, jer u:

$$\hat{r}_{yx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n+k)x(n), \tag{15.139}$$

figurišu i vrijednosti elemenata željene sekvence, koju ne poznajemo. Problem se rješava uvođenjem pretpostavki o kroskorelaciji željenog i ulaznog signala, što ćemo pokazati nešto kasnije, kada budemo razmatrali primjenuVinerovog FIR filtra za uklanjanje šuma.

Funkcija greške $\xi\left(\hat{\mathbf{h}}\right)$ je površ drugog reda u *N*-dimenzionalnom prostoru filtarskih koeficijenata. Minimalna greška, koja se postiže pri optimalnim koeficijentima filtra (15.137), je jednaka:

$$\xi\left(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}}\right) = r_{\mathbf{YY}}(0) - 2\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{YX}} + \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}} = r_{\mathbf{YY}}(0) - \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{o}}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}. \qquad (15.140)$$

Do Viner-Hopfovih jednačina se može doći i koristeći princip ortogonalnosti:

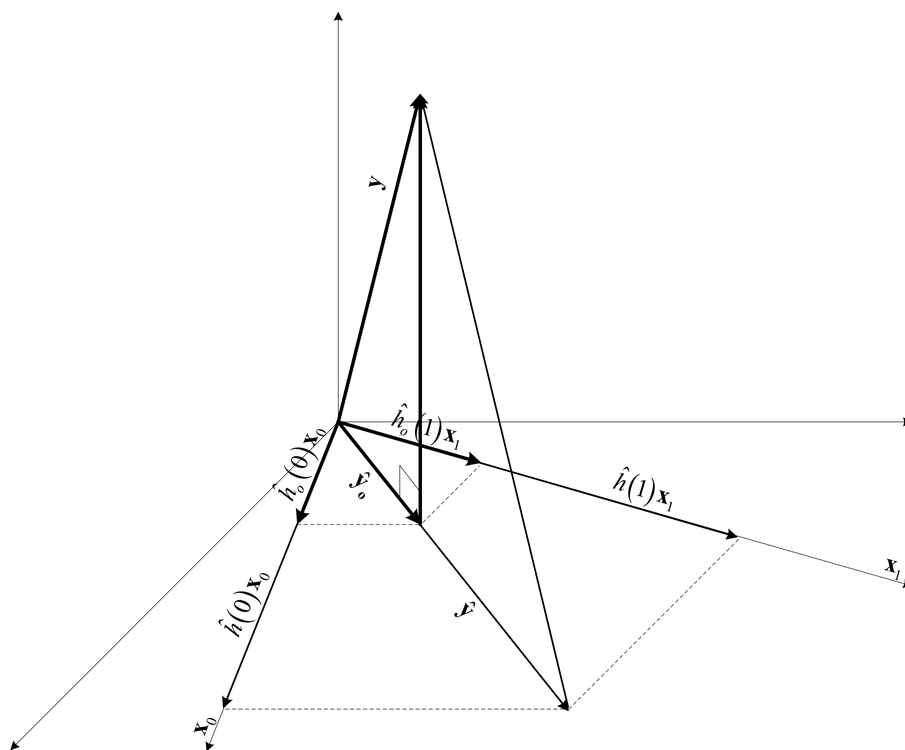
$$\begin{gathered} E\left\{x(n-m)\left[y(n)-\sum_{k=0}^{N-1}\hat{h}(k)x(n-k)\right]\right\}=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}\hat{h}(k)E\left[x(n-m)x(n-k)\right]=E\left[x(n-m)y(n)\right],\ m=0,1,\ldots,N-1. \end{gathered} \qquad (15.141)$$

što je ekvivalentno sa (15.136). Po principu ortogonalnosti, u cilju postizanja minimalne srednje kvadratne greške, koeficijenti filtra se podešavaju dok vektor greške $e(n)$ ne postane ortogonalan na vektore ulaznih podataka koji se koriste prilikom procjene željenog signala. Ako napišemo relaciju (15.130) u razvijenom obliku:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{y}(0)\\ \hat{y}(1)\\ \vdots\\ \hat{y}(L-1)\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{h}(0)\underbrace{\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ \vdots\\ x(L-1)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \hat{h}(1)\underbrace{\begin{bmatrix}x(-1)\\ x(0)\\ \vdots\\ x(L-2)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1} + \cdots + \hat{h}(N-1)\underbrace{\begin{bmatrix}x(1-N)\\ x(2-N)\\ \vdots\\ x(L-N)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{N-1}}, \qquad (15.142)$$

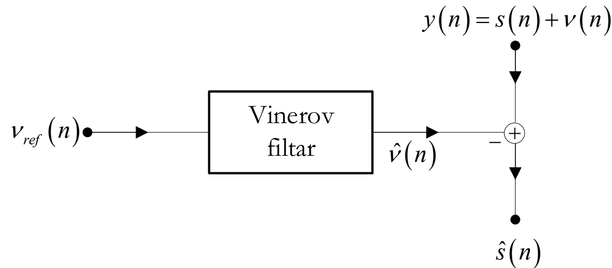
dobijamo izlaz Vinerovog FIR filtra iskazan preko linearne kombinacije vektora ulaznih podataka dužine L:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{h}(0)\mathbf{x}_0 + \hat{h}(1)\mathbf{x}_1 + \cdots + \hat{h}(N-1)\mathbf{x}_{N-1}, \qquad (15.143)$$



Slika 15.15 Geometrijska interpretacija određivanja optimalnih koeficijenata Vinerovog FIR filtra.

sa koeficijentima koji su jednaki elementima impulsnog odziva. Geometrijska interpretacija određivanja optimalnih koeficijenata Vinerovog FIR filtra drugog reda data je na Slici 15.15. Budući da je izlaz filtra linearna kombinacija vektora ulaznih podataka, pri optimalnom izboru filtarskih koeficijenata vektor greške $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ je ortogonalan i na vektor izlaznih podataka, i greška je nekorelisana sa izlaznim podacima.



Slika 15.16 Vinerov FIR filtar za uklanjanje šuma.

Vinerov FIR filtar za uklanjanje šuma

Razmotrimo ponovo filtriranje signala koji je narušen aditivnim šumom, ali sada sa stanovišta primjene Vinerovog FIR filtra. Neka je signal na ulazu filtra $x(n)=s(n)+\nu(n)$, a željeni signal na izlazu filtra $y(n)=s(n)$. Ako su $\mathbf{S}_n$ i Υ_n nekorelisani slučajni procesi, na osnovu (15.109) vrijedi da je $r_{\mathbf{YX}}(k)=r_{\mathbf{SS}}(k)$. U tom slučaju nije neophodno poznavati kroskorelaciju slučajnih procesa na ulazu i izlazu filtra, već za procjenu vrijednosti elemenata $r_{\mathbf{YX}}(k)$ kroskorelacionog vektora $\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}$ koristimo procjenu autokorelacije slučajnog procesa $\mathbf{S}_n$, $r_{\mathbf{SS}}(k)$. Načini procjene autokorelacije $r_{\mathbf{SS}}(k)$ su objašnjeni kod uklanjanja šuma Vinerovim IIR filtrom.

Ukoliko je moguće snimiti šum na ulazu filtra u uslovima kada nema prisustva korisnog signala, tzv. referentni šum, $\nu_{ref}(n)$, za uklanjanje aditivnog šuma, koji je nekorelisan sa korisnim signalom, može se koristiti pristup ilustrovan na Slici 15.16. To je slučaj, na primjer, ako želimo da uklonimo šum iz govornog signala narušenog bukom u pilotskoj kabini, jer smo u mogućnosti da snimimo zvukove u kabini bez govornog signala. Referentni šum je korelisan sa šumom $\nu(n)$ koji se javlja prilikom akvizicije korisnog signala. Odaberimo da željeni signal bude jednak korisnom signalu $s(n)$ koji je narušen šumom, $y(n)=s(n)+\nu(n)$, a na ulaz filtra dovedimo referentni šum, $\nu_{ref}(n)$. U procesu adaptacije, Vinerov filtar pokušava da na svom izlazu generiše slučajni proces čija je kroskorelacija sa

ulaznim slučajnim procesom jednaka kroskorelaciji željenog i ulaznog slučajnog procesa. Kako su signal $s(n)$ i šum $v_{ref}(n)$ nekorelisani, Vinerov filtar generiše na svom izlazu samo dio željenog signala koji je korelisan sa signalom na ulazu filtra, a to je procjena šuma $\hat{v}(n)$. Oduzimanjem signala na izlazu Vinerovog filtra od signala $y(n)$ izdvaja se procjena željenog signala $\hat{s}(n)$.

15.3.3 Kalmanov filtar

Kalmanov (Rudolf E. Kálmán) *filtar* je optimalni, vremenski promjenljiv filtar, čiji koeficijenti se u toku vremena prilagođavaju promjenama u dinamičkom sistemu i mjernim podacima, koji su nestacionarni slučajni signali. Predstavlja moćan alat za procjenu i predviđanje stanja sistema u prisustvu šuma. Široko se koristi kao osnovna komponenta u aplikacijama kao što su praćenje objekata, navigacija i kontrola vozila, brodova i letjelica, u robotici za planiranje i optimizaciju putanja i kontrolu kretanja, za analizu vremenskih nizova, kao i u ekonometriji. Kalmanov filtar kontinuirano minimizira grešku u procjeni stanja sistema na osnovu kovarijansi stanja i mjerenja. Zasnovan je na preciznom matematičkom modelu sistema, koji uključuje stohastički model dinamike sistema i šuma.

Matematička formulacija algoritma se daje u prostoru stanja. Pretpostavimo da je linearni diskretni dinamički sistem opisan modelom prvog reda u prostoru stanja, sa poznatim parametrima $a(n)$ i $c(n)$:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= a(n)x(n) + w(n), \\ y(n) &= c(n)x(n) + v(n). \end{aligned} \tag{15.144}$$

Sa $x(n)$ je označeno stanje, $w(n)$ je stohastički poremećaj (šum procesa), $y(n)$ je mjerenje, a $v(n)$ šum mjerenja u trenutku *n*. Pretpostavlja se da su šum procesa i šum mjerenja bijeli Gausovi šumovi sa poznatim kovarijansama.

Algoritam je iterativan i svaki korak, koji se odnosi na mjerenje u trenutku *n*, se sastoji od dvije faze: predikcije stanja, u trenutku n^-, i ažuriranja stanja, u

trenutku n^+, gdje je $n^- < n < n^+$. U fazi predikcije stanja se, prije mjerenja u trenutku *n*, na osnovu do tada raspoloživih podataka, generiše procjena trenutnog stanja $\hat{x}\left(n^-\right)$. Nakon novog mjerenja u trenutku *n*, u trenutku n^+, vrši se korekcija procjene stanja. Ažurirano stanje, $\hat{x}\left(n^+\right)$, se dobija minimizacijom varijanse greške ažuriranja stanja. Detalje algoritma ćemo dati u nastavku izlaganja. Algoritam radi u realnom vremenu, koristeći samo prethodno ažurirano stanje za novu predikciju stanja, a prethodnu predikciju stanja i novo mjerenje za ažuriranje stanja, tako da nije potrebno pamtiti prethodna mjerenja.

Kada se računa predikcija (ekstrapolacija) stanja, $\hat{x}\left(n^-\right)$, parametri modela u trenutku *n* još nisu poznati, te se predikcija stanja oslanja na vrijednosti parametara modela u trenutku $n-1$. Predikcija stanja $\hat{x}\left(n^-\right)$ se računa na osnovu prve jednačine modela (15.144), na osnovu ažuriranog stanja u trenutku $\hat{x}\left(n-1\right)^+$, zanemarujući šum procesa:

$$\hat{x}\left(n^-\right) = a\left(n-1\right)\hat{x}\left(\left(n-1\right)^+\right). \tag{15.145}$$

Koristeći ovu predikciju stanja računa se predikcija mjerenja, na osnovu druge jednačine modela (15.144):

$$\hat{y}\left(n^-\right) = c\left(n\right)\hat{x}\left(n^-\right). \tag{15.146}$$

Mjerenjem u trenutku *n* dobijamo novu informaciju, koja je sadržana u razlici predikcije mjerenja, $\hat{y}\left(n^-\right)$, i stvarnog mjerenja, $y\left(n\right)$. Tu razliku nazivamo *inovacija*. Inovacija je mjera greške predikcije stanja i koristi se za ažuriranje stanja. Mala vrijednost inovacije ukazuje na to da je predikcija stanja dobro urađena. Ako je inovacija velika, neophodno je značajnije korigovati procjenu stanja. Inovacija je ključni dio Kalmanovog filtra, jer omogućava da se ažuriranje stanja vrši na osnovu stvarnih mjernih podataka. Kako bi optimizovao praćenje sistema u prisustvu procesnog šuma i šuma mjerenja, korištenjem inovacije sa težinskim faktorom $k\left(n\right)$, Kalmanov filtar neprestano koriguje svoje procjene stanja, na sljedeći način:

$$\hat{x}(n^+) = \hat{x}(n^-) + k(n)\big(y(n) - c(n)\hat{x}(n^-)\big) = \\ = \big(1 - k(n)c(n)\big)\hat{x}(n^-) + k(n)y(n). \tag{15.147}$$

Veća inovacija dovodi do značajnije korekcije stanja. Težinski faktor $k(n)$ se naziva Kalmanov dobitak i određuje se, kao što ćemo uskoro vidjeti, minimizacijom varijanse greške ažuriranja stanja, balansirajući između povjerenja u mjerenje i povjerenja u predikciju stanja.

Budući da je algoritam iterativan, neophodno je usvojiti pretpostavku za vrijednost stanja neposredno prije trenutka $n = 0$, kada počinje mjerenje. Pretpostavljajući da su poznate statističke karakteristike početnog stanja sistema, za tu procjenu stanja, $\hat{x}(0^-)$, se uzima da je:

$$\hat{x}(0^-) = E\big[x(0)\big]. \tag{15.148}$$

Greška predikcije stanja:

$$e^-(n) = x(n) - \hat{x}(n^-), \tag{15.149}$$

tada ima nultu početnu srednju vrijednost:

$$E\big[e^-(0)\big] = E\big[x(0)\big] - E\big[\hat{x}(0)\big] = 0. \tag{15.150}$$

Greška ažuriranja stanja, nakon mjerenja uzetog u *n*-tom trenutku, se može iskazati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} e^+(n^+) &= x(n) - \hat{x}(n^+) = \\ &= x(n) - \big(1 - k(n)c(n)\big)\hat{x}(n^-) - k(n)y(n) = \\ &= e^-(n) + k(n)c(n)\hat{x}(n^-) - k(n)\big(c(n)x(n) + v(n)\big) = \\ &= \big(1 - k(n)c(n)\big)e^-(n) - k(n)v(n), \end{aligned} \tag{15.151}$$

dok je njena srednja vrijednost, uz pretpostavku da je šum mjerenja bijeli šum, data sa:

$$E\big[e^+(n^+)\big] = \big[1 - k(n)c(n)\big]E\big[e^-(n)\big], \tag{15.152}$$

i takođe jednaka nuli u početnom trenutku:

$$E\left[e^{+}\left(0^{+}\right)\right]=\left[1-c(n)k(0)\right]E\left[e^{-}(0)\right]=0. \tag{15.153}$$

Nakon mjerenja u n-tom trenutku i ažuriranja stanja, vrši se predikcija stanja za sljedeći vremenski trenutak. Greška predikcije stanja za sljedeći vremenski trenutak, data sa:

$$\begin{aligned} e^{-}\left((n+1)\right)&=x(n+1)-\hat{x}\left((n+1)^{-}\right)= \\ &=a(n)x(n)+w(n)-a(n)\hat{x}\left(n^{+}\right)= \\ &=a(n)e^{+}\left(n^{+}\right)+w(n), \end{aligned} \tag{15.154}$$

uz pretpostavku da je šum procesa bijeli šum, ima matematičko očekivanje:

$$E\left[e^{-}\left((n+1)\right)\right]=a(n)E\left[e^{+}\left(n^{+}\right)\right]. \tag{15.155}$$

Iz (15.155), za $n=1$ slijedi da je:

$$E\left[e^{-}(1)\right]=0, \tag{15.156}$$

pa iterativnom procedurom, ponavljajući korake date sa (15.152) i (15.155), zaključujemo da se radi o procjeni za koju vrijedi da je:

$$E\left[e^{-}(n)\right]=E\left[e^{+}\left(n^{+}\right)\right]=0,\ \forall n. \tag{15.157}$$

Kalmanov dobitak se određuje minimizacijom varijanse greške ažuriranja stanja, koja je, uz pretpostavku da je kroskorelacija šuma mjerenja i stanja sistema jednaka nuli, data sa:

$$\begin{aligned} p^{+}\left(n^{+}\right)&=E\left[\left(e^{+}\left(n^{+}\right)^{2}\right)\right]=E\left[\left\{\left[1-k(n)c(n)\right]e^{-}(n)-k(n)v(n)\right\}^{2}\right]= \\ &=\left(1-k(n)c(n)\right)^{2}E\left[\left(e^{-}(n)^{2}\right)\right]+k^{2}(n)E\left[v^{2}(n)\right]= \\ &=\left(1-k(n)c(n)\right)^{2}p^{-}(n)+k^{2}(n)r(n), \end{aligned} \tag{15.158}$$

gdje su uvedene oznake $p^{-}(n)=E\left[\left(e^{-}(n)\right)^{2}\right]$ za varijansu greške predikcije stanja i $r(n)=E\left[v^{2}(n)\right]$ za varijansu šuma mjerenja. Tako dobijamo da je:

$$\frac{\partial p^+\left(n^+\right)}{\partial k(n)}=-2\left(1-k(n)c(n)\right)p^-(n)c(n)+2k(n)r(n), \tag{15.159}$$

odakle je:

$$k(n)=p^-(n)c(n)\left(c(n)p^-(n)c(n)+r(n)\right)^{-1}. \tag{15.160}$$

Podešavanje vrijednosti Kalmanovog dobitka se vrši u svakom trenutku diskretnog vremena. Pri ovako odabranoj vrijednosti Kalmanovog dobitka, za varijansu greške ažuriranja stanja se dobije da je:

$$p^+\left(n^+\right)=\left(1-k(n)c(n)\right)p^-(n). \tag{15.161}$$

Zbog iterativne prirode algoritma, potrebno je usvojiti početnu vrijednost za varijansu greške predikcije stanja. Kako smo već usvojili da je $\hat{x}\left(0^-\right)=E\left[x(0)\right]$, dobijamo da je početna vrijednost varijanse greške predikcije stanja jednaka varijansi početnog stanja:

$$p^-(0)=E\left[\left(x(0)-\hat{x}\left(0^-\right)\right)^2\right]=\sigma_x^2(0). \tag{15.162}$$

Ukoliko poznajemo tačnu vrijednost početnog stanja, početna vrijednost varijanse greške predikcije stanja je jednaka nuli. U suprotnom, početnu vrijednost varijanse greške predikcije stanja biramo to veću što smo manje sigurni da će početno stanje biti blisko očekivanoj vrijednosti.

Za računanje Kalmanovog dobitka, potrebno je da varijansu greške predikcije stanja iskažemo preko vrijednosti varijanse ažuriranja stanja i varijanse šuma procesa $q(n)=E\left[w^2(n)\right]$ u prethodnom trenutku:

$$\begin{aligned}
p^-(n)&=E\left[\left(x(n)-\hat{x}\left(n^-\right)\right)^2\right]=\\
&=E\left[\left(a(n-1)x(n-1)+w(n-1)-a(n-1)\hat{x}\left((n-1)^+\right)\right)^2\right]=\\
&=a(n-1)E\left[\left(e^+\left((n-1)^+\right)\right)^2\right]a(n-1)+E\left[w^2(n-1)\right]=\\
&=a(n-1)p^+\left((n-1)^+\right)a(n-1)+q(n-1).
\end{aligned} \tag{15.163}$$

Predikciju stanja, $\hat{x}(n^-)$, i ažurirano stanje $\hat{x}(n^+)$, možemo posmatrati kao zasebne signale. Radi jednostavnije notacije, uobičajeno je predikciju stanja, $\hat{x}(n^-)$, označiti sa $\hat{x}_{n|n-1}$, jer na njenu vrijednost neposredno prije *n*-tog trenutka utiču mjerni podaci do trenutka $n-1$. Slično, ažurirano stanje, $\hat{x}(n^+)$, označavamo sa $\hat{x}_{n|n}$, jer je za računanje njene vrijednosti neposredno nakon *n*-tog trenutka potrebno poznavati i mjerenje u trenutku *n*. Informacija o nezavisnoj promjenljivoj (vremenu) je, koristeći ovakvu notaciju, sadržana u indeksu oznaka, pa ćemo taj princip, radi jednostavnosti, usvojiti i za označavanje svih ostalih veličina. Tako ćemo mjerenje $y(n)$ označiti sa y_n, procesni šum $w(n)$ sa w_n, šum mjerenja $v(n)$ sa v_n, parametre stanja $a(n)$ i $c(n)$ sa a_n i c_n, respektivno, varijansu šuma mjerenja $r(n)$ sa r_n, varijansu procesnog šuma $q(n)$ sa q_n, varijansu greške predikcije stanja $p^-(n)$ sa $p_{n|n-1}$, varijansu greške ažuriranja stanja $p^+(n^+)$ sa $p_{n|n}$ i Kalmanov dobitak $k(n)$ sa k_n.

Koraci algoritma se sada mogu sumirati na sljedeći način. Prvo se uradi inicijalizacija:

1. $\hat{x}_{0|-1} = E[x_0]$, početna vrijednost stanja;
2. $p_{0|-1} = \sigma_{x_0}^2$, početna vrijednost varijanse greške predikcije stanja;
3. $q_0 = E[w_0^2]$, početna vrijednost varijanse procesnog šuma;
4. $k_0 = p_{0|-1}c_0\left(c_0 p_{0|-1}c_0 + r_0\right)^{-1}$, početna vrijednost Kalmanovog dobitka;
5. $\hat{x}_{0|0} = (1-k_0c_0)\hat{x}_{0|-1} + k_0 y_0$, prvo mjerenje i ažuriranje stanja;
6. $p_{0|0} = (1-k_0c_0)p_{0|-1}$, početna vrijednost varijanse greške ažuriranja stanja;

a zatim se ponavljaju koraci 7-13, za $n = 1,2,3,\ldots$

7. $r_n = E[v_n^2]$, varijansa šuma mjerenja;

8. $\hat{x}_{n|n-1} = a_{n-1}\hat{x}_{n-1|n-1}$, predikcija stanja;

9. $p_{n|n-1} = a_{n-1}p_{n-1|n-1}a_{n-1} + q_{n-1}$, varijansa greške predikcije stanja;

10. $k_n = p_{n|n-1}c_n\left(c_n p_{n|n-1}c_n + r_n\right)^{-1}$, Kalmanov dobitak;

11. $\hat{x}_{n|n} = \left(1 - k_n c_n\right)\hat{x}_{n|n-1} + k_n y_n$, novo mjerenje i ažuriranje stanja;

12. $p_{n|n} = \left(1 - k_n c_n\right)p_{n|n-1}$, varijansa greške ažuriranja stanja,

13. $q_n = E\left[w_n^2\right]$, varijansa procesnog šuma.

Primijetimo, posmatrajući jednačinu (15.147) za ažuriranje stanja, da se ažuriranje radi proporcionalno Kalmanovom dobitku i inovaciji, tj. razlici stvarne vrijednosti i predikcije stanja:

$$\hat{x}\left(n^{+}\right) = \hat{x}\left(n^{-}\right) + k\left(n\right)\varepsilon, \tag{15.164}$$

gdje je $\varepsilon = y\left(n\right) - c\left(n\right)\hat{x}\left(n^{-}\right)$. Za male vrijednosti Kalmanovog dobitka, veći značaj se pridaje predikciji stanja na osnovu modela $\hat{x}\left(n^{-}\right)$, nego samom mjerenju u datom trenutku. Međutim, ako je Kalmanov dobitak velik, više se vjeruje izmjerenim vrijednostima. Kalmanov dobitak će biti mali ako je varijansa predikcije stanja mala, što znači da je model adekvatan, i ako je varijansa šuma mjerenja velika. To znači da se, ako je model dobar, a mjerenja zašumljena, prilikom ažuriranja stanja više vjeruje predikciji stanja nego mjerenju. Obrnuto, ako je varijansa šuma mjerenja mala, a model neadekvatan, pa je varijansa predikcije stanja velika, prilikom ažuriranja stanja, veći značaj se pridaje izmjerenim podacima nego procjeni stanja sistema.

Na sličan način, uz veću matematičku složenost izvođenja, dolazi se do algoritma za model sistema čiji je red veći od jedan. Model stanja reda većeg od jedan, sa vremenski promjenljivim parametrima sistema, je dat sa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(n+1\right) &= \mathbf{A}\left(n\right)\mathbf{x}\left(n\right) + \mathbf{w}\left(n\right), \\ \mathbf{y}\left(n\right) &= \mathbf{C}\left(n\right)\mathbf{x}\left(n\right) + \mathbf{v}\left(n\right), \end{aligned} \tag{15.165}$$

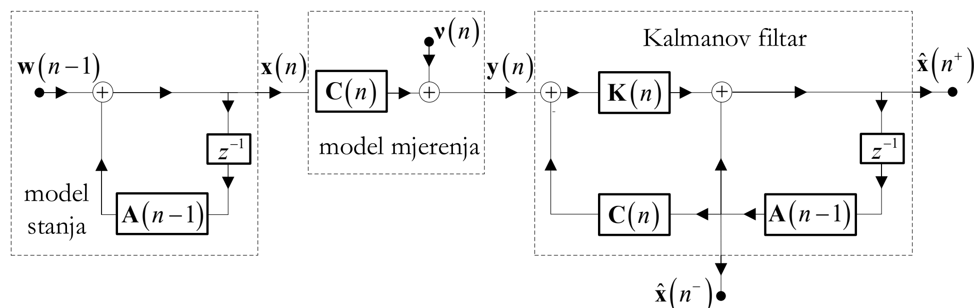
gdje su $\mathbf{A}(n)$ i $\mathbf{C}(n)$ matrice parametara modela, dok je $\mathbf{x}(n)$ vektor stanja, $\mathbf{w}(n)$ vektorski šum procesa, $\mathbf{y}(n)$ vektor mjerenja, a $\mathbf{v}(n)$ vektorski šum mjerenja u trenutku n. Sa $\mathbf{Q}(n)=E\left[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\right]$ i $\mathbf{R}(n)=E\left[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(n)\right]$ su označene kovarijansne matrice procesnog šuma i šuma mjerenja, respektivno.

U nastavku su dati koraci algoritma Kalmanovog filtriranja kada je red modela sistema veći od jedan. Nakon inicijalizacije:

1. $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}=E\left[\mathbf{x}_0\right]$, početna vrijednost vektora stanja;
2. $\mathbf{P}_{0|-1}=E\left[\left(\mathbf{x}_0-\hat{\mathbf{x}}_0\right)\left(\mathbf{x}_0-\hat{\mathbf{x}}_0\right)^{\mathrm{T}}\right]$, početna vrijednost kovarijansne matrice greške predikcije stanja;
3. $\mathbf{Q}_0=E\left[\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0^{\mathrm{T}}\right]$, početna vrijednost kovarijansne matrice procesnog šuma;
4. $\mathbf{K}_0=\mathbf{P}_{0|-1}\mathbf{C}_0^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{C}_0\mathbf{P}_{0|-1}\mathbf{C}_0^{\mathbf{T}}+\mathbf{R}_0\right)^{-1}$, Kalmanov dobitak;
5. $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_0\mathbf{C}_0\right)\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}+\mathbf{K}_0\mathbf{y}_0$, prvo mjerenje i ažuriranje stanja;
6. $\mathbf{P}_{0|0}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_0\mathbf{C}_0\right)\mathbf{P}_{0|-1}$, početna vrijednost kovarijansne matrice greške ažuriranja stanja;

ponavljaju se koraci 7-13, za $n=1,2,3,\ldots$

7. $\mathbf{R}_n=E\left[\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}\right]$, kovarijansna matrica šuma mjerenja;
8. $\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}=\mathbf{A}_{n-1}\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$, vektor predikcije stanja;
9. $\mathbf{P}_{n|n-1}=\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1|n-1}\mathbf{A}_{n-1}^{\mathbf{T}}+\mathbf{Q}_{n-1}$, kovarijansna matrica greške predikcije stanja;
10. $\mathbf{K}_n=\mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{C}_n^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{C}_n\mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{C}_n^{\mathbf{T}}+\mathbf{R}_n\right)^{-1}$, Kalmanov dobitak;
11. $\hat{\mathbf{x}}_{n|n}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C}_n\right)\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}+\mathbf{K}_n\mathbf{y}_n$, novo mjerenje i ažuriranje stanja;
12. $\mathbf{P}_{n|n}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C}_n\right)\mathbf{P}_{n|n-1}$, kovarijansna matrica greške ažuriranja stanja,
13. $\mathbf{Q}_n=E\left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^{\mathrm{T}}\right]$, kovarijansna matrica procesnog šuma.



Slika 15.17 Kalmanov filtar.

Blok šema Kalmanovog filtra, koja uključuje i model sistema i model mjerenja, data je na Slici 15.17. Kalmanov filtar, jednim algoritmom, vrši i filtriranje signala i predikciju stanja sistema. Na svom izlazu generiše dva signala: signal predikcije stanja, $\hat{x}(n^-)$, i signal korigovane procjene, tj. filtrirani signal, $\hat{x}(n^+)$.

Najjednostavniji primjer primjene Kalmanovog filtra je izdvajanje konstantnog signala iz zašumljenih mjerenja. Tada se model stanja formira tako da su konstante a i c jednake jedinici, a šum procesa jednak nuli.

Praćenje kretanja objekta, predviđanje njegovog položaja u narednom trenutku i filtriranje putanje, jedna je od najčešćih primjena Kalmanovog filtra. Pogledajmo sada kako se formira model kretanja objekta u polarnom koordinatnom sistemu. Pretpostavimo da se mjerni uređaj nalazi u ishodištu. Neka je pozicija objekta u polarnom koordinatnom sistemu zapisana sa $\rho e^{j\theta}$, gdje je ρ udaljenost, a θ ugao, i neka je korak odmjeravanja Δt. Radijalnu brzinu ćemo označiti sa ρ', θ' je ugaona brzina, dok su ρ'' i θ'' radijalno i ugaono ubrzanje, respektivno. Na objekat djeluje niz poremećaja, kao što su nepravilan rad motora, sile trenja i udari vjetra, od kojih zavise njegovo radijalno i ugaono ubrzanje. Stoga je opravdano pretpostaviti da su ova ubrzanja slučajni

procesi i posmatrati ih kao bijeli procesni šum. Pod uslovom da je korak odmjeravanja mali, jednačine kretanja objekta su sljedeće:

$$\begin{aligned} \rho(n+1) &= \rho(n) + \Delta t \rho'(n), \\ \rho'(n+1) &= \rho'(n) + \Delta t \rho''(n), \\ \theta(n+1) &= \theta(n) + \Delta t \theta'(n), \\ \theta'(n+1) &= \theta'(n) + \Delta t \theta''(n). \end{aligned} \tag{15.166}$$

Zašumljena mjerenja zapisujemo sa:

$$\begin{aligned} y_\rho(n) &= \rho(n) + \nu_\rho(n), \\ y_\theta(n) &= \theta(n) + \nu_\theta(n), \end{aligned} \tag{15.167}$$

gdje su $\nu_\rho(n)$ i $\nu_\theta(n)$ šum mjerenja udaljenosti i ugla, respektivno. Ako uvedemo oznaku $w_\rho(n) = \Delta t \rho''(n)$ za procesni šum radijalnog ubrzanja i $w_\theta(n) = \Delta t \theta''(n)$ za procesni šum ugaonog ubrzanja, model stanja i model mjerenja poprimaju sljedeće matrične oblike:

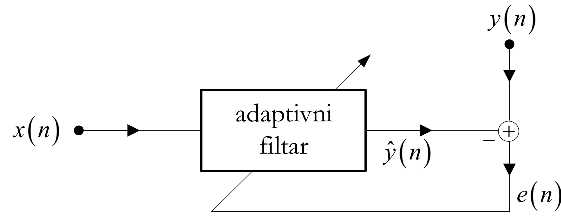
$$\begin{bmatrix} \rho(n+1) \\ \rho'(n+1) \\ \theta(n+1) \\ \theta'(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho(n) \\ \rho'(n) \\ \theta(n) \\ \theta'(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_\rho(n) \\ 0 \\ w_\theta(n) \end{bmatrix}, \tag{15.168}$$

$$\begin{bmatrix} y_\rho(n) \\ y_\theta(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho(n) \\ \rho'(n) \\ \theta(n) \\ \theta'(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_\rho(n) \\ \nu_\theta(n) \end{bmatrix}. \tag{15.169}$$

Kalmanov filtar, uz ovakav model stanja, u svakom trenutku vrši predikciju položaja objekta. Nakon mjerenja u nekom trenutku, na osnovu novodobijene informacije, sadržane u inovaciji, koriguje se procjena položaja objekta u polarnom koordinatnom sistemu i tako dobija filtrirana putanja objekta.

15.4 Adaptivni filtri

Pri projektovanju i Vinerovog i Kalmanovog filtra neophodno je poznavati ili uvesti pretpostavke o statističkim osobinama signala koji se obrađuje. Za Kalmanov filtar nam je potreban i model sistema. Ovi filtri su optimalni u toku svog rada samo ako statističke osobine aktuelnog ulaznog signala odgovaraju onima na osnovu kojih su filtri projektovani. Pri projektovanju adaptivnih filtara se ne vrši eksplicitno mjerenje statističkih osobina signala. Umjesto toga, koriste se iterativni algoritmi za podešavanje koeficijenata filtra, prilagođavajući ih statističkim osobinama ulaznog signala, koje se izračunavaju u samom procesu adaptacije. Podešavanje koeficijenata adaptivnog filtra se vrši u vremenskom intervalu između svaka dva uzastopna odmjerka ulaznog signala, po nekom odabranom kriterijumu optimalnosti, najčešće minimizacijom srednje kvadratne greške između željenog i izlaznog signala. Osnovni princip adaptivnog filtriranja signala prikazan je na Slici 15.18. U adaptivnom filtru se odvijaju dva različita procesa: adaptacija filtarskih koeficijenata i filtriranje signala. U procesu adaptacije neophodno je poznavanje željenog signala, $y(n)$, čije značenje zavisi od aplikacije. U fazi adaptacije filtar uči obrazac po kom će, u fazi filtriranja, obrađivati signale. Zbog ove osobine učenja, može se smatrati da adaptivni filtri predstavljaju preteču modernih neuronskih mreža i vještačke inteligencije. Budući da za projektovanje adaptivnih filtara nije potrebno unaprijed poznavati statističke osobine signala, oni se mogu koristiti i za stacionarne i za nestacionarne signale. Neizbježna greška prilikom procjene statističkih karakteristika ulaznog signala dovodi do toga da filtar nije u potpunosti optimalan. Kod stacionarnih signala, greška se smanjuje sa dužim trajanjem adaptacije. Adaptivni filtri su jednostavniji za realizaciju od Kalmanovog filtra, te se uobičajeno koriste u aplikacijama gdje je potrebno brzo prilagođavanje na promjene statističkih osobina signala.



Slika 15.18 Adaptivno filtriranje signala.

15.4.1 Adaptivni FIR Vinerov filtar

Adaptivni filtri pripadaju klasi vremenski promjenljivih sistema. Radi jednostavnosti realizacije, pretpostavlja se da adaptivni filtar ima strukturu linearnog FIR filtra:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k(n) x(n-k), \tag{15.170}$$

sa promjenljivim koeficijentima:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{h}_0(n) & \hat{h}_1(n) & \cdots & \hat{h}_{N-1}(n) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{15.171}$$

Signal na izlazu adaptivnog filtra se može zapisati u obliku:

$$\hat{y}(n) = \hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n), \tag{15.172}$$

gdje je $\mathbf{X}(n)$ slučajni vektor na ulazu filtra:

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-N+1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{15.173}$$

Kao kriterijum optimalnosti koristi se minimalna srednja kvadratna greška, tj. statistička srednja vrijednost kvadrata trenutne greške:

$$\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right) = E\left\{e^2(n)\right\} = E\left\{\left(y(n) - \hat{y}(n)\right)^2\right\}. \tag{15.174}$$

Za razliku od pristupa koji smo koristili prilikom izvođenja optimalnog Vinerovog FIR filtra, sada pretpostavljamo da se statističke osobine signala i

koeficijenti filtra mijenjaju u toku vremena. U svakom trenutku adaptacije srednja kvadratna greška je u obliku površi drugog reda u N-dimenzionalnom prostoru filtarskih koeficijenata:

$$\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=E\left\{y^2(n)\right\}-2E\left\{\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n)y(n)\right\}+E\left\{\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right\}, \quad (15.175)$$

kao na Slici 15.19, pa ima globalni minimum. Izjednačavajući njen gradijent sa nulom:

$$\begin{aligned}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)&=\left[\frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}_0(n)}\quad\frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}_1(n)}\quad\cdots\quad\frac{\partial E\left[e^2(n)\right]}{\partial\hat{h}_{N-1}(n)}\right]^{\mathrm{T}}=\\&=-2E\left\{\left[\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}_0(n)}\quad\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}_1(n)}\quad\cdots\quad\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{h}_{N-1}(n)}\right]^{\mathrm{T}}\left(y(n)-\hat{y}(n)\right)\right\}=\\&=-2E\left\{\left[x(n)\quad x(n-1)\quad\cdots\quad x(n-N+1)\right]^{\mathrm{T}}\left(y(n)-\hat{y}(n)\right)\right\}=\\&=-2E\left\{\mathbf{X}(n)\left(y(n)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right)\right\}=\mathbf{0},\end{aligned} \quad (15.176)$$

te uvodeći oznake za kroskorelacioni vektor:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}(n)=E\left\{\mathbf{X}(n)y(n)\right\}, \quad (15.177)$$

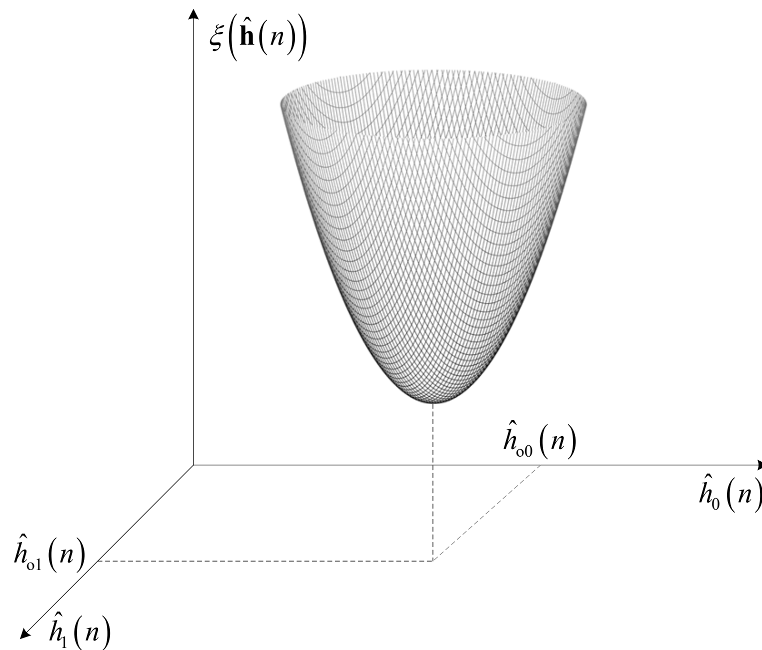
i autokorelacionu matricu slučajnog vektora $\mathbf{X}(n)$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}(n)=E\left\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}(n)^{\mathrm{T}}\right\}, \quad (15.178)$$

koje, kod nestacionarnih signala, ovise o vremenu, dobijamo Vinerovo rješenje za optimalni vektor koeficijenata impulsnog odziva adaptivnog filtra:

$$\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=-2\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}(n)+2\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)=\mathbf{0}, \quad (15.179)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}(n)=\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n)\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}(n). \quad (15.180)$$



Slika 15.19 Srednja kvadratna greška kod adaptivnog filtra drugog reda.

Zadatak adaptacije je pronalaženje takvih vrijednosti elemenata impulsnog odziva pri kojima se postiže minimum srednje kvadratne greške. Za implementaciju u stvarnom vremenu potrebno je izbjeći inverziju matrice, pa se, umjesto (15.180), koriste iterativni algoritmi za pronalaženje minimuma. Kod nestacionarnih signala se pozicija minimuma i oblik površi srednje kvadratne greške mijenjaju tokom vremena, na što treba obratiti pažnju, posebno kada je proces adaptacije spor. Zbog toga se, najčešće, problem prvo rješava uz pretpostavku da se radi o stacionarnim signalima, a specifičnosti nestacionarnih signala se naknadno razmatraju.

15.4.2 Gradijentni metodi adaptacije

Uz pretpostavku da se radi o stacionarnim slučajnim procesima, na osnovu izraza za gradijent srednje kvadratne greške u (15.176), lako dobijamo da je :

$$\frac{1}{2}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\hat{\mathbf{h}}(n)-\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}, \tag{15.181}$$

odakle je:

$$\frac{1}{2}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}. \tag{15.182}$$

Koristeći (15.180) i (15.182) dobijamo:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}=\hat{\mathbf{h}}(n)-\frac{1}{2}\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right). \tag{15.183}$$

Dobijena relacija se modifikuje tako da se postigne iterativno podešavanje koeficijenata impulsnog odziva:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mu\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right). \tag{15.184}$$

Konvergencija iterativnog procesa zavisi od skalarnog parametra učenja μ. Kako je:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}(n+1)&=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mu\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}^{-1}\left(2\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\hat{\mathbf{h}}(n)-2\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}\right)=\\&=(1-2\mu)\hat{\mathbf{h}}(n)+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}},\end{aligned} \tag{15.185}$$

iterativnim postupkom dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}(n)&=(1-2\mu)\hat{\mathbf{h}}(n-1)+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}=\\&=(1-2\mu)\left[(1-2\mu)\hat{\mathbf{h}}(n-2)+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}\right]+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}=\\&=(1-2\mu)^2\hat{\mathbf{h}}(n-2)+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}\left[1+(1-2\mu)\right]=\cdots=\\&=(1-2\mu)^n\hat{\mathbf{h}}(0)+2\mu\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}\sum_{i=0}^{n-1}(1-2\mu)^i=\\&=(1-2\mu)^n\hat{\mathbf{h}}(0)+\left[1-(1-2\mu)^n\right]\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{o}}.\end{aligned} \tag{15.186}$$

Zaključujemo da, kada broj iteracija n raste, impulsni odziv $\hat{\mathbf{h}}(n)$ konvergira ka optimalnom rješenju $\hat{\mathbf{h}}_o$ ako je:

$$|1-2\mu|<1 \Rightarrow 0<\mu<1 . \tag{15.187}$$

Opisani iterativni postupak nije pogodan za praktičnu primjenu iz sljedećih razloga. Kada se mijenjanju statističke osobine signala, u svakom koraku iteracije je potrebno izračunati autokorelacionu matricu slučajnog vektora $\mathbf{X}$, i uraditi njeno invertovanje. Osim toga, u svakom koraku iteracije je potrebno odrediti i gradijent srednje kvadratne greške. Postupak se može značajno pojednostaviti ako se pretpostavi da su elementi autokorelacione matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$ van glavne dijagonale jednaki nuli. Najčešće korišteni gradijentni metodi za adaptaciju filtarskih koeficijenata, zasnovani na ovoj pretpostavci, su metod najbržeg spusta, LMS metod adaptacije i RLS metod rekurzivnih najmanjih kvadrata, te ćemo ih u nastavku detaljno obraditi.

15.4.2.1 Metod najbržeg spusta

Gradijentni *metod najbržeg spusta* se generalno koristi za pronalaženje lokalnih minimuma funkcija više promjenljivih. Poznato je da funkcije više promjenljivih najbrže opadaju u smjeru suprotnom od smjera gradijenta. Budući da srednja kvadratna greška ima kvadratni oblik u *N*-dimenzionalnom prostoru koeficijenata impulsnog odziva, ona ima samo jedan minimum. Stoga se približavanje minimumu srednje kvadratne greške vrši tako da se, u svakom koraku iteracije, vektor koeficijenata impulsnog odziva mijenja za veličinu proporcionalnu negativnoj vrijednosti njenog gradijenta.

Pretpostavimo da je autokorelaciona matrica dijagonalna, i da su sve njene sopstvene vrijednosti λ jednake, tako da je $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}=\lambda \mathrm{I}=\sigma_{\mathbf{X}}^2\mathrm{I}$, gdje je $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ srednja snaga slučajnog procesa. Neka je nova vrijednost parametra μ sada λ puta manja od vrijednosti parametra μ koja je korištena u (15.184) i (15.185). Pod navedenim uslovima relacije (15.184) i (15.185) poprimaju sljedeće oblike:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mu\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right), \tag{15.188}$$

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)-2\mu\left(\mathbf{R_{XX}}\hat{\mathbf{h}}(n)-\mathbf{p_{YX}}\right)=\left(\mathbf{I}-2\mu\mathbf{R_{XX}}\right)\hat{\mathbf{h}}(n)+2\mu\mathbf{p_{YX}}, \tag{15.189}$$

respektivno.

Parametar učenja μ kontroliše stabilnost i brzinu adaptacije. Ako su sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice različite, za konvergenciju je neophodno da, za svaku sopstvenu vrijednost λ matrice $\mathbf{R_{XX}}$, bude zadovoljeno da je:

$$\left|1-2\mu\lambda\right|<1\Rightarrow 0<\mu\lambda<1, \tag{15.190}$$

te je uslov konvergencije dat sa:

$$0<\mu<\frac{1}{\lambda_{\max}}, \tag{15.191}$$

gdje je $\lambda_{\max}$ maksimalna sopstvena vrijednost autokorelacione matrice $\mathbf{R_{XX}}$.

Kod ovog metoda je neophodno poznavanje autokorelacione matrice ulaznog signala i kroskorelacione sekvence ulaznog i željenog signala. Tada je moguće odrediti optimalne koeficijente impulsnog odziva bez invertovanja matrice $\mathbf{R_{XX}}$.

Metod najbržeg spusta se može sažeti u tri koraka:

1. $\hat{\mathbf{h}}(0)=0$,
2. $\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=2\left(\mathbf{R_{XX}}\hat{\mathbf{h}}(n)-\mathbf{p_{YX}}\right)$,
3. $\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mu\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)$.

Koraci 2 i 3 se ponavljaju dok gradijent srednje kvadratne greške ne postane manji od unaprijed zadane vrijednosti, ili dok promjene vrijednosti elemenata impulsnog odziva ne postanu dovoljno male.

15.4.2.2 LMS metod adaptacije

Umjesto gradijenta srednje kvadratne greške, algoritam koji su izumili Bernard Vidrov (Bernard Widrow) i Ted Hof (Ted Hoff) 1960. godine, a koji se naziva *metod najmanjih srednjih kvadrata* (eng. *Least Mean Square* - LMS), vrši adaptaciju koeficijenata impulsnog odziva koristeći gradijent kvadrata trenutne greške:

$$\hat{\nabla}\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial e^2(n)}{\partial \hat{h}_0(n)} & \dfrac{\partial e^2(n)}{\partial \hat{h}_1(n)} & \cdots & \dfrac{\partial e^2(n)}{\partial \hat{h}_{N-1}(n)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=-2e(n)\mathbf{X}(n). \quad (15.192)$$

Ovaj stohastički gradijent predstavlja korektnu procjenu gradijenta srednje kvadratne greške:

$$\begin{aligned}E\left[\hat{\nabla}\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)\right]&=-2E\left[\mathbf{X}(n)e(n)\right]=-2E\left[\mathbf{X}(n)\left(y(n)-\hat{y}(n)\right)\right]=\\&=-2E\left[\mathbf{X}(n)\left(y(n)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right)\right]=\\&=-2E\left[\mathbf{X}(n)y(n)-\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right]=\\&=-2\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}+2\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}\hat{\mathbf{h}}(n)=\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right).\end{aligned} \quad (15.193)$$

Modifikujući metod najbržeg spusta u navedenom smislu, dobijamo da je:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)-\mu\hat{\nabla}\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right), \quad (15.194)$$

odnosno:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)+2\mu e(n)\mathbf{X}(n). \quad (15.195)$$

Primijetimo da ovaj metod ne zahtijeva izračunavanje ni autokorelacione matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{XX}}$, ni kroskorelacione sekvence $\mathbf{p}_{\mathbf{YX}}$, niti inverziju matrica. U svakoj iteraciji je potrebno samo poznavanje najnovijih vrijednosti ulaznog i željenog signala.

LMS algoritam stalno prilagođava koeficijente filtra statističkim osobinama signala. Trenutna greška ne konvergira ka nuli, već osciluje oko neke srednje vrijednosti, koja zavisi od brzine promjene karakteristika signala i od parametra učenja μ. Izraz za trenutnu grešku je dat sa:

$$e(n)=y(n)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n). \quad (15.196)$$

Njegovim uvrštavanjem u (15.195), pa usrednjavanjem, dolazi se do uslova koji parametar učenja μ mora ispunjavati za stabilnu konvergenciju LMS algoritma:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}, \tag{15.197}$$

gdje je λ_{max} maksimalna sopstvena vrijednost autokorelacione matrice $\mathbf{R_{XX}}$. Ako je faktor učenja suviše velik, LMS algoritam neće konvergirati i trenutna greška će oscilirati ili divergirati.

Postupak kod LMS metoda adaptacije se sastoji od sljedećih koraka:

1. $\hat{\mathbf{h}}(0) = 0$,
2. $e(n) = y(n) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k(n) x(n-k)$,
3. $\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + 2\mu e(n) \mathbf{X}(n)$,
4. sadržaj vektora $\mathbf{X}(n)$ se pomjera za jedno mjesto i dopunjava novim elementom $x(n)$.

Koraci 2, 3 i 4 se ponavljaju dok gradijent ne postane dovoljno mali, ili dok promjene vrijednosti elemenata impulsnog odziva ne postanu zanemarljive.

Budući da metod ne koristi stvarnu vrijednost, već procjenu gradijenta, ne garantuje se postizanje optimalnog rješenja. Algoritam konvergira u srednjem, što znači da srednja vrijednost odstupanja elemenata impulsnog odziva od optimalnih vrijednosti teži ka nuli. Ipak, varijansa njihove promjene može biti velika, ako se parametar učenja μ ne odabere pravilno. Stoga je poželjno birati manju vrijednost parametra učenja, ako se želi postići konvergencija koeficijenata filtra prema njihovim optimalnim vrijednostima. Velika vrijednost parametra μ ubrzava adaptaciju, ali ne garantuje konvergenciju. Zbog jednostavnosti implementacije, LMS algoritam je široko prihvaćen u adaptivnoj obradi signala. Algoritam radi dobro i kada statističke osobine ulaznog signala nisu unaprijed poznate i može pratiti vremenske promjene statistike ulaznog signala. Iako se prethodna diskusija odnosila na stacionarne signale, LMS algoritam se može koristiti i za filtriranje nestacionarnih signala.

15.4.2.3 RLS metod adaptacije

Za razliku od LMS algoritma, koji minimizira srednju kvadratnu grešku, *metod rekurzivnih najmanjih kvadrata* (eng. *Recursive least squares - RLS*) rekurzivno pronalazi koeficijente impulsnog odziva adaptivnog filtra minimizacijom težinske sume kvadrata trenutnih grešaka.

Do *n*-tog trenutka adaptacije na izlazu adaptivnog filtra je generisano *n* elemenata izlazne sekvence. Trenutna greška *i*-tog elementa u *n*-tom trenutku je data sa:

$$e(i) = y(i) - \hat{y}(i),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{15.198}$$

pri čemu se elementi izlaznog signala, pa samim tim i elementi signala greške, računaju na osnovu vrijednosti koeficijenata impulsnog odziva u *n*-tom trenutku, $\hat{h}_k(n)$:

$$\hat{y}(i) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k(n) x(i-k),\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{15.199}$$

Dužina signala greške je promjenljiva. Tako RLS u svakom trenutku koristi informacije koje su sadržane u podacima od trenutka inicijalizacije algoritma.

Kao kriterijum optimalnosti za određivanje koeficijenata impulsnog odziva koristi se minimizacija težinske sume kvadrata trenutnih grešaka, data sa:

$$\xi(\hat{\mathbf{h}}(n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} e^2(i), \tag{15.200}$$

gdje je $0 < \lambda \leq 1$ faktor zaboravljanja, koji omogućava RLS algoritmu da zaboravlja stare podatke i više se fokusira na nove podatke. Njegova uloga je da istakne greške bliske trenutku izračunavanja, čime se postiže bolja adaptacija na promjenljive statističke osobine ulaznih signala. To čini RLS pogodnim za obradu nestacionarnih signala.

Minimizacija se radi izjednačavanjem parcijalnih izvoda od $\xi(\hat{\mathbf{h}}(n))$, po svim elementima impulsnog odziva, sa nulom:

$$\frac{\partial\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)}{\partial\hat{h}_k(n)}=2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}e(i)\frac{\partial}{\partial\hat{h}_k(n)}\left(y(i)-\sum_{k=0}^{N-1}\hat{h}_k(n)x(i-k)\right)=$$
$$=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}x(i-k)e(i) \qquad (15.201)$$
$$=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}x(i-k)\left(y(i)-\sum_{k=0}^{N-1}\hat{h}_k(n)x(i-k)\right)=0,$$

za $k=0,1,\ldots,N-1$. U matričnom obliku dobijamo:

$$\nabla\xi\left(\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\left[x(i)\quad x(i-1)\quad\cdots\quad x(i-N+1)\right]^{\mathrm{T}}e(i)=$$
$$=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)e(i)=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)\left(y(i)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{\mathbf{h}}(n)\right)=\mathbf{0}. \qquad (15.202)$$

Uz oznake za težinsku autokorelacionu matricu:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(i), \qquad (15.203)$$

i težinski kroskorelacioni vektor:

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{YX}}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)y(i), \qquad (15.204)$$

dobijamo verziju Vinerovog rješenja za optimalni vektor koeficijenata impulsnog odziva adaptivnog filtra:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n)=\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{YX}}(n). \qquad (15.205)$$

Sa ciljem formiranja rekurzivne jednačine, izdvojimo poslednji član sume u (15.203):

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(i)=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(i)+\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)=$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^{n-1-i}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(i)+\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)= \qquad (15.206)$$
$$=\lambda\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n-1)+\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)$$

i poslednji član sume u (15.204):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{YX}}(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\mathbf{X}(i)y(i) = \lambda\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i}\mathbf{X}(i)y(i) + \mathbf{X}(n)y(n) = \\ &= \lambda\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{YX}}(n-1) + \mathbf{X}(n)y(n).\end{aligned} \tag{15.207}$$

Koristeći (15.206), iz (15.205), uz smjenu $n \to n-1$ dobijamo:

$$\lambda\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{YX}}(n-1) = \left[\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n) - \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\right]\hat{\mathbf{h}}(n-1). \tag{15.208}$$

Konačno, iz (15.205), uz korištenje (15.207) i (15.208), dobijamo rekurzivnu jednačinu za adaptaciju elemenata impulsnog odziva:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}(n) &= \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n)\left[\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) - \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mathbf{X}(n)y(n)\right] = \\ &= \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n)\mathbf{X}(n)\left[y(n) - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1)\right].\end{aligned} \tag{15.209}$$

Inverziju matrice možemo izbjeći koristeći lemu o inverziji pozitivno definitne matrice $\mathbf{A}$, koju je moguće predstaviti preko matrica $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, na sljedeći način:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}. \tag{15.210}$$

Tada je:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{C}\left[\mathbf{D} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}\right]^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}. \tag{15.211}$$

Primjenjujući ovu lemu za inverziju težinske autokorelacione matrice, uz odabir da je: $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}(n)$, $\mathbf{B} = \lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)$, $\mathbf{C} = \mathbf{X}(n)$ i $\mathbf{D} = 1$, dobijamo:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n) = \lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\mathbf{X}(n)}{1 + \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\mathbf{X}(n)}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1). \tag{15.212}$$

Uvodeći oznaku:

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\mathbf{X}(n)}{1 + \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\mathbf{X}(n)}, \tag{15.213}$$

za vektor pojačanja, možemo pisati da je:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n) = \lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1). \tag{15.214}$$

Ako relaciju (15.213) malo preuredimo, i napišemo u obliku:

$$\mathbf{k}(n) = \left[\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\right]\mathbf{X}(n), \tag{15.215}$$

poređenjem sa (15.214), zaključujemo da je:

$$\mathbf{k}(n) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n)\mathbf{X}(n). \tag{15.216}$$

Koristeći ovaj rezultat, rekurzivna jednačina za računanje koeficijenata impulsnog odziva poprima sljedeći oblik:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mathbf{k}(n)\left[y(n) - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1)\right] = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mathbf{k}(n)e^{-}(n), \tag{15.217}$$

gdje je:

$$e^{-}(n) = y(n) - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1), \tag{15.218}$$

apriorna greška procjene željenog signala, računata na osnovu koeficijenata impulsnog odziva određenih u prethodnom koraku. Aposteriorna greška procjene željenog signala, nakon određivanja vrijednosti elemenata impulsnog odziva u n-tom trenutku jednaka je:

$$\begin{aligned} e^{+}(n) &= y(n) - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n) = y(n) - \hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n) = \\ &= y(n) - \left[\hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mathbf{k}(n)e^{-}(n)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(n) = \\ &= y(n) - \hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}(n-1)\mathbf{X}(n) - \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n)e^{-}(n) = \\ &= \left[1 - \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n)\right]e^{-}(n). \end{aligned} \tag{15.219}$$

Faktor konvergencije:

$$\gamma(n) = \frac{e^{+}(n)}{e^{-}(n)} = 1 - \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{X}(n), \tag{15.220}$$

je manji od jedan, te se greška u svakom koraku smanjuje.

Tok RLS algoritma za filtar N-tog reda se može sažeti u sljedećim koracima. U inicijalizaciji algoritma, vrijednosti elemenata impulsnog odziva postavljaju se na nulu, ili neku drugu vrijednost ako postoje apriorne informacije. Za početnu

vrijednost inverzne težinske autokorelacione matrice bira se jedinična matrica, pomnožena konstantom δ, $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(0)=\delta\mathbf{I}$. Konstanta δ je velik pozitivan broj, obično između 10^2 i 10^6. Ona ukazuje na to koliko smo sigurni u početne vrijednosti impulsnog odziva. Veću vrijednost konstante δ biramo ako je povjerenje u početne vrijednosti impulsnog odziva malo, pa se algoritam više oslanja na podatke. Što više vjerujemo početnim vrijednostima impulsnog odziva odabraćemo manju vrijednost konstante δ. Sa smanjenjem vrijednosti konstante δ adaptacija je sporija. Zatim slijede koraci koji se ponavljaju za $n=1,2,\ldots$

1. $\mathbf{X}(n)=\begin{bmatrix}x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-N+1)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, formiranje novog vektora ulaznih podataka nakon što postane raspoloživ podatak za $x(n)$;
2. $e^{-}(n)=y(n)-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1)$, računanje greške apriorne procjene željenog signala, na osnovu koeficijenata impulsnog odziva određenih u prethodnom koraku;
3. $\mathbf{k}(n)=\left[\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)\right]\mathbf{X}(n)$, računanje vektora pojačanja;
4. $\hat{\mathbf{h}}(n)=\hat{\mathbf{h}}(n-1)+\mathbf{k}(n)\hat{y}(n)$, adaptacija vrijednosti elemenata impulsnog odziva;
5. $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(n)\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{XX}}^{-1}(n-1)$, računanje težinske autokorelacione matrice, kao priprema za sljedeći korak.

Slično kao kod Kalmanovog filtra, prvo se radi apriori procjena (predikcija) željenog signala, na osnovu vrijednosti elemenata impulsnog odziva izračunatih u prethodnom trenutku, pa se zatim, kada vrijednost željenog signala u datom trenutku bude dostupna, radi adaptacija (ažuriranje) impulsnog odziva proporcionalno grešci apriorne procjene.

U poređenju sa LMS i drugim algoritmima adaptacije, RLS pokazuje izuzetno brzu konvergenciju, posebno kod signala sa visokim korelacijama. Uz nešto veću računarsku složenost, RLS obezbjeđuje bolju procjenu parametara filtra u poređenju sa LMS algoritmom, ali ovaj metod može biti sklon nestabilnosti zbog grešaka u zaokruživanju prilikom inverzije matrice.

15.4.3 Primjene adaptivnih filtara

U dosadašnjem razmatranju adaptivnih filtara podrazumijevali smo da je željeni signal poznat. Na početku smo naglasili da tu pretpostavku koristimo samo za matematička izvođenja. Kroz nekoliko najčešćih primjena adaptivnih filtara, koje ćemo prikazati u nastavku, razmotrićemo načine odabira željenog i ulaznog signala za konkretnu primjenu.

15.4.3.1 Adaptivna sinteza digitalnih filtara sa zadanom frekvencijskom karakteristikom

Neka je digitalni filtar specificiran vrijednostima frekvencijske karakteristike u N tačaka, na frekvencijama ω_k, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Ako na ulaz adaptivnog filtra dovedemo signal oblika:

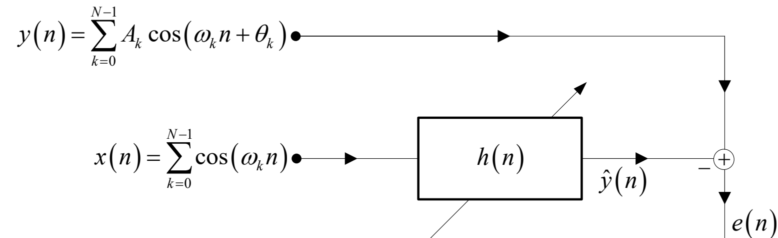
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_k n), \tag{15.221}$$

onda k-ta komponenta ulaznog signala treba da bude pojačana onoliko puta koliko iznosi vrijednost amplitudne karakteristike i fazno zakašnjena za vrijednost fazne karakteristike na k-toj učestanosti. Zbog toga je željeni signal zbir tako modifikovanih frekvencijskih komponenti:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k), \tag{15.222}$$

gdje su A_k i θ_k zadane vrijednosti amplitudne i fazne karakteristike na učestanostima ω_k, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Princip adaptivne sinteze digitalnih filtara sa zadanom frekvencijskom karakteristikom prikazan je na Slici 15.20.

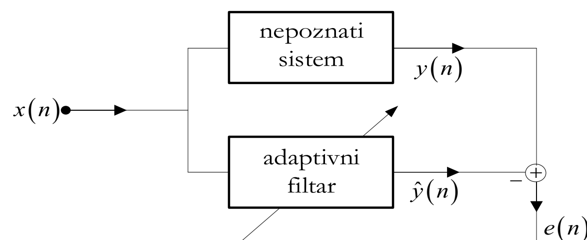
U toku adaptacije podešavaju se koeficijenti impulsnog odziva adaptivnog filtra tako da se na izlazu dobije željeni signal. Kada se postigne minimalna srednja kvadratna greška između signala na izlazu filtra i željenog signala, adaptacija je završena. Na taj način je izvršena sinteza digitalnog filtra, tj. pronađene su optimalne vrijednosti elemenata impulsnog odziva u smislu postizanja zadane frekvencijske karakteristike.



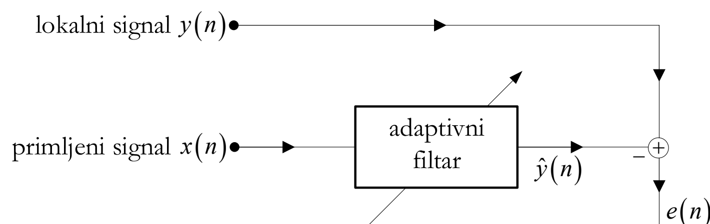
Slika 15.20 Adaptivna sinteza digitalnih filtara.

15.4.3.2 Identifikacija sistema

Zadatak *identifikacije sistema* je pronalaženje funkcije prenosa ili impulsnog odziva nekog nepoznatog sistema. U tu svrhu se može koristiti adaptivni filtar, kao što je prikazano na Slici 15.21. Na ulaz nepoznatog sistema i na ulaz adaptivnog filtra se dovodi isti signal. Kada razlika odziva na izlazu nepoznatog sistema i adaptivnog filtra postane veoma mala, adaptivni sistem se ponaša veoma slično nepoznatom sistemu, pa se može smatrati da je impulsni odziv nepoznatog sistema jednak impulsnom odzivu adaptivnog filtra. Pri ovoj proceduri potrebno je ispuniti dva uslova. Prvi uslov je da ulazni signal sadrži dovoljno informacija da pobudi sve moguće načine rada nepoznatog sistema. Ovo se postiže ako se za pobudu izabere bijeli šum. Drugi uslov je da je red adaptivnog filtra dovoljno veliki, kako bi se mogao prilagoditi svim stepenima slobode nepoznatog sistema.



Slika 15.21 Identifikacija sistema.



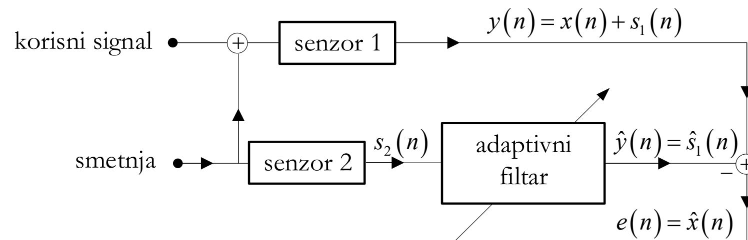
Slika 15.22 Adaptivna ekvalizacija kanala.

15.4.3.3 Adaptivna ekvalizacija kanala

Tokom prenosa signala kroz kanal, signal neminovno biva degradiran i narušen šumom. *Ekvalizacija kanala* je proces kojim se poboljšava kvalitet signala na prijemnoj strani, u smislu razumljivosti i tačnosti prenesenih informacija. Vinerov dekonvolucioni filtar se može koristiti za ekvalizaciju kanala u uslovima kada se njegove osobine u toku vremena neznatno mijenjaju, što je rijedak slučaj u praksi. U suprotnom, može se koristiti adaptivna ekvalizacija kanala, čiji princip rada je prikazan na Slici 15.22. Za adaptivnu ekvalizaciju kanala neophodno je imati na raspolaganju lokalno, na prijemnoj strani, snimljen i sačuvan signal koji se, u procesu adaptacije, koristi kao željeni signal. Isti signal se šalje kroz prenosni kanal. Degradirani primljeni signal se dovodi na ulaz adaptivnog filtra, koji podešava svoj impulsni odziv, kako bi na izlazu generisao signal koji predstavlja, što je moguće bolju, procjenu korisnog signala. Zatim proces ulazi u fazu filtriranja signala, pa se zatim smjenjuju faze adaptacije filtarskih koeficijenata i filtriranja signala, ovisno o brzini promjene karakteristika kanala.

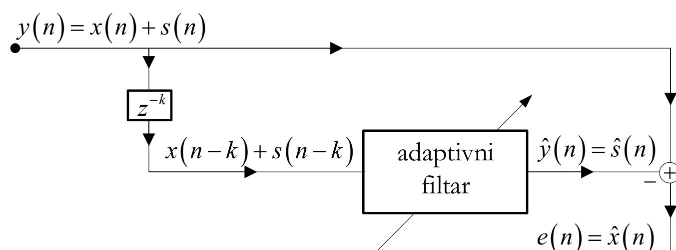
15.4.3.4 Adaptivno uklanjanje smetnji

Primjena adaptivnih filtara za otklanjanje smetnji korištenjem dva izvora signala, podrazumijeva da imamo mogućnosti da, paralelno sa snimanjem degradiranog korisnog signala, snimimo i sam signal smetnje. To je moguće sa dva senzora, od kojih jedan snima korisni signal narušen nekom smetnjom, dok se drugi postavlja tako da ne prima korisni signal, već samo signal smetnje.



Slika 15.23 Adaptivno uklanjanje smetnji korištenjem dva izvora signala.

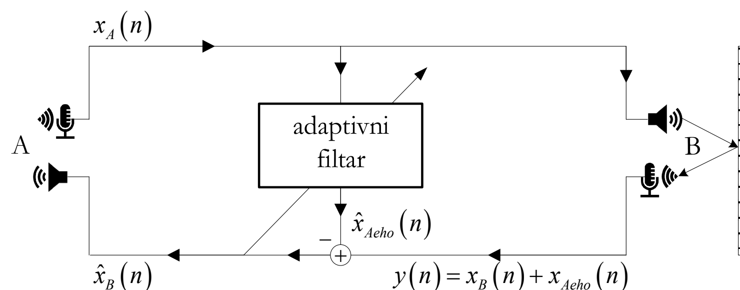
Takav slučaj imamo, na primjer, u pilotskoj kabini, gdje buka motora jako narušava govorni signal, ili prilikom ultrazvučnog snimanja otkucaja srca bebe, kada veliku smetnju predstavljaju otkucaji srca trudnice. U ovim primjeima, buku motora, kao i otkucaje srca trudnice, moguće je snimiti bez prisustva govornog signala pilota, odnosno otkucaja srca bebe, respektivno. Signali iz dva izvora ne mogu jednostavno da se oduzmu, jer bi, zbog fazne razlike, tj. različitog vremena prostiranja signala od izvora do senzora, smetnja bila još više pojačana. Zbog toga se rješenje pronalazi u primjeni adaptivnih filtara. Odaberimo da željeni signal, $y(n)$, bude jednak degradiranom korisnom signalu koji se dobija sa prvog senzora. Taj signal je sastavljenom od korisnog signala, $x(n)$, i signala smetnje, $s_1(n)$. Adaptivni filtar pobudimo signalom smetnje $s_2(n)$, koji dolazi sa drugog senzora, kao na Slici 15.23. Adaptivni filtar prilagođava svoj impulsni odziv tako da smanji vrijednost razlike između izlaznog i željenog signala. Ako korisni signal i signal smetnje nisu korelisani, izlaz adaptivnog filtra, $\hat{y}(n)$, će se prilagoditi samo dijelu željenog signala sa kojim postoji korelacija, a to je signal smetnje $s_1(n)$. Stoga, nakon adaptacije, signal greške postaje približno jednak korisnom signalu, $e(n)=y(n)-\hat{y}(n)\approx x(n)=\hat{x}(n)$. Primijetimo da signal greške zapravo konvergira korisnom signalu, umjesto ka nuli.



Slika 15.24 Adaptivno uklanjanje smetnji korištenjem jednog izvora signala.

U slučaju kad nismo u mogućnosti da posebno snimimo signal smetnje, vać na raspolaganju imamo samo signal narušen smetnjom, taj signal nam služi kao željeni signal, dok na ulaz adaptivnog filtra dovodimo isti signal zakašnjen za *k* jedinica diskretnog vremena. Adaptivni filtar će poništiti svaki dio ulaznog signala koji je korelisan sa željenim signalom. Pretpostavimo da je korisni signal širokopojasni, dok je smetnja u vidu interferencije sa uskopojasnim signalom. Trajanje autokorelacije uskopojasnog signala smetnje je duže od trajanja autokorelacije korisnog širokopojasnog signala. Ako se na ulaz adaptivnog filtra dovede signal sa smetnjom, zakašnjen dovoljno dugo da se izgubi autokorelacija sa korisnim signalom, ali tako da još uvijek postoji značajna autokorelacija sa signalom smetnje, adaptivni filtar će generisati procjenu signala smetnje, a signal greške će predstavljati procjenu korisnog dijela signala, kao na Slici 15.24. U slučaju da je smetnja širokopojasna, a korisni signal uskopojasni, na izlazu adaptivnog filtra će biti procjena korisnog signala, jer, uz dovoljno veliko kašnjenje, adaptivni filtar neće biti u stanju da pronađe kroskorelaciju ulaznog signala sa smetnjom u željenom signalu.

Adaptivni filtri se mogu koristiti i za uklanjanje eha. Pretpostavimo da dvije osobe, A i B, razgovaraju putem telekomunikacione mreže. Kao rezultat neprilagođenosti impedansi i drugih uticaja, kada govorni signal, $x_A(n)$, osobe A stigne do osobe B, dio tog signala se reflektuje i kao eho, $x_{Aeho}(n)$,

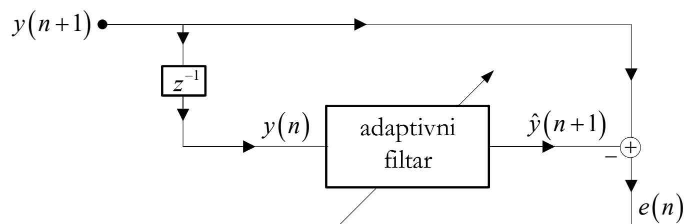


Slika 15.25 Adaptivno uklanjanje eha.

superponiran govoru, $x_B(n)$, osobe B, vraća se osobi A. Za uklanjanje eha se koristi adaptivni filtar, koji se postavlja u blizinu prijemnika signala osobe B, kao na Slici 15.25. Na njegov ulaz se dovodi govorni signal osobe A, a željeni signal je signal sa mikrofona osobe B, koji u sebi sadrži i neželjeni eho. Taj eho je korelisan sa govornim signalom osobe A, dok je kroskorelacija korisnih govornih signala, $x_A(n)$ i $x_B(n)$, mala. Stoga će adaptivni filtar generisati procjenu eha, $\hat{x}_{Aeho}(n)$, koja se oduzima od signala sa mikrofona osobe B, te se ka osobi A prenosi procjena, $\hat{x}_B(n)$, korisnog govornog signala osobe B.

15.4.3.5 Adaptivna predikcija signala

Adaptivni linearni prediktor je specijalni slučaj adaptivnog otklanjanja smetnji korištenjem jednog izvora signala, sa kašnjenjem jednakim jedinici. Za podešavanje koeficijenata filtra u nekom trenuku potrebno je imati znanje o dotadašnjim vrijednostima elemenata signala, ali i o vrijednosti signala u sljedećem trenutku diskretnog vremena, što se koristi kao željeni signal, kao na Slici 15.26. To znači da se adaptacija filtarskih koeficijenata vrši sa zakašnjenjem od jedne jedinice diskretnog vremena. Predikcija $\hat{y}(n+1)$ se generiše na osnovu vrijednosti koeficijenata filtra podešenih u trenutku n, kada je željeni signal bio $y(n)$. Kada postane poznata stvarna vrijednost signala $y(n+1)$, ponovo se vrši



Slika 15.26 Adaptivna predikcija signala.

adaptacija filtra, a zatim predikcija, i tako redom. Ukoliko je priroda signala takva da se njegova vrijednost u svakom trenutku može iskazati kao linearna kombinacija vrijednosti prethodnih elemenata signala, greška predikcije će biti jednaka nuli. Najčešće to nije tako, pa je u signalu predikcije sadržana i neka slučajna greška. Ona predstavlja nekorelisani dio signala, kome adaptivni filtar nije u stanju da se prilagodi. Što je izraženija korelacija signala, to će predikcija biti uspješnija.

Glava 16

SISTEMI ZA DIGITALNU OBRADU SIGNALA

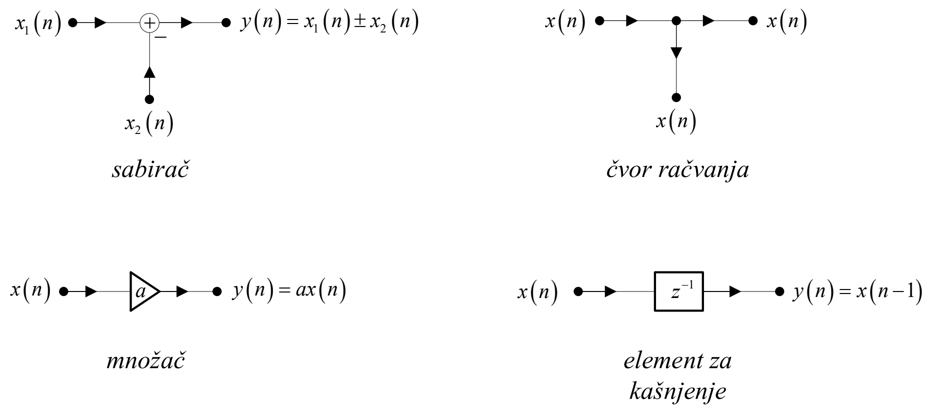
U prethodnim poglavljima smo razmotrili najvažnije metode digitalne obrade signala, a sada ćemo se pozabaviti sistemima za njihovu realizaciju i implementaciju. Pod realizacijom digitalne obrade signala podrazumijevamo kreiranje strukturne šeme diskretnog sistema, generalno predstavljene blok dijagramom, ili drugog tipa algoritma za obradu signala. Implementacija se odnosi na proces izgradnje fizičkog sistema koji obrađuje signale po zadanom algoritmu. Prilikom realizacije i implementacije digitalne obrade signala neophodno je voditi računa o računskoj složenosti, memorijskim zahtjevima i efektima konačne preciznosti zapisa brojeva i proračuna na kvalitet realizacije. U ovom poglavlju ćemo prvo razmotriti strukture za realizaciju diskretnih sistema. Zatim ćemo dati pregled najčešće korištenih sistema za implementaciju digitalne obrade signala. Posebnu pažnju ćemo posvetiti problemima vezanim za obradu signala sa konačnom preciznošću.

16.1 Blok dijagram

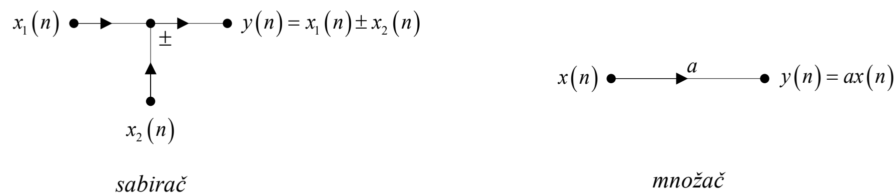
Realizacija LTI diskretnih sistema na osnovu poznatih relacija obrade signala iskazanih u vremenskom domenu, ili na osnovu poznate funkcije prenosa, se odnosi na projektovanje struktura koje se prikazuju blok dijagramima, uz upotrebu elementarnih gradivnih blokova: sabirača, čvorova za račvanje, množača i elemenata za kašnjenje, prikazanih na Slici 16.1. Ukoliko se radi oduzimanje signala, u sabiraču se uz granu umanjioca dodaje znak minus. Znakovi plus ili minus se mogu i izostaviti, u kom slučaju se podrazumijeva znak plus. Pojednostavljen način prikaza sabirača i množača dat je na Slici 16.2.

Blok dijagram se najjednostavnije kreira direktno iz jednačine diferencija ili funkcije prenosa LTI diskretnog sistema. Tada govorimo o *direktnoj realizaciji* LTI diskretnih sistema. Na osnovu blok dijagrama postaje mnogo jasnije kako napisati program ili hardverski implementirati sistem za realizaciju algoritma za digitalnu obradu signala. Osim toga, blok dijagram omogućava eksplicitnu analizu odnosa ulaznih i izlaznih signala, te daje uvid u stanje unutrašnjih promjenljivih. Posebnim metodama transformacije blok dijagrama, o kojima će kasnije biti više riječi, jednostavno se kreiraju ekvivalentni blok dijagrami koji vode različitim softverskim i hardverskim rješenjima.

Direktne forme realizacije su izuzetno osjetljive na promjene koeficijenata sistema usljed njihove kvantizacije, uzrokovane aritmetikom sa konačnom dužinom riječi, te nisu preporučljive u praktičnim aplikacijama. S ciljem prevazilaženja ovog problema, koriste se postupci za generisanje ekvivalentnih struktura, tj. struktura koje imaju istu funkciju prenosa, ali manju osjetljivost na promjene koeficijenata. Kada bismo proračune u digitalnim sistemima izvršavali sa beskonačnom preciznošću, sve ekvivalentne strukture bi se ponašale identično. Međutim, prilikom implementacije se, zbog konačne dužine riječi, svaka specifična realizacija ponaša drugačije od svoje ekvivalentne realizacije. Stoga je važno izabrati strukturu na koju kvantizacija ima najmanji uticaj.



Slika 16.1 Elementarni gradivni blokovi LTI diskretnih sistema.



Slika 16.2 Pojednostavljen prikaz elementarnih gradivnih blokova LTI diskretnih sistema.

Jedan od najčešće korištenih postupaka za dobijanje ekvivalentne strukture je transponovanje izvorne strukture, pri čemu se vrši zamjena uloga ulaznog i izlaznog signala, obrće tok signala, te čvorovi grananja postaju sabirači, dok sabirači postaju čvorovi grananja. Na taj način se dobijaju tzv. *transponovane forme*, sa istom funkcijom prenosa kao kod originalnih struktura.

16.2 Metodi realizacije IIR sistema

Funkcija prenosa IIR sistema je data sa:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}=\frac{B(z)}{A(z)}. \tag{16.1}$$

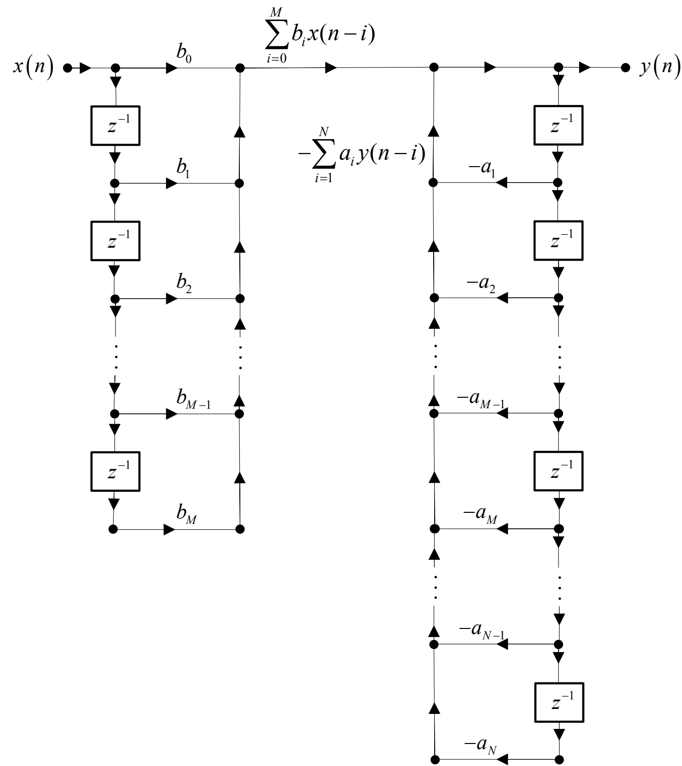
Dva su osnovna načina za realizaciju IIR sistema: *direktni*, kad se funkcija prenosa realizuje u cjelini i *indirektni*, kad se vrši dekompozicija funkcije prenosa u tzv. sekcije prvog i drugog reda, koje se zatim povezuju kako bi kompletna struktura realizovala zadanu funkciju prenosa.

16.2.1 Direktni metod realizacije IIR sistema

Prvi oblik direktne realizacije, nazvan *I direktna forma*, proističe iz rekurzivne jednačine diferencija date sa:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)+\sum_{i=1}^{N}(-a_i)y(n-i). \tag{16.2}$$

Koristeći digitalne množače i sabirače, u I direktnoj formi se prvo izračunava težinska suma elemenata ulazne sekvence, a zatim se dobijenom rezultatu dodaje zasebno određena težinska suma elemenata izlazne sekvence, na način prikazan na Slici 16.3. Za realizaciju IIR sistema I direktnom formom potrebno je $N+M+1$ množača, $N+M$ sabirača sa dva ulaza i $N+M$ elemenata za kašnjenje. Elementi za kašnjenje se realizuju čuvanjem podataka u memorijskim lokacijama, što znači da je za ovaj način realizacije potrebno $N+M+1$ memorijskih lokacija, gdje smo uračunali i memorijsku lokaciju za $x(n)$. Dodatno je potrebno obezbijediti $N+M+1$ memorijskih lokacije za filtarske koeficijente. Umjesto sabirača sa dva ulaza, koji su korišteni u realizaciji prikazanoj na Slici 16.3, mogu se koristiti sabirači sa više ulaza, tako da dobijemo I direktnu formu sa sabiračima sa više ulaza, prikazanu na Slici 16.4.

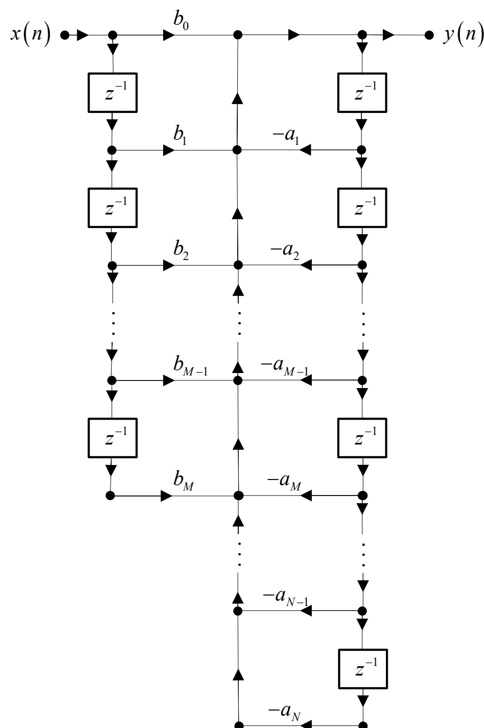


Slika 16.3 I direktna forma realizacije.

Broj množača u I direktnoj formi se ne može smanjiti, ali se broj elemenata za kašnjenje može smanjiti dekompozicijom $H(z)$ na dvije funkcije prenosa kaskadno vezanih sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z). \tag{16.3}$$

Funkcija prenosa prvog sistema, $1/A(z)$, ima samo polove, a druga funkcija prenosa, $B(z)$, odgovara FIR sistemu, tj. ima samo nule. Uvedimo pomoćnu promjenljivu $W(z)$, koja je izlaz iz prvog, a ulaz u drugi od ova dva kaskadno vezana sistema. Tada je:



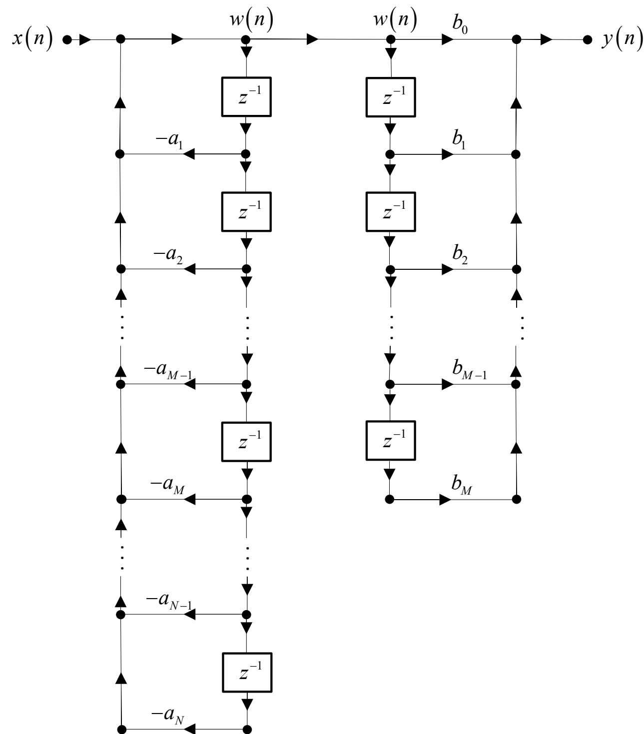
Slika 16.4 I direktna forma realizacije sa sabiračima sa tri ulaza.

$$\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{A(z)}, \tag{16.4}$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = B(z). \tag{16.5}$$

Iz (16.4) se inverznom *z*-transformacijom dobija jednačina diferencija koja uspostavlja vezu pomoćne promjenljive $w(n)$ sa ulaznom sekvencom $x(n)$:

$$w(n) = x(n) + \sum_{i=1}^{N} (-a_i) w(n-i). \tag{16.6}$$

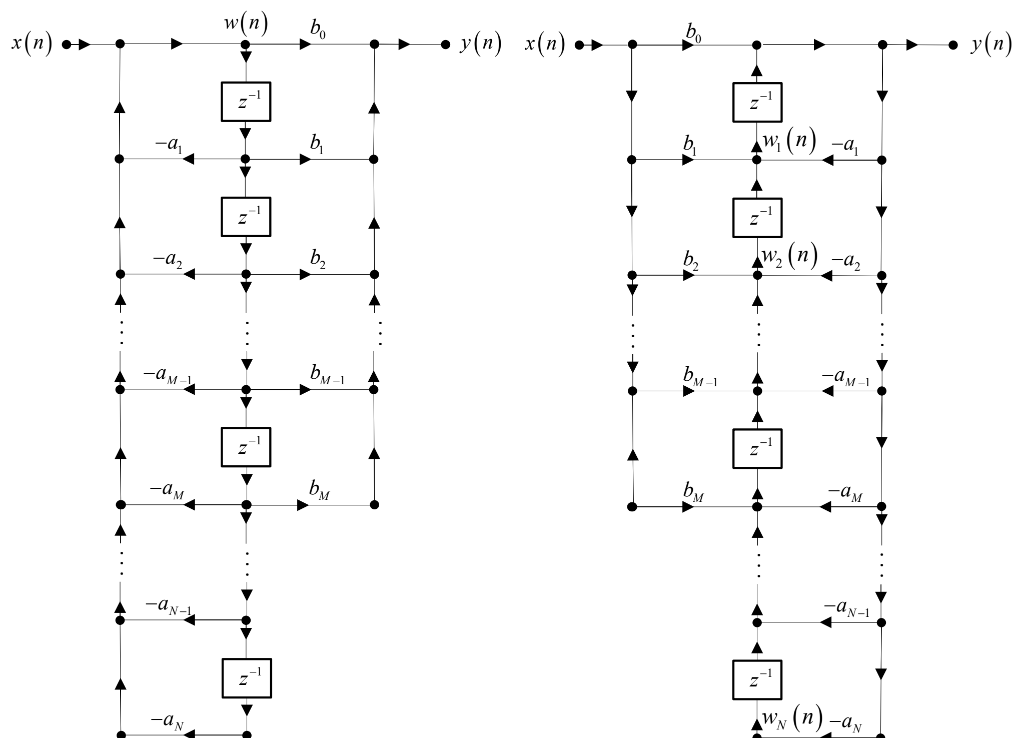


Slika 16.5 Kaskadna veza IIR sistema bez nula transmisije i FIR sistema.

Na isti način se iz (16.5) dobija jednačina diferencija koja povezuje izlazni signal $y(n)$ i pomoćnu promjenljivu $w(n)$:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i w(n-i)\,. \qquad (16.7)$$

Prvo se, I direktnom formom, realizuje IIR sistem bez nula transmisije, opisan jednačinom diferencija (16.6), na način kako je prikazano na lijevom dijelu Slike 16.5. Zatim se, takođe I direktnom formom, realizuje i kaskadno veže FIR sistem, opisan jednačinom diferencija (16.7), kao što je prikazano na desnom dijelu iste slike. Sa Slike 16.5 je jasno da nema potrebe da se pomoćni signal



Slika 16.6 II direktna forma.

Slika 16.7 Transponovana II direktna forma.

$w(n)$ dva puta propušta kroz elemente za kašnjenje, te se realizacija svodi na šemu prikazanu na Slici 16.6, koja se naziva *II direktna forma*. Primijetimo da II direktna forma zahtijeva samo $\max(N,M)$ elemenata za kašnjenje, što je najmanji mogući broj elemenata za kašnjenje potreban za realizaciju IIR sistema N-tog reda. Broj množača iznosi $N+M+1$, a broj sabirača $N+M$, što je jednako kao kod I direktne forme.

Slika 16.7 prikazuje transponovanu formu, koja je dobijena iz blok dijagrama sa Slike 16.6 zamjenom uloga ulaznog i izlaznog signala, obrtanjem toka signala, te zamjenom sabirača čvorovima grananja i obrnuto. Bez gubitka opštosti

možemo pretpostaviti da je $M = N$, usvajajući nulte vrijednosti za koeficijente b_k, $k = M+1, M+2, \ldots, N$, kada je $M < N$, ili za a_k, $k = N+1, N+2, \ldots, M$, kada je $N < M$, pa za transponovanu formu datu na Slici 16.7 pisati sljedeći skup jednačina:

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n), \tag{16.8}$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) - a_k y(n) + b_k x(n),\ k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{16.9}$$

$$w_N(n) = b_N x(n) - a_N y(n). \tag{16.10}$$

Sukcesivnim uvrštavanjem (16.9), a u posljednjem koraku (16.10), u (16.8), lako se pokaže da je skup jednačina dat sa (16.8)-(16.10) ekvivalentan jednačini diferencija (16.2), tako da su i strukture na slikama 16.6 i 16.7 ekvivalentne.

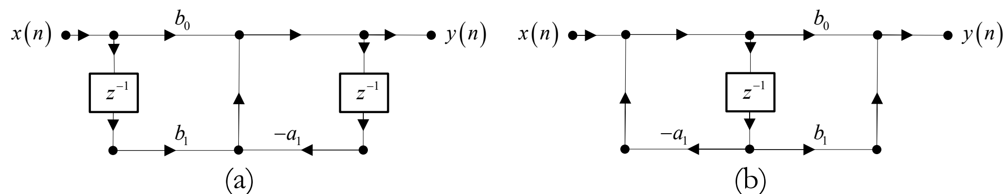
16.2.2 Indirektni metodi realizacije IIR sistema

Kaskadna i paralelna realizacija LTI diskretnih sistema spadaju u klasu indirektnih metoda realizacije. Pri indirektnoj realizaciji, prvo se direktnim formama realizuju pojedinačne sekcije prvog i drugog reda, a zatim se, njihovim kaskadnim ili paralelnim vezivanjem, postiže realizacija kompletnog sistema. Funkcije prenosa sekcija prvog i drugog reda su date sa:

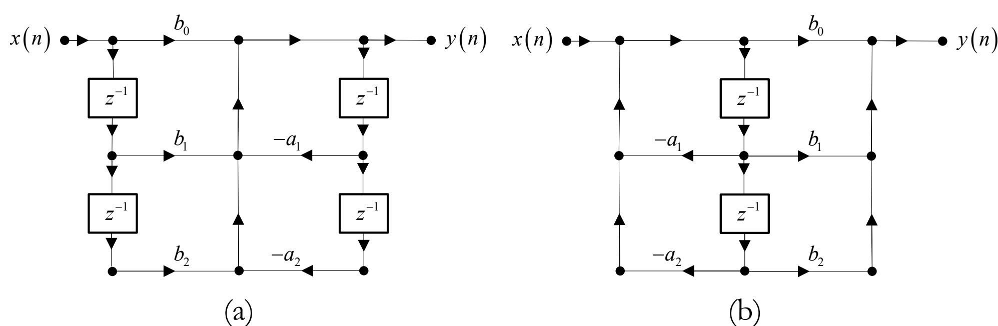
$$H^{(1)}(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \tag{16.11}$$

$$H^{(2)}(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \tag{16.12}$$

a njihove direktne forme realizacija su prikazane na slikama 16.8 i 16.9, respektivno.



Slika 16.8 Indirektni metodi realizacije IIR sekcije prvog reda: (a) I direktna forma i (b) II direktna forma.



Slika 16.9 Indirektni metodi realizacije IIR sekcije drugog reda: (a) I direktna forma i (b) II direktna forma.

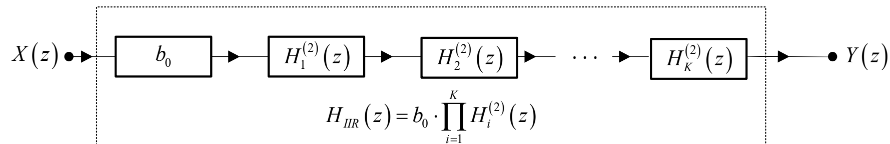
16.2.2.1 Kaskadna realizacija IIR sistema

Posmatrajmo opšti oblik funkcije prenosa IIR diskretnog sistema:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}. \tag{16.13}$$

Funkciju prenosa (16.13) možemo napisati u obliku proizvoda:

$$H(z)=b_0\cdot\prod_{i=1}^{K} H_i^{(2)}(z), \tag{16.14}$$



Slika 16.10 Kaskadna realizacija IIR sistema.

gdje su $H_i^{(2)}(z)$, $i = 1,2,...,K$ funkcije prenosa drugog reda, pri čemu je K najveći cijeli broj sadržan u $(N+1)/2$. To nas vodi ka *kaskadnoj realizaciji* prikazanoj na Slici 16.10. Ako je N neparno, jedna od sekcija će biti prvog reda. Prilikom formiranja sekcija moguće je na više različitih načina izvršiti grupisanje nula i polova. Neophodno je samo voditi računa da sve sekcije prvog i drugog reda budu stabilne. Izvlačenjem faktora b_0 ispred cijelog proizvoda, postiže se da sve sekcije imaju koeficijent uz z^0 polinoma u brojniku jednak jedinici, čime se spriječava povećanje broja množača pri kaskadnoj realizaciji. Kaskadnom realizacijom se postiže bolja numerička stabilnost u odnosu na direktnu realizaciju. Redoslijed sekcija u kaskadnoj vezi se smije mijenjati, te možemo dobiti više različitih kaskadnih realizacija istog sistema. Ipak, numeričke greške su manje ako se u kaskadnoj vezi sekcije postavljaju tako da se ide od onih sa najvećim vrijednostima koeficijentima prema sekcijama sa manjim vrijednostima koeficijenata.

16.2.2.2 Paralelna realizacija IIR sistema

Druga mogućnost je da funkciju prenosa IIR sistema (16.13) razvijemo na parcijalne razlomke.

Ako je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku, $M < N$, razvojem na parcijalne razlomke dobijamo:

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N} H_i(z)=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{A_i}{1-p_i z^{-1}}+\sum_{\substack{i=N_1+1\\ korak\ 2}}^{N-1}\frac{B_i-C_i z^{-1}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)\left(1-p_i^* z^{-1}\right)}, \qquad (16.15)$$

gdje su p_i polovi, a A_i, B_i, C_i realni koeficijenti u razvoju na parcijalne razlomke. Funkcije prenosa $H_i(z)=\dfrac{A_i}{1-p_i z^{-1}}$, $i=1,2,\ldots N_1$, su funkcije prenosa prvog reda, sa realnim polovima. Druga suma u (16.15) sadrži funkcije prenosa drugog reda $H_i(z)=\dfrac{B_i-C_i z^{-1}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)\left(1-p_i^* z^{-1}\right)}=\dfrac{B_i-C_i z^{-1}}{1-2\operatorname{Re}(p_i)z^{-1}+|p_i|^2 z^{-2}}$, $i=N_1+1,\ldots,N-1$, sa kompleksnim polovima. Grupisanjem konjugovano kompleksnih polova u jednu sekciju drugog reda izbjegava se kompleksno množenje. Prema tome, bilo koju funkciju prenosa možemo realizovati *paralelnim vezivanjem* sekcija prvog reda i sekcija drugog reda, kao na Slici 16.11.

Za $M \geq N$, funkciju prenosa $H(z)$ možemo predstaviti zbirom funkcije prenosa FIR sistema, $H_{FIR}(z)$, koja se dobije polinomskim dijeljenjem, i funkcije prenosa IIR sistema, $H_{IIR}(z)$, kod koga je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku. Kompletan sistem se realizuje paralelnom vezom tih sistema:

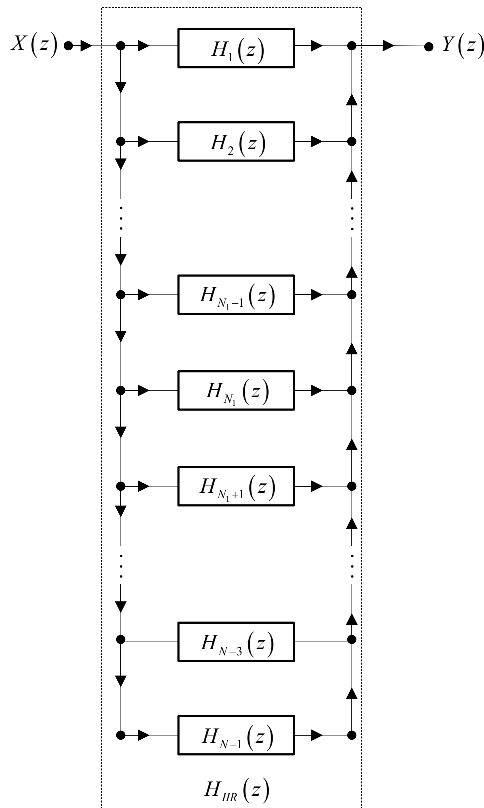
$$H(z)=H_{FIR}(z)+H_{IIR}(z), \qquad (16.16)$$

gdje su:

$$H_{FIR}(z)=c_0+c_1 z^{-1}+\ldots+c_{M-N} z^{-(M-N)}, \qquad (16.17)$$

$$H_{IIR}(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}. \qquad (16.18)$$

Sistem sa funkcijom prenosa $H_{IIR}(z)$ se realizuje na već opisani način paralelne realizacije IIR sistema kod kojih je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku, a metode realizacije FIR sistema ćemo opisati u nastavku izlaganja.



Slika 16.11 Paralelna realizacija IIR sistema.

16.3 Metodi realizacije FIR sistema

Slično kao kod IIR sistema, za realizaciju FIR sistema koristimo direktni i indirektni metod. Vidjećemo da je, u posebnom slučaju, pri direktnoj realizaciji FIR sistema sa linearnom faznom karakteristikom, zbog simetričnosti impulsnog odziva, broj množača duplo manji od reda filtra. Razmotrićemo i specifičan tip realizacije sistema projektovanih metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike, putem kaskadne vezu FIR sistema sa paralelnom vezom više IIR sistema prvog reda.

16.3.1 Direktni metod realizacije FIR sistema

Realizacija diskretnih FIR sistema, čija funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}\ , \tag{16.19}$$

se svodi se na realizaciju linearne konvolucije:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)\ , \tag{16.20}$$

kao težinske sume trenutnog i $N-1$ prethodnih elemenata ulazne sekvence. Ovakav način realizacije FIR sistema se naziva *direktna realizacija*. Struktura sistema koja se dobije na ovaj način je prikazana na Slici 16.12

Transponovanjem direktne forme sa Slike 16.12 dobija se ekvivalentna forma prikazana na Slici 16.13. U procesu transponovanja blok dijagrama, svim granama je promijenjen smjer, ulazni i izlazni priključak su zamijenili uloge, na mjestima sabirača su postavljeni čvorovi grananja, a čvorovi grananja su zamijenjeni sabiračima. Jednostavnom analizom strukture sa Slike 16.13 dobije se jednačina diferencija (16.20), što znači da su strukture na slikama 16.12 i 16.13 ekvivalentne.

16.3.2 Indirektni metod realizacije FIR sistema

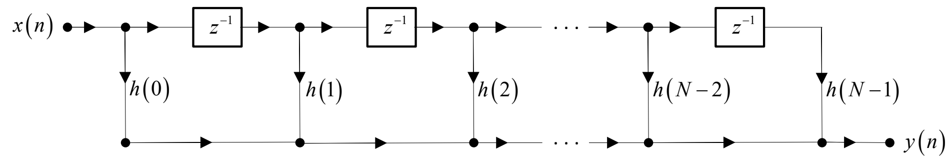
Ako funkciju prenosa FIR sistema datu sa (16.19) izrazimo kao proizvod polinoma drugog reda:

$$H(z)=h(0)\prod_{i=1}^{K}H_i(z), \tag{16.21}$$

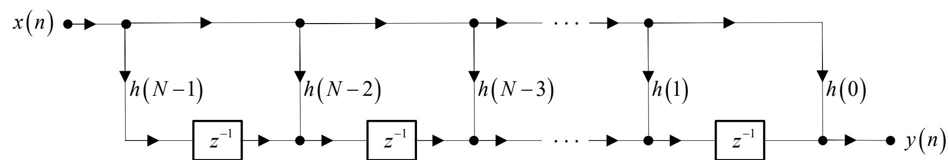
gdje je:

$$H_i(z)=1+h_i(1)z^{-1}+h_i(2)z^{-2},\ i=1,2,...,K\ , \tag{16.22}$$

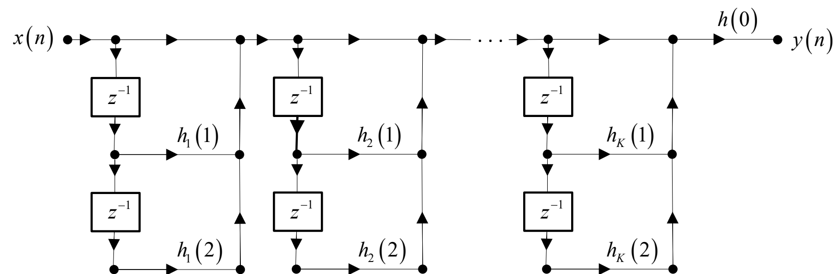
funkcija prenosa *i*-te sekcije drugog reda, a K najveći cijeli broj sadržan u



Slika 16.12 Direktna forma realizacije FIR sistema.



Slika 16.13 Transponovana direktna forma realizacije FIR sistema.



Slika 16.14 Kaskadna forma realizacije FIR sistema.

$(N+1)/2$, kompletan FIR sistem možemo indirektno realizovati *u kaskadnoj formi*, kao na Slici 16.14. Svaka sekcija drugog reda se realizuje zasebno, a onda se sekcije drugog reda vezuju kaskadno kako bi formirale kompletan sistem. U slučaju da je N neparno, jedna od sekcija je prvog reda. Primijetimo da smo prije faktorizacije izvukli član $h(0)$, te na taj način smanjili broj množača sa tri na dva u svakoj sekciji drugog reda. Dakle, direktna i kaskadna realizacija zahtijevaju podjednak broj množenja, ali je kaskadna realizacija modularna i pogodnija za hardversku implementaciju. Ako se FIR sistem realizuje softverski, prednost ima direktna realizacija.

16.3.3 Realizacija FIR sistema sa linearnom faznom karakteristikom

Sistemi sa linearnom faznom karakteristikom su od posebnog značaja u praktičnim primjenama kod kojih je potrebno izbjeći fazna izobličenja prilikom obrade signala. Pokazali smo da je impulsni odziv FIR sistema sa linearnom faznom karakteristikom simetričan ili antisimetričan. Ovisno o tome, te da li je broj elemenata impulsnog odziva, *N*, paran ili neparan, govorimo o četiri tipa FIR sistema sa linearnom faznom karakteristikom. Njihove oblike ćemo, radi lakšeg razmatranja, ponoviti i ovdje:

TIP I: $h(n)=h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,(N-1)/2,\ za\,N\,neparno$, (16.23)

TIP II: $h(n)=h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,N/2,\ za\,N\,parno$, (16.24)

TIP III: $h(n)=-h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,(N-1)/2,\ za\,N\,neparno$, (16.25)

TIP IV: $h(n)=-h(N-1-n),\ n=0,1,\ldots,N/2,\ za\,N\,parno$. (16.26)

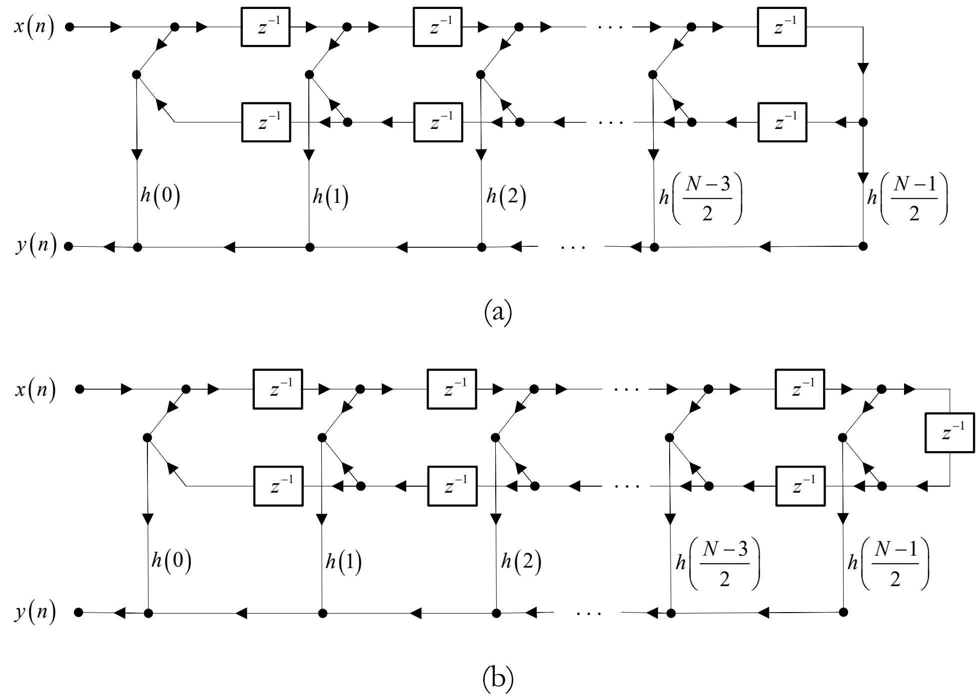
Zahvaljujući navedenoj osobini simetrije, prilikom direktne realizacije diskretnih sistema sa linearnom faznom karakteristikom moguće je dvostruko smanjiti broj množača. To se postiže grupisanjem po dva člana konvolucione sume koji se množe istim koeficijentima, tj. elementima impulsnog odziva koji zbog simetrije imaju iste vrijednosti. Konvoluciona suma (16.20) za filtre tipa I, II, III i IV poprima sljedeće oblike, respektivno:

$$y(n)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)x\left(n-\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}h(k)\left[x(n-k)+x(n-N+1+k)\right], \tag{16.27}$$

$$y(n)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(k)\left[x(n-k)+x(n-N+1+k)\right], \tag{16.28}$$

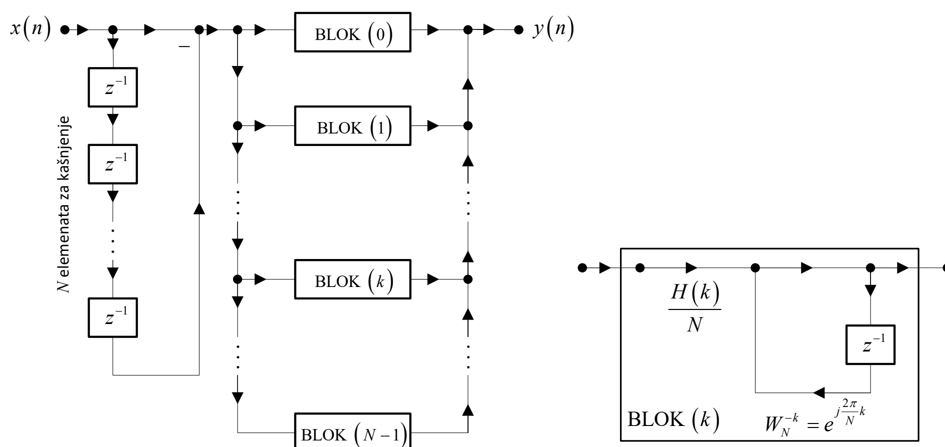
$$y(n)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)x\left(n-\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}h(k)\left[x(n-k)-x(n-N+1+k)\right], \tag{16.29}$$

$$y(n)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(k)\left[x(n-k)+x(n-N+1+k)\right]. \tag{16.30}$$



Slika 16.15 Blok dijagrami FIR sistema sa linearnom faznom karakteristikom: (a) tip I i (b) tip II.

Broj množača se smanjuje tako što se prvo uradi sabiranje (ili oduzimanje) elemenata ulazne sekvence, a zatim množenje, kao što je dato relacijama ulaz-izlaz (16.27)-(16.30) za sisteme tipa I-IV, respektivno. Blok dijagrami FIR sistema tipa I i II su prikazani na Slici 16.15. Blok dijagrami FIR sistema tipa III i IV imaju istu strukturu kao blok dijagrami sistema tipa I i II, respektivno, samo su sabirači zamijenjeni oduzimačima.



Slika 16.16 Blok šema sistema projektovanog metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike.

16.3.4 Realizacija sistema projektovanih metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike

Funkcija prenosa diskretnog FIR sistema koja se dobije projektovanjem metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike ima sljedeći oblik:

$$H(z)=(1-z^{-N})\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)/N}{1-W_N^{-k}z^{-1}}, \qquad (16.31)$$

gdje su $H(k)$, $k=1,2,...,N-1$ odmjerci frekvencijske karakteristike, odnosno DFT impulsnog odziva. Ako diskretni FIR sistem projektujemo metodom odmjeravanja frekvencijske karakteristike, njegovu funkciju prenosa (16.31) možemo realizovati kaskadnom vezom dva sistema, prvi sa funkcijom prenosa $(1-z^{-N})$, a drugi sa funkcijom prenosa $\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)/N}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$. Blok šema realizacije diskretnog sistema projektovanog metodom odmjeravanja u frekvenciji prikazana je na Slici 16.16. Prvi sistem se sastoji od N elemenata za kašnjenje.

Drugi sistem realizujemo paralelnom vezom jednostavnih sistema sa povratnom vezom u kojoj se koriste kompleksni množači.

16.3.5 Realizacija FIR sistema korištenjem DFT

Ukoliko su pobudni signal $x(n)$ i impulsni odziv $h(n)$ sekvence konačnog trajanja, DFT je pogodan alat za određivanje odziva, tj. za računanje njihove linearne konvolucije. Pri tome je neophodno ispuniti uslov da DFT računamo u broju tačaka $N \geq K + L - 1$, gdje je K trajanje impulsnog odziva, a L trajanje ulaznog signala. Tada se računanje linearne konvolucije svodi na množenje u domenu DFT. Polazne sekvence $x(n)$ i $h(n)$ se dopune nulama do dužine *N*, pa se uradi njihova DFT. Zatim se član po član pomnože elementi DFT-a datih sekvenci, $X(k)$ i $H(k)$, te odredi inverzna DFT od $X(k) \cdot H(k)$. Dobijena sekvenca u vremenskom domenu je cirkularna konvolucija sekvenci $x(n)$ i $h(n)$, koja je jednaka njihovoj linearnoj konvoluciji, ako smo te signale dopunili nulama i njihove DFT-e računali u broju tačaka koji je veći ili jednak od trajanja njihove linearne konvolucije. Dakle, pod navedenim uslovima, obradu diskretnih signala u frekvencijskom domenu ostvarujemo kroz sljedeći niz koraka:

$$y(n) = \mathrm{IDFT_N}\left\{\mathrm{DFT_N}\left\{h(n)\right\} \cdot \mathrm{DFT_N}\left\{x(n)\right\}\right\}. \qquad (16.32)$$

Operacija množenja u (16.32) predstavlja množenje član po član elemenata DFT-a u *N* tačaka. Ukoliko se za računanje DFT koriste FFT algoritmi, N treba odabrati da bude stepen broja 2. Ušteda u broju operacija koja se postiže prelaskom u frekvencijski domen je značajnija ako se radi sa sekvencama dužeg trajanja. Prelazak u frekvencijski domen ima smisla za sekvence koje kao rezultat konvolucije imaju više od 64 elementa. Međutim, rad sa sekvencama koje su veoma duge predstavlja problem sa stanovišta upotrebe memorijskih resursa. Za konvoluciju dugih sekvenci, posebno kada je trajanje impulsnog odziva znatno kraće nego trajanje ulaznog signala, što je čest slučaj u praksi, razvijene su posebne metode konvolucije označene kao blok konvolucija, o kojima ćemo detaljnije govoriti u nastavku izlaganja. U broj operacija za računanje konvolucije

prelaskom u frekvencijski domen treba uračunati broj operacija potrebnih da se izvrše dvije direktne i jedna inverzna transformacija, te N član po član kompleksnih množenja u frekvencijskom domenu. Za računanje inverzne DFT se takođe mogu primijeniti FFT algoritmi (razlika je samo u multiplikativnim konstantama u odnosu na direktnu transformaciju), tako da je potreban broj operacija za računanje konvolucije u frekvencijskom domenu $3\cdot\left(N/2\log_2 N\right)+N$ kompleksnih množenja i $3\cdot\left(N\log_2 N\right)$ kompleksnih sabiranja. Budući da za svako kompleksno množenje trebamo četiri realna množenja, broj realnih množenja iznosi $3\cdot\left(2N\log_2 N\right)+4N$, dok je broj realnih sabiranja $3\cdot\left(3N\log_2 N\right)+2N$. S druge strane, pri direktnom računanju linearne konvolucije impulsnog odziva dužine K i ulazne sekvence dužine L potrebno je $K\cdot L$ realnih množenja i $\left(K-1\right)\cdot\left(L-1\right)$ realnih sabiranja. Na primjer, ako impulsni odziv i ulazni signal imaju po 1024 elementa, pri određivanju odziva DFT računamo u 2048 tačaka. Broj realnih množenja pri direktnom računanju konvolucije iznosi 1.048.576, dok je potreban broj realnih sabiranja 1.046.529. Pri računanju konvolucije primjenom DFT potrebno je 143.360 realnih množenja i 206.848 realnih sabiranja, što iznosi manje od 14% množenja i manje od 20% sabiranja, u odnosu na direktni metod. Vrlo često se obrada signala ponavlja na više pobudnih sekvenci sa istim impulsnim odzivom, pa se računanje DFT impulsnog odziva radi samo jednom, te se taj broj operacija zanemaruje i tako još više povećava razlika u broju operacija pri obradi u vremenskom i pri računanju odziva korištenjem DFT.

16.3.6 Blok konvolucija dugih sekvenci

U praktičnim primjenama se vrlo često koriste FIR sistemi sa kratkim trajanjem impulsnog odziva za digitalnu obradu dugih ulaznih sekvenci. Primjena FFT metoda za računanje konvolucije u ovakvim slučajevima nije opravdana, jer bi impulsni odziv trebalo dopuniti velikim brojem nula prije određivanja njegove DFT. Zbog toga se preporučuje podjela ulazne sekvence na segmente, određivanje parcijalnih konvolucija tako dobijenih signala sa zadanim impulsnim

odzivom, a zatim kombinovanje parcijalnih konvolucija sa ciljem dobijanja konvolucije kompletnog signala i zadanog impulsnog odziva. Ovaj metod određivanja konvolucije poznat je pod nazivom *blok konvolucija*. Prema načinu podjele ulazne sekvence, što uslovljava i način kombinovanja parcijalnih konvolucija, razlikujemo dva metoda: blok konvoluciju kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju i blok konvoluciju kada se segmenti ulazne sekvence preklapaju.

16.3.6.1 Blok konvolucija bez preklapanja segmenata ulazne sekvence

Podijelimo dugu ulaznu sekvencu $x(n)$ na S nepreklapajućih segmente od po L elemenata, kao na Slici 16.17, tako da dobijemo isječke ulaznog signala:

$$x_i(n) = \begin{cases} x(iL+n), \ 0 \le n \le L-1, \ i = 0,1,\ldots,S-1, \\ 0, \ inače. \end{cases} \tag{16.33}$$

Ukoliko je ulazna sekvenca $x(n)$ kraća od $S \cdot L$ dopunimo je nultim vrijednostima do navedene dužine. Vrijedi da je:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{S-1} x_i(n-iL), \ n = 0,1,\ldots,S \cdot L - 1. \tag{16.34}$$

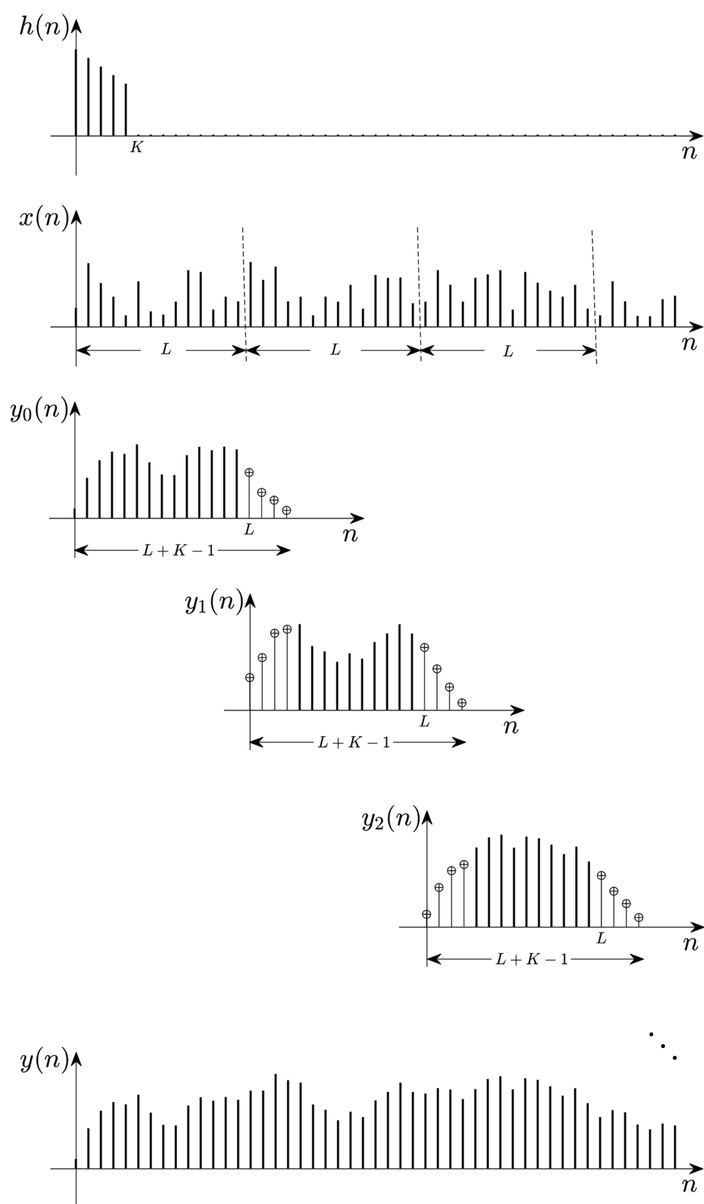
Konvolucija ulazne sekvence $x(n)$ i impulsnog odziva $h(n)$ se može dobiti kao suma parcijalnih konvolucija $y_i(n)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{K-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{K-1} h(k) \sum_{i=0}^{S-1} x_i(n-iL-k) = \\ &= \sum_{i=0}^{S-1} \left[\sum_{k=0}^{K-1} h(k) x_i(n-iL-k) \right] = \sum_{i=0}^{S-1} y_i(n-iL) \ , \end{aligned} \tag{16.35}$$

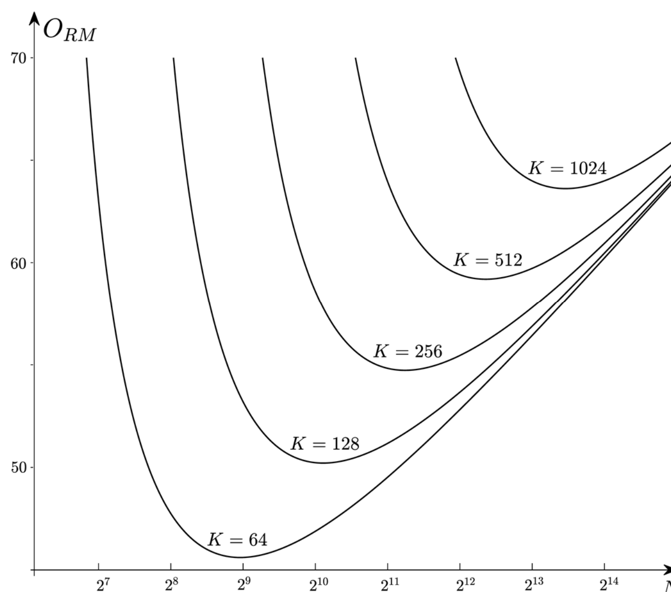
gdje je:

$$y_i(n) = \sum_{k=0}^{K-1} h(k) x_i(n-k), \ i = 0,1,\ldots,S-1 \ , \tag{16.36}$$

kao što je prikazano na Slici 16.17. Stoga se ovaj metod blok konvolucije naziva *preklopi i saberi* (eng. *overlap-and-add*).



Slika 16.17 Blok konvolucija bez preklapanja segmenata ulazne sekvence.



Slika 16.18 Broj realnih množenja po jednom elementu izlazne sekvence u funkciji broja tačaka *N* u kojima se računa DFT i dužine impulsnog odziva *K*.

Za računanje parcijalnih konvolucija mogu se koristiti FFT algoritmi. Diskretna Furijeova transformacija impulsnog odziva se računa samo jednom i taj broj operacija se može zanemariti. Broj realnih množenja potrebnih da se izračuna parcijalna konvolucija uključuje broj množenja potrebnih da se izračuna DFT jednog isječka ulaznog signala, broj množenja u frekvencijskom domenu i broj množenja potreban za računanje IDFT. Po jednom odmjerku izlazne sekvence potreban je sljedeći broj realnih množenja:

$$O_{RM} \approx \frac{4N\log_2 N + 4N}{L} \approx \frac{4N\left(\log_2 N + 1\right)}{N - K + 1}. \tag{16.37}$$

Na osnovu (16.37) vidimo da je za poznatu dužinu K impulsnog odziva moguće odrediti broj tačaka N u kojima se računa DFT, kako bi broj potrebnih operacija bio minimalan. Slika 16.18 prikazuje parametarske krive zavisnosti potrebnog broja realnih množenja za računanje jednog elementa izlazne

sekvence u funkciji broja tačaka u kojima se računa DFT. Jasno se vidi da se za svaku vrijednost trajanja impulsnog odziva, *K*, može odabrati broj tačaka DFT tako da broj potrebnih množenja bude minimalan. Broj tačaka DFT se bira da bude stepen broja 2 radi primjene FFT algoritama.

16.3.6.2 Blok konvolucija sa preklapanjem segmenata ulazne sekvence

Podijelimo sada ulaznu sekvencu $x(n)$ na preklapajuće segmente od po *L* elemenata, kao na Slici 16.19, tako da se nenulte vrijednosti dva susjedna isječka signala $x_i(n)$ preklapaju na segmentu dužine $K-1$, gdje je *K* trajanje impulsnog odziva:

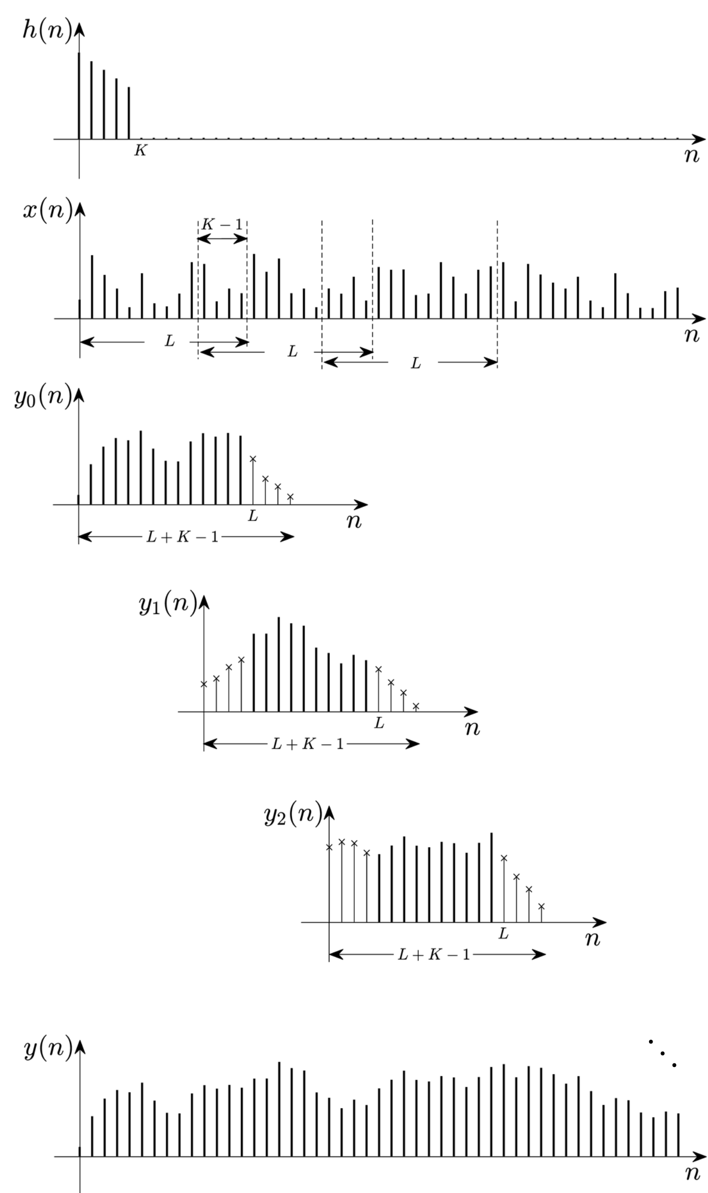
$$x_0(n) = \begin{cases} x(n), \ 0 \le n \le L-1, \\ 0, \ inače, \end{cases} \tag{16.38}$$

$$x_i(n) = \begin{cases} x\left[n + i(L-K+1)\right], \ 0 \le n \le L-1, \quad i = 1,2,\dots,S-1, \\ 0, \ inače. \end{cases} \tag{16.39}$$

Dužine parcijalnih konvolucija iznose $K+L-1$. U svakoj parcijalnoj konvoluciji:

$$x_i(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{K-1} h(k) x_i(n-k), \ i = 0,1,\dots,S-1, \tag{16.40}$$

prvih $K-1$ elemenata predstavljaju prelazni proces. Te vrijednosti nisu, osim za $i=0$, jednake konvoluciji kompletnog signala i impulsnog odziva, jer se, prilikom njihovih računanja, umjesto stvarnih vrijednosti signala $x(n)$ van opsega širine L, koriste elementi nultih vrijednosti kojima se dopunjavaju segmenti signala. Vrijednosti prelaznih procesa se odbacuju, a rezultat konvolucije u tim dijelovima je jednak konvoluciji impulsnog odziva sa signalom iz prethodnog segmenta. Zbog toga se zapravo i vrši preklapanje segmenata na širini od $K-1$ elemenata. Takođe se, kao nepotrebne, odbacuju vrijednosti parcijalnih konvolucija za $n = L, L+1, \dots, L+K-1$, jer u tim dijelovima rezultat konvolucije dobijamo na osnovu parcijalnih konvolucija sa narednim segmentima, kao što je prikazano na Slici 16.19. Elementi parcijalnih konvolucija



Slika 16.19 Blok konvolucija sa preklapanjem segmenata ulazne sekvence.

koji se odbacuju su označeni sa x. Dakle, pri računanju kompletne konvolucije sabiraju se pomjerene parcijalne konvolucije $y_i(n)$ za $n = K, K+1, \ldots, L-1$:

$$y(n) = y_0(n) + \sum_{i=1}^{S-1} y_i\left[n - i(L-K+1)\right], \tag{16.41}$$

gdje je:

$$y_0(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{K-1} h(k) x_0(n-k), & n = 0,1,\ldots,L-1, \\ 0, & inače, \end{cases} \tag{16.42}$$

$$y_i(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{K-1} h(k) x_i(n-k), & n = K, K+1,\ldots,L-1, \quad i = 1,2,\ldots,S-1, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{16.43}$$

Zbog toga ovaj metod nosi i naziv *selektuj i sačuvaj* (eng. *select-and-save*) ili *preklopi i sačuvaj* (eng. *overlap-and-save*). Što se tiče optimalnog izbora dužine segmenata, vrijedi ista analiza provedena za blok konvoluciju kod koje nema preklapanja segmenata pri podjeli ulaznog signala.

16.4 Hardverska implementacija algoritama za digitalnu obradu signala

Hardverska implementacija algoritama za dogotalnu obradu signala se zasniva na korištenju integrisanih kola za sabiranje, množenje i kašnjenje signala. Svaki od ovih gradivnih blokova se može realizovati na mnogo načina, te je prilikom projektovanja potrebno obratiti pažnju kako se implementira svaki pojedinačni element i kako se gradivni blokovi spajaju u kompletan sistem. Poželjno je ostvariti paralelizam operacija i protočnost strukture, ali i uzeti u obzir da to vodi ka povećanju hardverske složenosti sistema. Zbog dugog vremena potrebnog za projektovanje i razvoj hardvera, hardverska implementacija sistema se koristi uglavnom u slučajevima kada je potrebno ostvariti veliku brzinu obrade signala.

16.5 Programabilni sistemi za digitalnu obradu signala

Ako se radi o aplikacijama koje nisu suviše zahtjevne u pogledu brzine izvršavanja, algoritme digitalne obrade signala je moguće implementirati koristeći procesore opšte namjene (eng. *General Purpose Processors* - GPP). Za složenije algoritme se koriste višeprocesorske i višejezgrene arhitekture. Uređaji sa ugrađenim namjenskim sistemima za digitalnu obradu signala uglavnom koriste specifične programabilne strukture, kao što su namjenska integrisana kola (eng. *Application Specific Integrated Circuit* - ASIC), programabilni logički sklopovi (eng. *Field- Programmable Gate Array* - FPGA) i digitalni procesori signala (eng. *Digital Signal Processor* – DSP). Svaka programabilna struktura ima svoje prednosti i nedostatke sa stanovišta performansi, fleksibilnosti, potrošnje energije i vremena razvoja. U tom smislu, u Tabeli 16.1 je dato poređenje osnovnih tipova programabilnih struktura.

Tabela 16.1 Poređenje programabilnih struktura za digitalnu obradu signala.

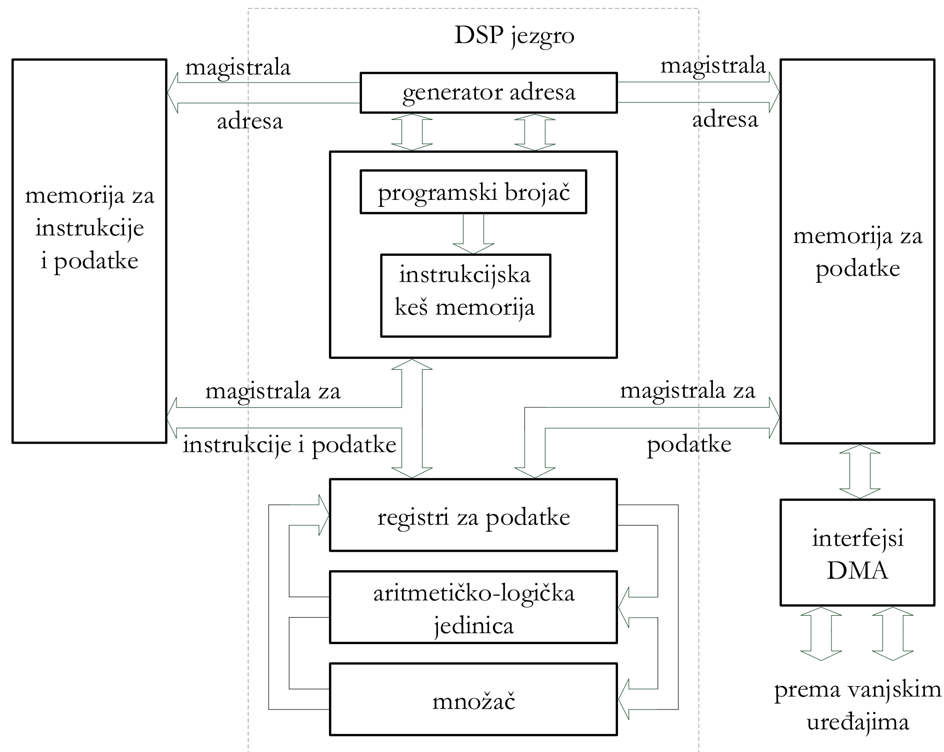
	ASIC	**FPGA**	**GPP**	**DSP**
Performanse	veoma visoke	visoke	srednje	srednje visoke
Fleksibilnost	veoma niska	visoka	visoka	visoka
Potrošnja energije	veoma niska	niska	srednja	srednje niska
Vrijeme razvoja	dugo	srednje	kratko	kratko

16.6 Digitalni procesori signala

Budući da su najzastupljenija programabilna komponenta u sistemima koji su namjenski projektovani za digitalnu obradu signala, posebno poglavlje ćemo posvetiti digitalnim procesorima signala. Osnovne karakteristike digitalnih procesora signala su:

- reprogramabilnost;
- mogućnost obrade signala u realnom vremenu;
- velika propusna moć, tj. mogućnost da obrađuju velike količine podataka, kao što su slike, audio i video signali u realnom vremenu;
- deterministički tip operacija, tako da je vrijeme izvršavanja programa moguće tačno predvidjeti, te na taj način garantovati ponovljivost i željene performanse.

Digitalni procesori signala su se na tržištu pojavili ranih osamdesetih godina dvadesetog vijeka, da bi kroz nekoliko decenija postali ključni element za mnoge namjenske proizvode u komunikacionim sistemima, multimediji, vojnoj i industriji saobraćaja, instrumentaciji i mnogim drugim oblastima. U početku su DSP-ovi bili zasnovani na harvardskoj arhitekturi. Prvo su se pojavili DSP-ovi sa aritmetikom sa fiksnim zarezom, dok se DSP-ovi sa aritmetikom sa pokretnim zarezom pojavljuju tek kasnih osamdesetih godina dvadesetog vijeka. Imali su ugrađen direktan pristup memoriji, a instrukcijski set je imao fiksnu dužinu riječi. Savremeni digitalni procesori signala imaju sve bolje performanse u pogledu brzog pristupa keš memoriji, direktnog pristupa memoriji, šire sistemske magistrale, i instrukcijske riječi velike dužine, te izvršavaju više operacija po jednom ciklusu takta. Postoje modeli sa višestrukim množačima i aritmetičko-logičkim jedinicama, mogućnošću paralelnog izvršavanja iste instrukcije nad višestrukim skupovima operanada, a proizvode se i višejezgreni digitalni procesori signala. Neke familije kombinuju osobine signal procesora i procesora opšte namjene, tako da se na njima mogu izvršavati jednostavniji operativni sistemi, koji rade u realnom vremenu, dok su druge prilagođene specifičnim primjenama, npr. optimizovane za rad sa audio signalima, ili slikama i videom. Većina digitalnih procesora signala i dalje koristi aritmetiku sa fiksnim zarezom, jer su brži, hardverski manje kompleksni i jeftiniji, a u mnogim aplikacijama nema potrebe za velikim dinamičkim opsegom. Ipak, u nekim aplikacijama je korištenje digitalnih procesora signala sa aritmetikom sa pokretnim zarezom neophodno. Osim toga, rad sa aritmetikom sa pokretnim zarezom ubrzava razvoj softvera i smanjuje složenost i cijenu razvoja proizvoda. Digitalni procesori signala namijenjeni za rad sa multimedijalnim signalima često imaju ugrađenu i aritmetiku sa fiksnim i aritmetiku sa pokretnim zarezom, kao i



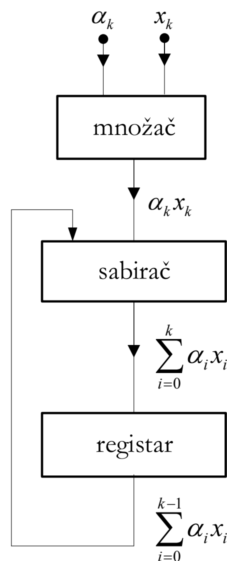
Slika 16.20 Osnovna arhitektura digitalnog procesora signala.

specifične instrukcije za rad sa kompleksnim brojevima. Digitalni procesori signala sa veoma velikim brojem operacija u aritmetici sa pokretnim zarezom po sekundi, reda stotina TFLOPS (eng. *Tera FLoating Point Operations Per Second* – FLOPS), mogu pružiti podršku i aplikacijama koje uključuju vještačku inteligenciju.

Arhitektura DSP-a, prikazana na Slici 16.20, oblikovana je prema zahtjevima digitalne obrade signala u realnom vremenu. U jezgru DSP-a nalazi se aritmetičko-logička jedinica, namijenjena za izvršavanje matematičkih operacija, sa jednim ili više hardverskih množača, te registrima u normalnoj i proširenoj preciznosti. U jezgru DSP-a se nalaze i generatori adresa za programsku memoriju i memoriju sa podacima, te keš memorija koja obezbjeđuje brzi pristup

instrukcijama. Preko programske magistrale i magistrale podataka pristupa se internim memorijama DSP-a. Za efikasnu obradu signala veoma je važno obezbijediti da brzina razmjene podataka između jezgra DSP-a i interne memorije bude što veća. Tradicionalni procesori opšte namjene zasnovani su na fon Nojmanovoj (John von Neumann) arhitekturi. Instrukcije i podaci su smješteni u zajednički memorijski blok. Imaju jedinstvenu magistralu koja povezuje centralnu procesorsku jedinicu i memoriju, kojom se prenose i instrukcije i podaci. U jednom instrukcijskom ciklusu moguć je samo jedan pristup memoriji, što predstavlja osnovni nedostatak ove arhitekture, jer nije istovremeno moguće dobaviti i instrukcuju i podatke nad kojima se ona izvršava. Zbog toga se, u digitalnim procesorima signala, koristi harvardska ili super-harvardska arhitektura, koja ima dva odvojena memorijska bloka, od kojih se jedan koristi za podatke, a drugi i za instrukcije i za podatke. Memorijski blokovi imaju razdvojene magistrale, što omogućava istovremeno očitavanje instrukcija i razmjenu podataka. Super-harvardska arhitektura ima dodatnu keš memoriju za instrukcije u samoj jezgri DSP-a. To omogućava da se blok instrukcija unese u keš memoriju, a zatim se obje magistrale mogu koristiti istovremeno za razmjenu podataka. Novije arhitekture imaju i dodatne keš memorije za podatke. Memorija koja je namijenjena isključivo za čuvanje podataka ima i mogućnost direktnog memorijskog pristupa (eng. *Direct Memory Access* – DMA), upisa i čitanja sadržaja memorijskih lokacija bez korištenja jezgra DSP-a. U okviru DSP-a nalaze se i periferne jedinice, koje omogućavaju komunikaciju sa vanjskim uređajima.

Najčešće korištena operacija digitalne obrade signala, koja čini osnovu mnogih algoritama, kao što su filtriranje i FFT algoritmi, je kombinacija množenja i sabiranja sa prethodno izračunatim i sačuvanim vrijednostima, koja se pojavljuje pri izračunavanju sume, u opštem obliku zapisane sa $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x_i$. Elementi ulazne sekvence x_i se uglavnom množe sa konstantama, α_i, koje se čuvaju u memoriji. Ova operacija je tipično označena kao *pomnoži i akumuliraj* (eng. *Multiply and Accumulate* – MAC) operacija. Za izračunavanje $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x_i$ potrebno je *N* MAC operacija. Stoga ne čudi što je arhitektura DSP bazirana



Slika 16.21 Blok dijagram MAC operacije.

upravo na nastojanju da se obezbijedi što brže izvođenje MAC operacije, blokovski prikazane na Slici 16.21. To se postiže paralelnim radom jedne ili više aritmetičko-logičkih jedinica, jednog ili više hardverskih množača, jednog ili više pomjeračkih registara i više brzih registara za spremanje međurezultata.

U nekim algoritmima digitalne obrade signala zahtijeva se velika brzina i visoka preciznost izračunavanja. Mala odstupanja u vrijednostima koeficijenata i greške zaokruživanja prilikom proračuna značajno utiču na kvalitet obrade signala, posebno na karakteristike filtara, što ćemo vidjeti u nastavku izlaganja. Pored velike brzine izvršavanja instrukcija i brzog pristupa memoriji, potrebno je obezbijediti i efikasan rad sa periferijama, te mogućnost hardverske kontrole toka programa putem sistema prekida. Uz sve to, dobra programska podrška je neophodna kako bi se skratilo vrijeme razvoja aplikacija.

Digitalni procesori signala posjeduju hardverski generator adresa, koji podržava specifične načine adresiranja, kao što su bit-reverzno adresiranje i kružni bafer. Softversko formiranje sekvenci sa indeksima u bit-reverznom poretku oduzima mnogo procesorskog vremena, tako da ova hardverska funkcionalnost adresnog generatora znatno ubrzava izvršavanje aplikacija u

mem. adrese	sadržaj memorije	podatak
⋮	⋮	⋮
FF0030	0.364884	x(n-7)
FF0031	0.762583	x(n-6)
FF0032	0.078550	x(n-5)
FF0033	0.433262	x(n-4)
FF0034	0.613854	x(n-3)
FF0035	0.444237	x(n-2)
FF0036	0.355517	x(n-1)
FF0037	0.760967	x(n)
⋮	⋮	⋮

(a)

mem. adrese	sadržaj memorije	podatak
⋮	⋮	⋮
FF0030	**0.831318**	**x(n)**
FF0031	0.762583	x(n-7)
FF0032	0.078550	x(n-6)
FF0033	0.433262	x(n-5)
FF0034	0.613854	x(n-4)
FF0035	0.444237	x(n-3)
FF0036	0.355517	x(n-2)
FF0037	0.760967	x(n-1)
⋮	⋮	⋮

(b)

mem. adrese	sadržaj memorije	podatak
⋮	⋮	⋮
FF0030	0.831318	x(n-1)
FF0031	**0.762583**	**x(n)**
FF0032	0.078550	x(n-7)
FF0033	0.433262	x(n-6)
FF0034	0.613854	x(n-5)
FF0035	0.444237	x(n-4)
FF0036	0.355517	x(n-3)
FF0037	0.760967	x(n-2)
⋮	⋮	⋮

(c)

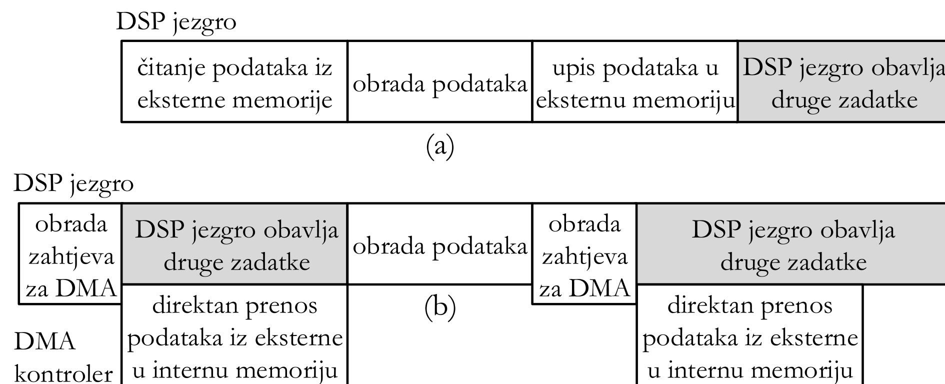
mem. adrese	sadržaj memorije	podatak
⋮	⋮	⋮
FF0030	0.831318	x(n-2)
FF0031	0.762583	x(n-1)
FF0032	**0.078550**	**x(n)**
FF0033	0.433262	x(n-7)
FF0034	0.613854	x(n-6)
FF0035	0.444237	x(n-5)
FF0036	0.355517	x(n-4)
FF0037	0.760967	x(n-3)
⋮	⋮	⋮

(d)

Slika 16.22 Princip rada kružnog bafera.

kojima se koriste FFT algoritmi. Kružni bafer predstavlja posebnu vrstu FIFO (eng. *First In, First Out* – FIFO) bafera. FIFO bafer je pomjerački registar, ili niz memorijskih lokacija, kod koga, prilikom pomjeranja njegovog sadržaja, podatak koji je prvi upisan prvi i izlazi iz njega. Specifičnost kružnog bafera leži u tome da se kod njega, umjesto prostog pomjeranja i upisivanja novog podatka na slobodnu lokaciju, novi podatak upisuje na poziciju najstarijeg, a pokazivač adresa ažurira tako da se stiče utisak rotacije bafera. Primjer pomjeranja kružnog bafera od osam memorijskih lokacija, kroz tri koraka, dat je na Slici 16.22. Nakon inicijalnog punjenja bafera, Slika 16.22 (a), kada stigne novi podatak, $x(n)$, on se uvijek upisuje na poziciju najstarijeg podatka, $x(n-7)$. Pokazivač adresa se ažurira, tako da memorijska adresa na kojoj se nalazio podatak $x(n-6)$ sada odgovara podatku $x(n-7)$, i tako redom, kao na Slici 16.22(b-d). Na taj način se izbjegava fizičko pomjeranje memorijskog sadržaja i stiče osjećaj njegovog kružnog pomjeranja. Ovaj način adresiranja je posebno značajan pri realizaciji konvolucije i sličnih algoritama, kod kojih je potrebno ažuriranje ulazne sekvence.

Eksterni događaji i prekidi mogu pokrenuti razmjenu podataka između dvije memorije ili između memorije i perifernih jedinica, bez učešća jezgra DSP. Direktan pristup memoriji obezbjeđuje DMA kontroler, sekundarni procesor koji radi paralelno sa jezgrom DSP-a. DMA kontroler preuzima zadatke razmjene podataka. Za vrijeme direktnog pristupa memoriji DMA kontroler blokira DSP jezgru pristup memoriji, ali se u jezgru mogu odvijati drugi procesi,

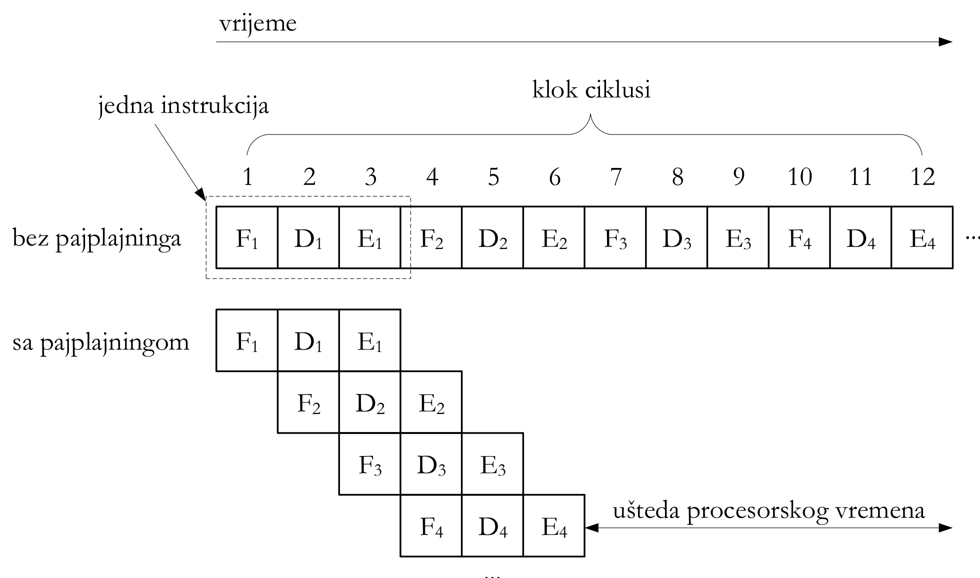


Slika 16.23 Način izvršavanja zadataka DSP-a: (a) bez DMA i (b) sa DMA.

kao što je ilustrovano na Slici 16.23. DMA kontroler generiše i prekide kojima informiše jezgro da je prenos podataka završen.

Protočno izvršavanje instrukcija, nazvano pajplajning (eng. *Pipelining*), koje obezbjeđuje veću propusnu moć izvršavanja instrukcija, još je jedna od važnih karakteristika DSP-a. Pri ovakvom izvršavanju programa, svaka instrukcija se dijeli u tri cjeline, kao što je prikazano na Slici 16.24. U prvoj fazi pribavljanja instrukcije (eng. *Fetch* – F), postavlja se adresa lokacije na kojoj se nalazi instrukcija koju treba izvršiti i instrukcija se dobavlja iz memorije. U drugoj fazi, nazvanoj dekodovanje (eng. *Decode* – D), vrši se dodjeljivanje zadataka funkcionalnim jedinicama unutar jezgra DSP, kao i pribavljanje podataka u njegove registre. Treća, izvršna faza, (eng. *Execute* – E), posvećena je izvršavanju instrukcije i upisu rezultata u registre. F-faza naredne instrukcije može da počne čim se završi F-faza tekuće instrukcije, jer se tada oslobode resursi potrebni za očitavanje programske memorije. Slično je sa ostalim fazama: čim se završi neka od faza tekuće, počinje odgovarajuća faza sljedeće instrukcije.

Paralelizam izvođenja instrukcija kod DSP-a se dodatno povećava koristeći veoma velike dužine instrukcijske riječi (eng. *Very Long Instruction Word* – VLIW). Arhitekture sa VLIW-om su bazirane na paralelnom izvršavanju više instrukcija na više izvršnih jedinica, Slika 16.25. Drugi tip paralelnih arhitektura koristi

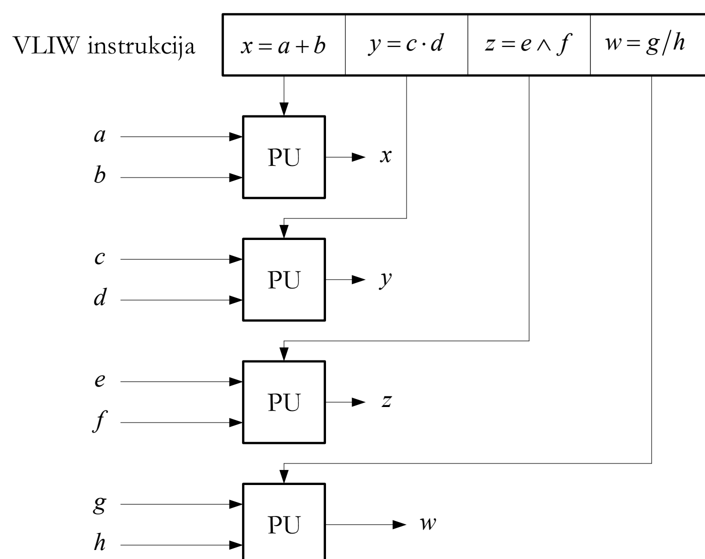


Slika 16.24 Protočno izvršavanje instrukcija DSP-a.

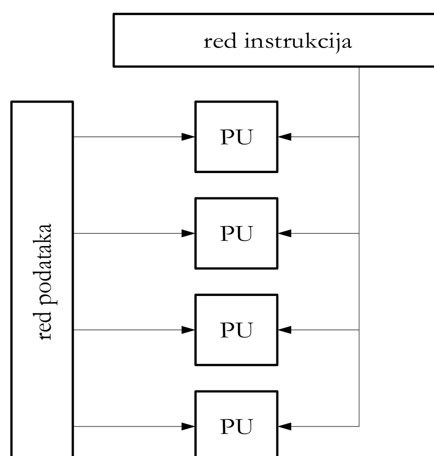
paralelizam na nivou podataka, tako da se ista instrukcija odjednom izvodi nad više podataka (eng. *Single Instruction, Multiple Data* – SIMD), kao na Slici 16.26.

Digitalni procesori signala posjeduju hardverske kontrole toka izvršavanja programa, kojima se generišu eksterni i interni prekidi. Eksterni prekidi se generišu promjenom nivoa signala dovedenih na eksterne pinove DSP-a. Interni prekidi se mogu generisati pomoću ugrađenih hardverskih brojača. Vrijednost brojača i uslov pod kojim treba završiti izvršavanje petlje se postavlja programski, ali nema potrebe da se programski ispituje ispunjenost uslova za izlazak iz petlje i ažurira vrijednost brojača, već se to izvršava na hardverskom nivou. Kada se desi prekid dovoljno visokog prioriteta, DSP mora da obustavi tekuće izvršavanje programa, sačuva informacije potrebne za nastavak izvršavanja programa nakon povratka iz rutine servisiranja prekida (npr. sačuva u memoriji tekući sadržaj nekih registara kako bi se oni mogli koristiti za servisiranja prekida) i da pokrene servisiranje prekida.

Funkcionalnost perifernih jedinica DSP-a se ostvaruje jedinicama za povezivanje sa vanjskim uređajima i sistemskim servisima. Postoji jako mnogo



Slika 16.25 VLIW arhitektura.



Slika 16.26 SIMD arhitektura.

različitih ugrađenih jedinica za povezivanje DSP-a sa okruženjem, a najvažniji su serijski i paralelni interfejsi. Sistemski servisi obezbjeđuju funkcionalnost koja je tipična za namjenske računarske sisteme. U njima su hardverskim resursima pridruženi *aplikativni programski interfejsi* (eng. *Application Programming Interface* – API), skup servisa koji se mogu koristiti u složenijim aplikacijama. Među najvažnije servise ubrajamo: konfiguraciju koja kontroliše način ponašanja DSP-a po uključivanju napajanja i nakon reseta, programabilne brojače, kontroler fazno zaključane petlje, te interfejs za debagiranje i emulaciju, tzv. JTAG, koji je dobio naziv po radnoj grupi koja ga je razvila - Zajednička testna akciona grupa (eng. *Joint Test Action Group* – JTAG).

Razvoj sistema za digitalnu obradu signala zasnovanog na DSP-u podrazumijeva niz koraka: projektovanje sistema, razvoj i implementaciju hardvera, razvoj i verifikaciju softvera, analizu i optimizaciju, te sistemsku integraciju. U fazi razvoja sistema koristi se JTAG interfejs, preko koga se izvršni kod sa računara opšte namjene upisuje u DSP. Digitalni procesor signala se može kofigurisati da nakon uključenja direktno počinje sa izvršavanjem koda sa specificirane memorijske lokacije, ili da se preko DMA skup instrukcija za inicijalizaciju kopira iz eksterne stalne memorije. U fazi inicijalizacije, u DSP se učitava operativni sistem za rad u realnom vremenu (eng. *Real Time Operating System* - RTOS), koji upravlja svim zadacima, te povezuje zadatke sa periferijama preko sistemskih servisa. Emulator omogućava da se na računaru opšte namjene prati izvršavanje softvera na DSP-u. U fazi eksploatacije sistema, računar opšte namjene, JTAG interfejs i emulator više nisu potrebni.

Programski kod za DSP se razvija u integrisanom razvojnom okruženju na računaru opšte namjene, koje obuhvata funkcionalnosti za pisanje i uređivanje koda, rukovanje projektnim datotekama, generisanje izvršnog koda, te ispravljanje grešaka. Pored toga, alatima za simulaciju, koja se izvodi na računaru opšte namjene, moguće je pratiti tok izvršavanja programa i njegovo trajanje, stanje registara, periferija i prekida, te na taj način otkriti mnoge nedostatke i uticati na optimizaciju prilikom projektovanja kako softvera, tako i hardvera u sistemu sa DSP-jem, prije izvršavanja koda na samom DSP-u. Na kraju razvojne faze, izvršni kod se može prebaciti na DSP preko JTAG interfejsa, ili se upisuje u eksternu stalnu memoriju sistema, odakle se koristi u fazi eksploatacije.

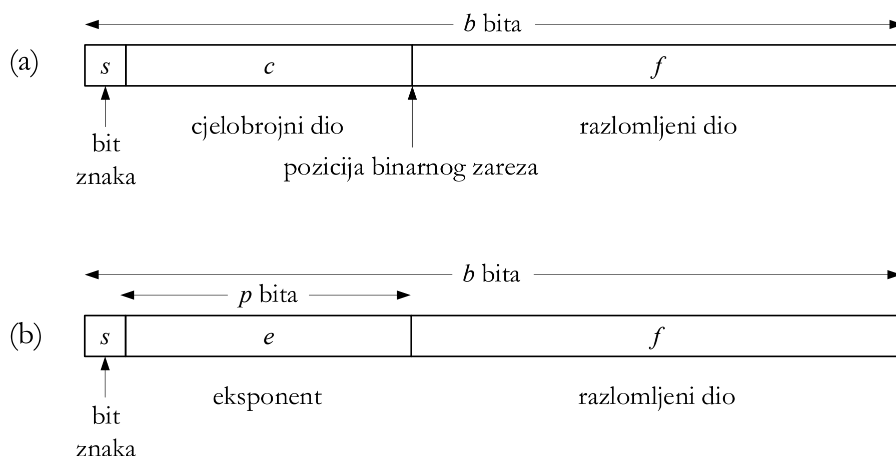
16.7 Uticaj konačne preciznosti reprezentacije brojeva na digitalnu obradu signala

Usljed konačne preciznosti reprezentacije brojeva prilikom implementacije algoritama digitalne obrade signala dolazi do odstupanja karakteristika sistema od projektovanih. Najznačajnije promjene nastaju usljed kvantizacije signala, kvantizacije vrijednosti elemenata impulsnog odziva, kvantizacije koeficijenata u jednačinama diferencija i faktora W_N prilikom računanja DFT-e, te konačne preciznosti računskih operacija. Prilikom izvođenja operacija digitalne obrade signala poželjno je grešku koja nastaje kao posljedica konačne dužine riječi pri zapisu brojeva svesti na minimum.

16.7.1 Aritmetika sa fiksnim i aritmetika sa pokretnim zarezom

Dva osnovna načina reprezentacije brojeva pri implementaciji algoritama digitalne obrade signala, sa fiksnim i pokretnim zarezom, su prikazana na Slici 16.27. Simbolom "," je označen binarni zarez.

U aritmetici fiksnog zareza operacije se izvršavaju nad cijelim ili razlomljenim brojevima, koristeći fiksne dužine riječi od *b* bita, najčešće od 16, 24, 32 ili 64 bita. Brojevi se koduju kao $(-1)^s \times (c, f)$, gdje je *s* bit znaka (vrijednosti 0 za pozitivne, a 1 za negativne brojeve), *c* cjelobrojni, a *f* razlomljeni dio broja (frakcija). Za predstavu cijelih brojeva binarni zarez se ne koristi, odnosno smatramo da se nalazi desno od bita najmanje težine. Ako se koriste cijeli brojevi bez predznaka, njihov dinamički opseg je $\left[0, 2^b - 1\right]$, a u aritmetici drugog komplementa, koja se najčešće koristi kada se pri digitalnoj obradi signala pojavljuju i negativni brojevi, dinamički opseg je $\left[-2^{b-1}, 2^{b-1} - 1\right]$. Razlomljeni brojevi sa fiksnim binarnim zarezom, koji je postavljen odmah iza pozicije najvišeg bita, koji se koristi kao predznak, imaju opseg vrijednosti



Slika 16.27 Način zapisa brojeva kod digitalne obrade signala sa: (a) fiksnim i (b) pokretnim binarnim zarezom.

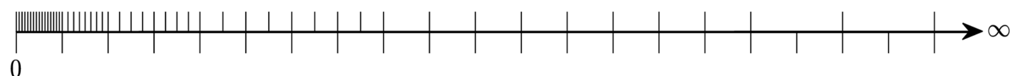
$\left[-1,1-2^{-(b-1)}\right]$. Dinamički opseg se povećava sa pomjeranjem decimalnog zareza udesno, ali se pri tome smanjuje preciznost, koja je obrnuto proporcionalna razlici dva susjedna broja. Preporuka je da se za aritmetiku fiksnog zareza koristi najmanje 16 bita, čime je moguće predstaviti $2^{16}=65536$ različitih vrijednosti.

U aritmetici pokretnog zareza operacije se izvode nad brojevima koji su predstavljeni mantisom i eksponentom. Najjednostavniji zapis brojeva sa pokretnim zarezom je u formatu $(-1)^s\times 2^e\times(0,f)$, gdje je s bit znaka. Bit "0" lijevo od binarnog zareza se podrazumijeva, pa je mantisa kodovana u obliku $(0,f)$, gdje je f razlomljeni dio. Za kodovanje eksponenta, e, se koristi p bita, dok se za kodovanje frakcije, f, koristi $m=b-p-1$ bita. Dinamički opseg u ovom slučaju je mnogo veći nego kod zapisa brojeva sa fiksnim zarezom i iznosi $\left[-2^{2^p-1},2^{2^p-1}\left(1-2^{-m}\right)\right]$. Ovo vrijedi kada se za zapis brojeva koristi drugi komplement, a slično razmatranje se može provesti i za brojeve bez predznaka.

Po IEEE 754-2008 standardu brojevi sa pokretnim zarezom se koduju na nešto složeniji način, sa $(-1)^s \times 2^{e-2^{(p-1)}+1} \times (1,f)$. Za zapis negativnih brojeva se koristi drugi komplement, a *s* je bit znaka. Bit "1" lijevo od binarnog zareza se podrazumijeva. Mantisa je kodovana u obliku $(1,f)$, gdje je *f* razlomljeni dio (frakcija). Broj bita koji se koristi za zapis frakcije, *f*, diktira numeričku preciznost izračunavanja, dok broj bita *p*, koji se koristi za kodovanje eksponenta, utiče i na dinamički opseg i na preciznost. Za kodovanje eksponenta se koristi tzv. pomjereni binarni kod. Pri kodovanju se od vrijednosti eksponenta, *e*, oduzima $2^{(p-1)} - 1$. Na primjer, ako se za eksponent koristi osam bita, onda se eksponenti iz opsega $[-126,127]$ koduju redom binarnim brojevima iz opsega [00000001, 11111110]. Vrijednosti $e = 00\cdots0$ i $e = 11\cdots1$ imaju posebno značenje. Kodna riječ $e = 11\cdots1$ uz frakciju jednaku nuli predstavlja vrijednost koja je nedifinisana ili ju je nemoguće predstaviti (npr. beskonačno veliku vrijednost), i označava se sa NaN (eng. *Not-a-Number*). Kodna riječ $e = 00\cdots0$ se koristi da omogući zapis mantisa čija je apsolutna vrijednost manja od jedan. U tom slučaju se brojevi koduju sa $(-1)^s \times 2^{-2^{(p-1)}+2} \times (0,f)$. Ovaj način se koristi za zapis brojeva čija je apsolutna vrijednost manja od $2^{-2^{(p-1)}+2}$.

Većina savremenih programabilnih struktura za digitalnu obradu signala sa pokretnim zarezom koristi 32 bita, pri čemu je najviši bit znaka, zatim slijedi osam bita koji se koriste za kodovanje eksponenta, te 23 bita za frakciju u prirodnom binarnom kodu. Najmanja apsolutna vrijednost broja koji se može predstaviti po IEEE 754-2008 standardu je $2^{-126} \cdot 2^{-23} = 2^{-149}$, a najveća iznosi $\left(2 - 2^{-23}\right) \cdot 2^{127} \approx 2^{128}$. Koristeći 32 bitnu aritmetiku sa pokretnim zarezom moguće je predstaviti $2^{32} = 4.294.967.296$ različitih vrijednosti.

Aritmetika pokretnog zareza omogućava digitalnu obradu signala sa većim dinamičkim opsegom nego što je to moguće u aritmetici fiksnog zareza sa istim brojem bita. Za razliku od aritmetike sa fiksnim zarezom, kod zapisa brojeva sa pokretnim zarezom razlika susjednih brojeva nije uvijek jednaka, već se preciznost mijenja sa promjenom eksponenta.



Slika 16.28 Raspodjela brojeva zapisanih sa fiksnim zarezom (ispod brojne ose) i pokretnim zarezom (iznad brojne ose).

Za ilustraciju preciznosti zapisa brojeva sa fiksnim i pokretnim zarezom, posmatraćemo brojeve bez predznaka zapisane sa sedam bita. Ako se koriste cijeli brojevi zapisani sa fiksnim zarezom, dinamički opseg je $[0,127]$, a preciznost je uvijek ista i jednaka jedinici. Za zapis brojeva u pokretnom zarezu, u obliku $2^e \times (0,f)$, odaberimo za kodovanje eksponenta tri, a za kodovanje frakcije četiri bita. Pogodnim izborom broja bita za zapis eksponenta i frakcije postigli smo da je dinamički opseg blizak dinamičkom opsegu koji smo imali pri zapisu brojeva sa fiksnim zarezom, i iznosi $[0,120]$. Međutim, preciznost zapisa brojeva sada nije konstantna. Najbolja preciznost se postiže u području malih vrijednosti, kada je eksponent jednak nuli, i iznosi $2^{-4} = 0,0625$. Sa povećanjem eksponenta rastu razlike između susjednih brojeva. Za velike vrijednosti brojeva preciznost postaje lošija nego pri zapisu sa fiksnim zarezom. U ovom primjeru, najlošija preciznost je 2^3. Ovaj primjer raspodjele brojeva, zapisanih sa fiksnim i pokretnim zarezom, dat je na brojnoj osi, na Slici 16.28.

Preciznost zapisa brojeva sa fiksnim zarezom postavljenim odmah iza predzanaka je $2^{-(b-1)}$, što kod 32-bitne aritmetike iznosi 2^{-31}. Najbolja preciznost zapisa brojeva sa pokretnim zarezom je pri minimalnoj vrijednosti eksponenta kada, pri zapisu brojeva po IEEE 754-2008 standardu, iznosi $2^{-(b-1-p)} \cdot 2^{-2^{(p-1)}+2}$, dok sa porastom vrijednosti brojeva postaje lošija i pri maksimalnoj vrijednosti eksponenta iznosi $2^{-(b-1-p)} \cdot 2^{2^{(p-1)}-1}$. Ako se u 32-bitnoj aritmetici osam bita koristi za kodovanje eksponenta, najbolja preciznost je $2^{-23} \cdot 2^{-126} = 2^{-149}$, a najlošija $2^{-23} \cdot 2^{127} = 2^{104}$. Procjenom dinamičkog opsega brojeva koji se mogu pojaviti prilikom izračunavanja, moguće je prilagoditi odnos broja bita koji se koriste za

eksponent i frakciju. Odabirom većeg broja bita za eksponent, a manjeg za frakciju, povećava se dinamički opseg, a smanuje preciznost zapisa brojeva.

U aritmetici sa pokretnim zarezom složenost izvođenja matematičkih operacija je nešto veća u odnosu na aritmetiku sa fiksnim zarezom, što treba uzeti u obzir ako je vrijeme obrade signala ograničavajući faktor.

16.7.2 Prekoračenje opsega

U proračunima sa konačnom dužinom riječi neminovno dolazi do prekoračenja opsega, tj. pojave da je rezultat operacije van dozvoljenog opsega vrijednosti koje se mogu zapisati sa datim brojem bita i u datom formatu. Zbog toga se koristi tzv. aritmetika zasićenja, gdje se prekoračenje opsega izbjegava odsijecanjem najmanje značajnih bita ili zaokruživanjem brojeva na najveće dozvoljene vrijednosti.

Ako se koristi tehnika zaokruživanja brojeva, svaki put kad se obradom generiše novi broj, ukoliko njegova vrijednost premašuje dinamički opseg, on se mora zaokružiti na najbližu vrijednost koja se može zapisati putem formata koji se koristi. Ovo zaokruživanje brojeva dovodi do greške kvantizacije, koju nazivamo kvantizacioni šum, i koja predstavlja razliku između stvarnih i kvantovanih vrijednosti. Kada je vjerovatnoća pojave velikih vrijednosti iz dinamičkog opsega signala mnogo manja od vjerovatnoće pojave malih vrijednosti, što je čest slučaj u algoritmima digitalne obrade signala, razmaci između susjednih brojeva su mnogo veći kod zapisa sa fiksnim zarezom u poređenju sa zapisom sa pokretnim zarezom. Stoga je i greška zaokruživanja izraženija ako se koristi aritmetika sa fiksnim zarezom, te je u slučajevima kada je preciznost obrade signala kritičan zahtjev neophodno koristiti aritmetiku sa pokretnim zarezom.

Osim zaokruživanja brojeva mogu se koristiti i druge metode za spriječavanje prekoračenja opsega. Kada se radi o sabiranju, koristi se skaliranje ulaznog signala. Na primjer, do prekoračenja prilikom računanja konvolucije sigurno neće doći ako se ulazni signal skalira sa:

$$s = \frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h(k) \right|}, \tag{16.44}$$

gdje je $h(n)$ impulsni odziv sistema. Skalirajući faktori se prilikom realizacije inkorporiraju u postojeće množače. Vidjećemo nešto kasnije da u praktičnim primjenama ovo ograničenje nije poželjno jer povećava grešku kvantizacije ulaznog signala i snižava odnos signal/šum, pa se koriste faktori izračunati na osnovu blažih ograničenja, koji dopuštaju da u rijetkim situacijama dođe do prekoračenja opsega.

Slično se dešava i prilikom računanja proizvoda. Ako se radi sa fiksnom dužinom riječi, nakon svakog množenja bi trebalo izvršiti kvantizaciju rezultata i svesti dužinu proizvoda na isti broj bita sa kojim su zapisani njegovi faktori. Umjesto toga, u praktičnim rješenjima se pribjegava varijabilnoj dužini kodne riječi uz dodatne hardverske resurse. Na primjer, koriste se registri sa četvorostrukom dužinom kodne riječi za akumulaciju međurezultata, kako ne bi došlo do prekoračenja dužine riječi u toku proračuna, pa se tek po završetku svih operacija dobijena vrijednost skalira na raspoloživi broj bita.

Čak i vrlo malo prekoračenje opsega može izazvati jako veliku grešku u konačnom rezultatu, posebno u rekurzivnim algoritmima. U aritmetici sa fiksnim zarezom postoji mogućnost da, i pored primjena praktičnih metoda za spriječavanje prekoračenja opsega, do toga ipak dođe u nekom trenutku pri nekim vrijednostima ulaznog signala. Kod rekurzivnih algoritama, greške usljed kvantizacije ili prekoračenja opsega mogu izazvati pojavu oscilacija ili fiksiranje vrijednosti izlaznog signala, što se naziva *graničnim ciklusom*.

Posmatrajmo kao primjer graničnih ciklusa dva sistema opisana jednačinom diferencija:

$$y(n) = x(n) + ay(n-1), \tag{16.45}$$

uz $a = \pm\frac{5}{8}$ i njihove implementacije sa dužinom riječi od četiri bita su date sa:

$$y_Q(n) = x(n) + Q\left\{ay_Q(n-1)\right\}, \tag{16.46}$$

gdje $Q\{\cdot\}$ označava operaciju zaokruživanja na najbliži kvantizacioni nivo, a $y_Q(n)$ je kvantovan izlazni signal, zapisan sa četiri bita.

Kada je $a=\frac{5}{8}$, prvih nekoliko koraka pri izračunavanju odziva na pobudni signal oblika $x(n)=\frac{7}{8}\delta(n)$, pri nultim početnim uslovima, su dati sa:

$$y_Q(0)=x(0)+Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(-1)\}=x(0)=0{,}111_2$$
$$y_Q(1)=Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(0)\}=Q\{0{,}101_2\cdot 0{,}111_2\}=Q\{0{,}1000110_2\}=0{,}100_2$$
$$y_Q(2)=Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(1)\}=Q\{0{,}101_2\cdot 0{,}100_2\}=Q\{0{,}0101000_2\}=0{,}010_2$$
$$y_Q(3)=Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(2)\}=Q\{0{,}101_2\cdot 0{,}010_2\}=Q\{0.0010100_2\}=0{,}001_2$$
$$y_Q(4)=Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(3)\}=Q\{0{,}101_2\cdot 0{,}001_2\}=Q\{0.0001010_2\}=0{,}001_2$$
$$y_Q(5)=Q\{0{,}101_2\cdot y_Q(4)\}=Q\{0{,}101_2\cdot 0{,}001_2\}=Q\{0{,}0001010_2\}=0{,}001_2$$

Rezultat će biti isti za svako $n\geq 3$, iako se radi o odzivu stabilnog sistema na ograničenu pobudu ograničenog trajanja, zbog čega bi odziv trebao da iščezne nakon nekog vremena.

Za slučaj $a=-\frac{5}{8}$, pobudu oblika $x(n)=\frac{7}{8}\delta(n)$, i nulte početne uslove, dobije se odziv čije vrijednosti već od trećeg koraka osciluju između $1{,}111_2$ i $0{,}001_2$:

$$y_Q(0)=x(0)+Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(-1)\}=x(0)=0{,}111_2,$$
$$y_Q(1)=Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(0)\}=Q\{1{,}011_2\cdot 0{,}111_2\}=Q\{1{,}0111010_2\}=1{,}100_2,$$
$$y_Q(2)=Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(1)\}=Q\{1{,}011_2\cdot 1{,}100_2\}=Q\{0{,}0101000_2\}=0{,}010_2,$$
$$y_Q(3)=Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(2)\}=Q\{1{,}011_2\cdot 0{,}010_2\}=Q\{1{,}1101100_2\}=1{,}111_2,$$
$$y_Q(4)=Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(3)\}=Q\{1{,}011_2\cdot 1{,}111_2\}=Q\{0{,}0001010_2\}=0{,}001_2,$$
$$y_Q(5)=Q\{1{,}011_2\cdot y_Q(4)\}=Q\{1{,}011_2\cdot 0{,}001_2\}=Q\{1{,}1110110_2\}=1{,}111_2.$$

Kada se pojave granični ciklusi, koji nastaju pri specifičnim oblicima pobude, jedino rješenje je resetovanje algoritma i, ukoliko je moguće, izbjegavanje takvih pobudnih signala u budućem radu sistema. Ako se želi smanjiti vjerovatnoća pojave graničnih ciklusa, sistem treba implementirati sa većom dužinom riječi.

16.7.3 Konačna preciznost DFT i FFT algoritama

Analizirajmo sada uticaj konačne preciznost računskih operacija na računanje DFT i na FFT algoritme. Zbog široke primjene ovih metoda u sistemima koji rade u realnom vremenu, gdje je vrijeme kritičan faktor, pa se koristi aritmetika sa fiksnim zarezom, provešćemo statističku analizu greške zaokruživanja pri množenju, koje je vremenski mnogo zahtjevnija operacija od sabiranja. Pretpostavimo da vršimo spektralnu analizu sekvence $x(n)$, koja u opštem slučaju može biti kompleksna, te da su njene realne i imaginarne vrijednosti, kao i vrijednosti faktora $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ zapisane sa b bita. Takođe pretpostavimo da je greška kvantizacije ravnomjerno raspoređena u opsegu $[-\Delta/2, \Delta/2)$, gdje je $\Delta = 2^{-b}$, te da je njena srednja vrijednost jednaka nuli. Prilikom direktnog računanja, za izračunavanje jedne vrijednosti DFT potrebno je $4N$ realnih množenja, pa imamo $4N$ kvantizacionih grešaka, za koje pretpostavljamo da su međusobno nekorelisane i da nisu korelisane ni sa signalom $x(n)$. Pod navedenim pretpostavkama, varijansa greške kvantizacije je:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 f(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}, \tag{16.47}$$

gdje je $f(e)$ funkcija gustine vjerovatnoće greške kvantizacije. Za varijansu greške kvantizacije $4N$ realnih množenja imamo da je:

$$\sigma_q^2 = 4N\sigma_e^2 = \frac{N}{3} 2^{-2b}. \tag{16.48}$$

Primijetimo da je greška kvantizacije direktno proporcionalna broju tačaka N u kojima računamo DFT.

Kako bismo spriječili prekoračenje opsega, ulaznu sekvencu je potrebno skalirati. Ako je dinamički opseg ulaznog signala $[-1,1)$, iz uslova da vrijednosti DFT ne odu u zasićenje, slijedi da je:

$$\left|X(k)\right| \leq \sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right| < 1, \tag{16.49}$$

što možemo osigurati ako inicijalno skaliramo ulazni signal tako da je $\left|x(n)\right| < 1/N$ za svako $0 \leq n \leq N-1$.

U svrhu statističke analize pretpostavimo da je signal $x(n)$ bijeli šum. Nakon skaliranja sa faktorom $1/N$, njegove vrijednosti će biti uniformno distribuirane u opsegu $[-1/N, 1/N)$. Varijansa skalirane sekvence $x(n)$ je:

$$\sigma_x^2 = \frac{(2/N)^2}{12} = \frac{1}{3N^2}, \tag{16.50}$$

dok je varijansa DFT sekvence, kao varijansa sume N elemenata skalirane sekvence $x(n)$, pomnoženih determinističkim faktorima oblika W_N^{kn}, data sa:

$$\sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N}. \tag{16.51}$$

Sada možemo izračunati odnos signal/šum:

$$SNR = 10\log\frac{P_x}{P_n} = 10\log\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = 10\log\frac{2^{2b}}{N^2}. \tag{16.52}$$

Zaključujemo da skaliranje ulazne sekvence sa faktorom $1/N$, koje se provodi radi sprečavanja zasićenja, N puta smanjuje odnos signal/šum. Zbirno, greška kvantizacije i navedeno skaliranje dovode do ukupnog smanjenja odnosa signal/šum koje je proporcionalno sa N^2. Na primjer, ako želimo da osiguramo odnos signal/šum od 30 dB pri računanju DFT u 1024 tačke treba nam 15 bitni zapis broja i prilikom sabiranja i prilikom množenja. Međutim, ako smo u mogućnosti da obezbijedimo dovoljno velik dinamički opseg pri sabiranju, tako

da je $\left|X(k)\right| < N$, možemo izbjeći skaliranje ulazne sekvence, pa je $\sigma_x^2 = 1/3$, $\sigma_X^2 = N/3$, te je $SNR = 10\log 2^{2b}$. Pri ovakvom pristupu, da bismo osigurali odnos signal/šum od 30 dB, potrebno nam je samo pet bita, ali zbog povećanog dinamičkog opsega (jer se ne radi skaliranje) za sabiranje treba da osiguramo još 10 bita. To znači da množenje radimo sa preciznošću od samo pet bita, što je značajno brže i zahtijeva manje hardverske resurse, dok za sabiranje trebamo 15 bitsku preciznost.

Računanje DFT putem FFT algoritama zahtijeva znatno manji broj množenja od direktnog pristupa, što nas može navesti na pomisao da je greška kvantizacije manja. Nažalost, to nije slučaj. Pokazaćemo to za FFT algoritam sa prorjeđivanjem u vremenu, a slična analiza se može sprovesti i za FFT algoritam sa prorjeđivanjem u frekvenciji.

Svaka leptir operacija FFT algoritama uključuje jedno kompleksno množenje. Na bilo koju vrijednost DFT utiče $N/2$ množenja iz prve faze FFT algoritma, $N/4$ iz druge, $N/8$ iz treće, i tako dalje, te je ukupan broj tih množenja:

$$2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 1 = 2^{m-1}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right] = 2^m\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = N - 1, \quad (16.53)$$

gdje je $N = 2^m$.

Greška kvantizacije iz svake leptir operacije se propagira sve do izlaza FFT algoritma. Greške kvantizacije iz prve faze se propagiraju kroz $m-1$ faza, one iz druge faze kroz $m-2$ faza, itd... Pri tome, zbog množenja sa faktorima oblika W_N^{kn}, dolazi do njihovog faznog pomaka, pri čemu varijansa svake greške kvantizacije ostaje nepromijenjena.

Ako pretpostavimo da je greška kvantizacije neke leptir operacije nekorelisana sa greškama kvantizacije drugih leptir operacija, tada imamo $4(N-1)$ grešaka kvantizacije koje utiču na računanje svake od vrijednosti DFT, te je varijansa ukupne greške kvantizacije na izlazu:

$$\sigma_q^2 = 4(N-1)\frac{\Delta^2}{12} \approx \frac{N\Delta^2}{3} = \frac{N}{3}2^{-2b}, \quad (16.54)$$

što je isto kao prilikom direktnog računanja DFT. Ovaj rezultat nije iznenađujući, jer FFT algoritmi ne smanjuju broj množenja ako se posmatra računanje samo jedne vrijednosti DFT, već samo ako se posmatra računanje DFT sekvence u cjelini.

Kao i u slučaju direktnog računanja DFT, neophodno je uraditi skaliranje ulaznog signala kako bismo izbjegli prekoračenje opsega. Ako skaliranje uradimo tako da je $|x(n)| < 1/N$ za svako $0 \leq n \leq N-1$, relacije izvedene za varijansu izlazne sekvence i odnos signal/šum kod direktnog računanja DFT vrijede i za FFT algoritme. Međutim, izborom drugačije strategije skaliranja moguće je značajno smanjiti varijansu greške kvantizacije i povećati odnos signal šum na izlazu FFT algoritama. Neka su međurezultati *i*-te faze FFT algoritma sa prorjeđivanjem u vremenu zapisani sa $|X_i(k)|$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Pod pretpostavkom da je $|x(n)| < 1$, u međurezultatima prve faze neće doći do prekoračenja, tj. biće $|X_1(k)| < 1$, ako ulazni signal skaliramo sa faktorom $1/2$. Ako zatim međurezultat prve faze skaliramo sa $1/2$, za međurezultate druge faze će vrijediti da je $|X_2(k)| < 1$. Nastavimo li postupak tako da skaliramo sa faktorom $1/2$ međurezultate svih faza, za sve međurezultate će vrijediti da je $|X_i(k)| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Izvodeći ovakvih *m* skaliranja postižemo ukupan skalirajući faktor $(1/2)^m$, te u konačnom rezultatu FFT algoritma neće doći do prekoračenja opsega. Nivo izlaznog signala ostaje nepromijenjen, ali se značajno smanjuje varijansa greške kvantizacije na izlazu. Svako sukcesivno skaliranje sa $1/2$ smanjuje varijansu greške kvantizacije četiri puta. To znači da će za $4(N/2)$ grešaka kvantizacije koje nastaju u prvoj fazi varijansa biti smanjena $(1/4)^{m-1}$ puta. Za $4(N/4)$ grešaka kvantizacije nastalih u drugoj fazi varijansa će biti smanjena $(1/4)^{m-2}$ puta, itd... Ukupna varijansa greške kvantizacije na izlazu FFT algoritma je stoga jednaka:

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \frac{\Delta^2}{12}\left\{4\frac{N}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} + 4\frac{N}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + 4\frac{N}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \cdots + 4\right\} = \\ &= \frac{\Delta^2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-3} + \cdots + 1\right\} = \\ &= \frac{2\Delta^2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m}\right\} \approx \frac{2}{3}2^{-2b},\end{aligned} \tag{16.55}$$

gdje smo pretpostavili da je $(1/2)^m \ll 1$. Varijansa DFT sekvence je ostala nepromijenjena, $\sigma_X^2 = 1/(3N) = 1/(3 \cdot 2^m)$. Primjećujemo da smo na ovaj način, distribuirajući skaliranje uniformno kroz sve faze FFT algoritma, dobili varijansu greške kvantizacije koja skoro ne zavisi od *N*.

Odnos signal/šum:

$$SNR = 10\log\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = 10\log 2^{2b-m-1}, \tag{16.56}$$

je sada povećan, jer je inverzno proporcionalan sa *N*, umjesto sa N^2, kao u (16.52).

Za prethodno razmatrani primjer računanja DFT u 1024 tačke uz željeni odnos signal/šum od 30 dB, uz ovakvo distribuirano skaliranje nam treba 11, umjesto ranijih 15 bita, kada smo skaliranje radili samo u prvoj fazi FFT algoritma.

Provedena analiza nam ukazuje na to kako konačna preciznost računskih operacija utiče na efikasnost najvažnijih algoritama koji se koriste u digitalnoj obradi signala. Sličnu analizu je poželjno provesti i prilikom implementacije drugih algoritama, jer velika varijansa greške kvantizacije i mali odnos signal/šum u rezultatu obrade signala mogu dovesti do pogrešnih zaključaka.

16.7.4 Kvantizacija filtarskih koeficijenata

Prilikom implementacije algoritama digitalne obrade signala, koeficijenti funkcije prenosa se zapisuju sa konačnom dužinom riječi. Stoga se karakteristike implementiranog sistema razlikuju od projektovanih: zaokružuju se vrijednosti koeficijenata u jednačini diferencij i vrijednosti impulsnog odziva, mijenja se položaj nula i polova u kompleksnoj z-ravni, a samim tim i frekvencijska karakteristika sistema. Pri analizi uticaja kvantizacije filtarskih koeficijenata na karakteristike sistema, najčešće se posmatra njihov uticaj na promjenu frekvencijske karakteristike.

Razmotrimo direktnu realizaciju IIR sistema. Zbog kvantizacije koeficijenata, funkcija prenosa realizovanog sistema će se razlikovati od zadane, date sa (16.1), pa ćemo je označiti sa $\hat{H}(z)$:

$$\hat{H}(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} \hat{b}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i z^{-i}} = \frac{\prod_{i=1}^{M} \left(1 - \hat{q}_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{N} \left(1 - \hat{p}_i z^{-1}\right)}, \tag{16.57}$$

gdje su $\hat{a}_i$ i $\hat{b}_i$ kvantovani koeficijenti:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= a_i + \Delta a_i,\ i = 1,2,\ldots,N, \\ \hat{b}_i &= b_i + \Delta b_i,\ i = 0,1,\ldots,M, \end{aligned} \tag{16.58}$$

dok su $\hat{q}_i$ i $\hat{p}_i$ kvantovane vrijednosti nula i polova funkcije prenosa:

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= q_i + \Delta q_i,\ i = 1,2,\ldots,N, \\ \hat{p}_i &= p_i + \Delta p_i,\ i = 1,2,\ldots,M. \end{aligned} \tag{16.59}$$

Odgovarajuće greške kvantizacije su označene sa Δa_i, Δb_i, Δq_i i Δp_i.

Nule i polovi funkcije prenosa su u direktnoj vezi sa koeficijentima funkcije prenosa, te kvantizacija koeficijenata dovodi do pomjeranja nula i polova u kompleksnoj z-ravni. Promjena frekvencijskih karakteristika se lakše uočava posmatranjem promjene položaja nula i polova u kompleksnoj z-ravni, nego posmatranjem promjene koeficijenata u jednačini diferencija. Stoga ćemo izvršiti

analizu uticaja promjene jednog od koeficijenata, a_i, iz nazivnika funkcije prenosa na položaj jednog od polova, p_k. Slična analiza se može provesti za uticaj koeficijenata iz brojnika na nule funkcije prenosa.

Apsolutna promjena pola p_k usljed kvantizacije koeficijenta a_i je $(\partial p_k / \partial a_i)\Delta a_i$, te se ukupna promjena pola p_k usljed kvantizacije svih koeficijenata iz nazivnika funkcije prenosa može iskazati zbirom promjena posmatranog pola nastalih zbog promjena pojedinačnih koeficijenata:

$$\Delta p_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial p_k}{\partial a_i} \Delta a_i \ . \tag{16.60}$$

Parcijalne derivacije $\frac{\partial p_k}{\partial a_i}$ možemo pomnožiti i podijeliti sa parcijalnim izvodom $\partial A(z)/\partial z$ u okolini pola p_k:

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_i} = \frac{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial z}\right|_{z=p_k} \frac{\partial p_k}{\partial a_i}}{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial z}\right|_{z=p_k}} = \frac{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial a_i}\right|_{z=p_k}}{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial z}\right|_{z=p_k}} \ . \tag{16.61}$$

Brojnik prethodnog izraza možemo zapisati u obliku:

$$\left.\frac{\partial A(z)}{\partial a_i}\right|_{z=p_k} = \left.\frac{\partial \left[1 + \sum_{l=1}^{N} a_l z^{-l}\right]}{\partial a_i}\right|_{z=p_k} = \left. z^{-i} \right|_{z=p_k} = p_k^{-i} , \tag{16.62}$$

a nazivnik sa:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial A(z)}{\partial z}\right|_{z=p_k} &= \left.\frac{\partial}{\partial z} \prod_{l=1}^{N} \left(1 - p_l z^{-1}\right)\right|_{z=p_k} = \\ &= \left.\sum_{i=1}^{N} p_i z^{-2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} \left(1 - p_l z^{-1}\right)\right|_{z=p_k} = p_k^{-N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} \left(p_k - p_l\right), \end{aligned} \tag{16.63}$$

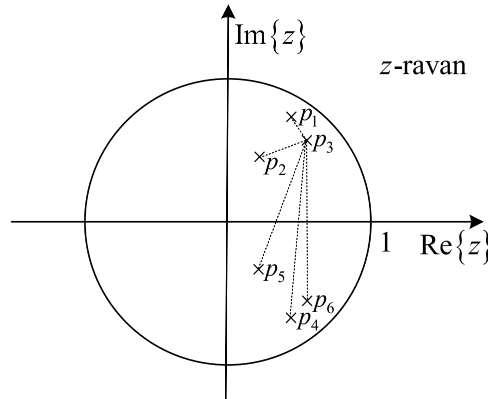
te na kraju dobijamo:

$$\frac{\partial\, p_k}{\partial\, a_i} = -\frac{p_k^{N-i}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N}\left(p_k - p_l\right)} . \tag{16.64}$$

Koeficijenti u brojniku funkcije prenosa ne utiču na pomjeranje polova, te je ukupna promjena pola:

$$\Delta p_k = -\sum_{i=1}^{N} \frac{p_k^{N-i}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N}\left(p_k - p_l\right)} \Delta a_i . \tag{16.65}$$

Iz posljednjeg izraza se može zaključiti kako na promjenu *k*-tog pola utiču promjene koeficijenata iz nazivnika funkcije prenosa. Članovi $\left(p_k - p_l\right)$ u nazivniku (16.65) su vektori čija je dužina jednaka udaljenosti između polova p_k i p_l u kompleksnoj z-ravni. Prema tome, najveći uticaj na promjenu nekog pola pri kvantizaciju koeficijenata imaju njemu bliski polovi (Slika 16.29), te bi, pri projektovanju sistema, takav raspored polova trebalo izbjegavati, posebno ako se algoritam implementira sa malom dužinom riječi. Kod sistema sa dobrom frekvencijskom selektivnošću broj polova je veliki i neki od njih su bliski jedni drugima. U takvim slučajevima pomjeraj polova može biti čak toliki da se neki od polova nakon kvantizacije koeficijenata pomjere van jedinične kružnice u z-ravni, čime se narušava stabilnost sistema. Prilikom direktne realizacije uticaj na pomjeranje jednog pola imaju svi polovi funkcije prenosa, te su te strukture izrazito nepovoljne kada se implementiraju visokoselektivni sistemi koristeći operacije sa malim brojem bita. Problem se ublažava kaskadnim i paralelnim strukturama, kod kojih se svaki par konjugovano kompleksnih polova zasebno realizuje sekcijama drugog reda, te promjena jednog pola zavisi samo od njemu konjugovano kompleksnog para i nezavisna je od njegove udaljenosti od ostalih polova. U kaskadnim strukturama, šum kvantizacije nastao u jednoj sekciji drugog reda se pojačava pri prolasku signala kroz sve naredne sekcije, te je sekcije drugog reda potrebno poredati od one sa najmanjim pojačanjem, ka sekcijama sa većim pojačanjem. Pojačanje sekcije drugog reda je to veće što je pol bliži jediničnoj kružnici. Pojačanje se može smanjiti i uparivanjem nula i polova, počevši od polova koji su najbliži jediničnoj kružnici i pridružujući im njima najbliže nule.

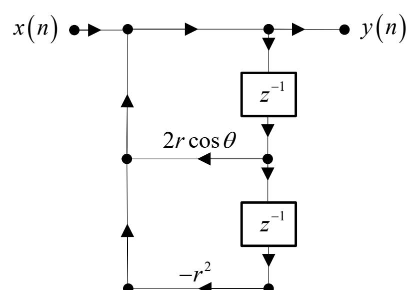


Slika 16.29 Uticaj blizine polova na promjenu pol p_3.

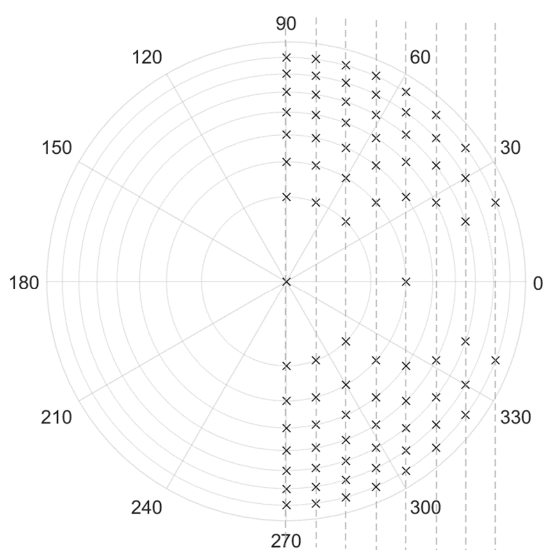
Uticaj kvantizacije se može dodatno umanjiti specijalizovanim strukturama, pri čemu je ponekad potrebno dopustiti povećanje broja množenja. Ovakav pristup se koristi samo ako je potrebno ublažiti efekte kvantizacije kod visoko frekvencijski selektivnih filtara, pri implementaciji sa malim dužinama kodne riječi. Pokažimo to na primjeru realizacije sekcije drugog reda, sa polovima $p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\theta} = r(\cos\theta \pm j\sin\theta)$:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad (16.66)$$

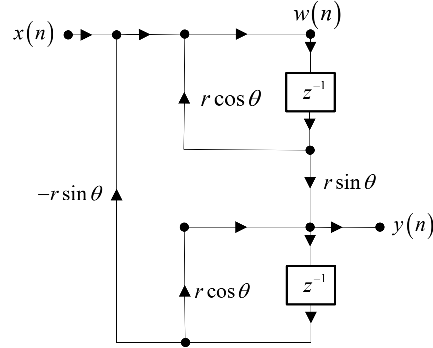
čija je direktna forma realizacije data na Slici 16.30. Položaj svih mogućih polova pri kvantizaciji koeficijenata $a_1 = -2r\cos\theta$ i $a_2 = r^2$ sa tri bita dat je na Slici 16.31. Polovi se nalaze na presjecima koncentričnih kružnica, $|p_{1,2}| = \sqrt{a_2}$, i vertikalnih pravih, $\mathrm{Re}\{p_{1,2}\} = -a_1/2$, u kompleksnoj z-ravni.



Slika 16.30 Direktna forma realizacije funkcije prenosa sa dva pola.



Slika 16.31 Raspored mogućih položaja polova funkcije prenosa (16.66), pri kvantizaciji koeficijenata sa tri bita kod direktne realizacije.



Slika 16.32 Blok šema alternativnog sistema koji ima jednake polove kao sistem na Slici 16.30.

Moguće je pronaći alternativni sistem, sa jednakim polovima kao (16.66), koji se može opisati pomoću dvije jednačine diferencija:

$$w(n) = x(n) + r\cos\theta\, w(n-1) - r\sin\theta\, y(n-1), \qquad (16.67)$$

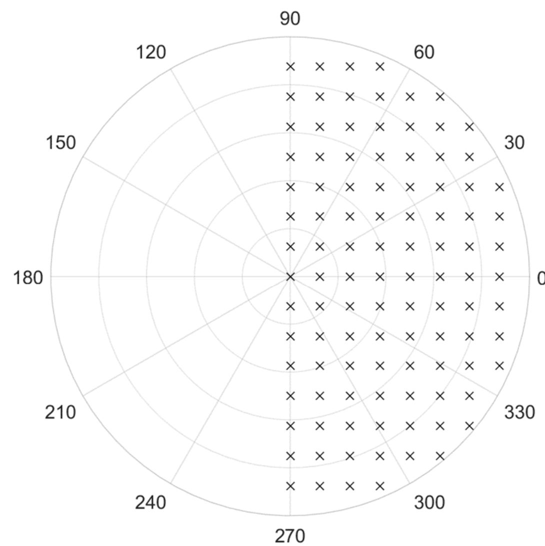
$$y(n) = r\sin\theta\, w(n-1) + r\cos\theta\, y(n-1). \qquad (16.68)$$

Lako se pokaže da je funkcija prenosa ovog sistema data sa:

$$H(z) = \frac{(r\sin\theta)z^{-1}}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \qquad (16.69)$$

čime potvrđujemo da ima jednake polove kao (16.66). Direktnom realizacijom jednačina diferencija (16.67) i (16.68) dobija se struktura data na Slici 16.32.

Analitički gledano, stvarne vrijednosti polova obje funkcije prenosa, date sa (16.66) i (16.69), su jednake. Međutim, kod alternativnog sistema, opsanog u vremenskom domenu sa (16.67) i (16.68), i prikazanog na Slici 16.32, nakon kvantizacije koeficijenata $\alpha_1 = r\cos\theta$ i $\alpha_2 = r\sin\theta$ sa tri bita, moguće pozicije polova su ravnomjerno raspoređene, jer se nalaze na presjecima pravih $\mathrm{Re}\{p_{1,2}\} = \alpha_1$ i $\mathrm{Im}\{p_{1,2}\} = \alpha_2$, kao na Slici 16.33. Prilikom promjene vrijednosti koeficijenata na nivou najnižeg bita polovi se pomjeraju u susjedne lokacije. Taj



Slika 16.33 Raspored polova funkcije prenosa (16.69) pri kvantizaciji koeficijenata sa tri bita kod alternativnog sistema sa Slike 16.32.

pomak je, za velik broj polova, značajno manji kod alternativnog sistema u odnosu na sistem dat sa (16.66), pa je i uticaj kvantizacije na frekvencijsku karakteristiku manji. Uopšteno, za ublažavanje uticaja kvantizacije na promjene polova, trebalo bi tražiti takve strukture kod kojih su moguće pozicije polova gusto raspoređene oko njihovih stvarnih vrijednosti.

INDEKS

LITERATURA

[1] Allred, R. (2013). *Digital filters for everyone* (2nd ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.

[2] Antoniou, A. (2005). *Digital signal processing: Signals, systems, and filters*. McGraw-Hill Education.

[3] Auger, F., & Hlawatsch, F. (2008). *Time-frequency analysis: Concepts and methods*. Wiley-ISTE.

[4] Babić, D., & Kolić, M. (2007). *Digitalna obrada signala*. Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu.

[5] Babić, Z. (2012). *Analiza i obrada kontinualnih signala*. Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci.

[6] Babić, Z. (2012). *Analogni filtri*. Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci.

[7] Babić, Z. (2005). *Analogni filtri – projektovanje, realizacije i simulacije u Matlab®-u i PSpice®-u*. Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci.

[8] Blandford, D., & Parr, J. (2012). *Introduction to digital signal processing*. Prentice Hall.

[9] Boashash, B. (2015). *Time-frequency signal analysis and processing: A comprehensive reference* (2nd ed.). Academic Press.

[10] Broughton, S. A. (2008). *Discrete Fourier analysis and wavelets: Applications to signal and image processing*. Wiley-Interscience.

[11] Chaparro, L. F. (n.d.). *Signals and systems using MATLAB*. Academic Press.

[12] Constantinides, A. G. (1967). Frequency transformations for digital filters. *Electronics Letters, 3*(11), 487-489.

[13] Constantinides, A. G. (2001). *System function of discrete-time systems*. Academic Press.

[14] Crochiere, R. E., & Rabiner, L. R. (1983). *Multirate digital signal processing*. Prentice Hall.

[15] Davenport, M. (2011). *Digital signal processing* (Kindle ed.). Self-published.

[16] Diniz, P. S. R., da Silva, E. A. B., & Netto, S. L. (2010). *Digital signal processing: System analysis and design* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[17] Gold, B., & Rabiner, L. R. (1975). *Theory and application of digital signal processing*. Prentice Hall.

[18] Goodwin, G. C., & Sin, K. S. (2009). *Adaptive filtering prediction and control* (2nd ed.). Pearson Prentice Hall.

[19] Haykin, S. (1996). *Adaptive filter theory* (3rd ed.). Prentice-Hall.

[20] Haykin, S. (2002). *Adaptive filter theory* (4th ed.). Pearson Education.

[21] Haykin, S., & Van Veen, B. (2005). *Signals and systems* (2nd ed.). Wiley.

[22] Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2011). *Digital signal processing using MATLAB* (3rd ed.). CL Engineering.

[23] Jerri, A. J. (1977). *Discrete transform methods*. Wiley-Interscience.

[24] Kailath, T. (1985). *Linear systems* (2nd ed.). Prentice Hall.

[25] Kailath, T., & Tseng, C. H. (1994). *Linear systems and adaptive filtering: With applications to communications*. Prentice-Hall.

[26] Kuo, S. M., & Lee, W. S. (2001). *Real-time digital signal processing: Implementations and applications* (2nd ed.). Wiley-Interscience.

[27] Lai, E. (2003). *Practical digital signal processing*. Elsevier.

[28] Lee, E. A., & Varaiya, P. (2011). *Structure and interpretation of signals and systems* (2nd ed.). LeeVaraiya.org.

[29] Ljung, L. (1999). *System identification: Theory for the user* (2nd ed.). Prentice Hall.

[30] Lathi, B. P. (2004). *Linear systems and signals*. Oxford University Press.

[31] Lim, J. S., & Oppenheim, A. V. (1988). *Advanced topics in signal processing*. Prentice Hall.

[32] Lyons, R. G. (2011). *Understanding digital signal processing* (3rd ed.). Pearson Education.

[33] Mandić, D., & Goh, S. L. (2009). *Complex valued nonlinear adaptive filters: Noncircularity, widely linear and neural models*. John Wiley & Sons.

[34] Mandić, D. P., Golz, M., Kuh, A., Obradovic, D., & Tanaka, T. (2008). *Signal processing techniques for knowledge extraction and information fusion*. Springer.

[35] Manolakis, D. G., & Ingle, V. K. (2005). *Statistical and adaptive signal processing: Spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering and array processing*. Artech House.

[36] Manolakis, D. G., & Ingle, V. K. (2011). *Applied digital signal processing: Theory and practice*. Cambridge University Press.

[37] McClellan, J. H., Schafer, R. W., & Yoder, M. A. (2003). *Signal processing first*. Prentice Hall.

[38] Milić, L., Dobrosavljević, Z., & Paunović, Đ. (1999). *Uvod u digitalnu obradu signala*. Elektrotehnički fakultet.

[39] Mitra, S. K. (2010). *Digital signal processing: A computer-based approach*. McGraw-Hill.

[40] Oppenheim, A. V., & Ramesh, V. (2010). *Discrete-time signal processing* (3rd ed.). Pearson Education.

[41] Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2009). *Discrete-time signal processing* (3rd ed.). Pearson Education.

[42] Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. (1997). *Signals and systems* (2nd ed.). Prentice Hall.

[43] Papoulis, A., & Pillai, S. U. (2002). *Probability, random variables, and stochastic processes* (4th ed.). McGraw-Hill.

[44] Parks, T. W., & Burrus, C. S. (1987). *Digital filter design*. Wiley.

[45] Popović, M. V. (1994). *Digitalna obrada signala*. Nauka.

[46] Popović, M. V. (2006). *Signali i sistemi*. Akademska misao.

[47] Prandoni, P., & Vetterli, M. (2008). *Signal processing for communications*. EPFL Press.

[48] Proakis, J. G., & Manolakis, D. K. (2006). *Digital signal processing: Principles, algorithms, and applications* (4th ed.). Pearson Prentice Hall.

[49] Proakis, J. G., & Manolakis, D. K. (2007). *Digital signal processing: Principles, algorithms, and applications* (4th ed.). Pearson Prentice Hall.

[50] Proakis, J. G., & Salehi, M. (2008). *Communication systems engineering* (2nd ed.). Pearson Prentice Hall.

[51] Rabiner, L. R., & Gold, B. (1975). *Theory and application of digital signal processing*. Prentice Hall.

[52] Reljin, B. (2009). *Teorija električnih kola II*. Akademska misao.

[53] Roberts, M. J. (2008). *Signals and systems: Analysis using transform methods and MATLAB*. McGraw-Hill.

[54] Sánchez, F. R., & Ibarra, F. (2006). *Digital filter design and implementation: An introduction*. Springer.

[55] Sayed, A. H. (2003). *Adaptive filters*. Wiley.

[56] Sayed, A. H. (2011). *Fundamentals of adaptive filtering*. Wiley.

[57] Schreier, R., & Scharf, L. L. (2010). *Statistical signal processing: Detection, estimation, and time series analysis*. Pearson.

[58] Sečujski, M., Jakovljević, N. & Delić, V. (2019). *Digitalna obrada signala.* Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka, Katedra za telekomunikacije i obradu signala.
[59] Smith, S. W. (2002). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing.* California Technical Publishing.
[60] Stoica, P., & Moses, R. L. (2005). *Spectral analysis of signals* (Vol. 452, pp. 25-26). Pearson Prentice Hall.
[61] Vaidyanathan, P. P. (1993). *Multirate systems and filter banks*. Prentice Hall.
[62] Vetterli, M., & Kovačević, J. (2009). *Wavelets and filter banks*. Prentice Hall.
[63] Viterbi, A. J., & Omura, J. K. (1979). *Principles of digital communication and coding.* McGraw-Hill.
[64] Widrow, B., & Stearns, S. D. (1985). *Adaptive signal processing.* Prentice-Hall.
[65] Cambridge University. (n.d.). *Part III Mathematics: B05*. University of Cambridge. https://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/PartIIIat/b05.pdf
[66] Carnegie Mellon University. (n.d.). *ECE491: Digital Signal Processing.* Carnegie Mellon University. https://course.ece.cmu.edu/~ece491/
[67] Connexions. (n.d.). *Signal processing.* Connexions. https://archive.org/details/cnx-org-col10280/mode/2up
[68] ETF, University of Belgrade. (n.d.). *Predavanja PDF*. ETF. http://tnt.etf.rs/~oe3dos/materijali/predavanja/casovi/
[69] ETF, University of Belgrade. (n.d.). *Projektovanje FIR filtara*. ETF. http://tnt.etf.rs/~oe3dos/materijali/predavanja/casovi/9.%20Projektovanje%20FIR%20filtara.pdf
[70] Free-Ebooks.net. (n.d.). *Digital signal processing and digital filter design*. Free Ebooks. https://www.free-ebooks.net/mathematics-textbooks/Digital-Signal-Processing-and-Digital-Filter-Design/pdf?dl&preview
[71] Haykin, S. (n.d.). *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall. https://www.probabilitycourse.com/preface.php
[72] Hinton, O. (n.d.). *EEE305: Signal Processing Course Materials*. Newcastle University. https://www.staff.ncl.ac.uk/oliver.hinton/eee305/
[73] Jakobsson, A. (n.d.). *Stoica and M05*. Lund University. https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/personal_staff/Andreas_Jakobsson/StoicaM05.pdf
[74] Juang, B. H. (n.d.). *BHJ4270-11*. Georgia Institute of Technology. http://users.ece.gatech.edu/~juang/4270/BHJ4270-11.pdf
[75] Mandic, D. P. (n.d.). *Courses in Communications and Signal Processing*. Imperial College London. https://www.commsp.ee.ic.ac.uk/~mandic/courses.htm
[76] MIT OCW. (2005). *Discrete-Time Signal Processing*. MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu/courses/6-341-discrete-time-signal-processing-fall-2005/

[77] MIT OCW. (2009). *Communication Systems Engineering*. MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu/courses/16-36-communication-systems-engineering-spring-2009/pages/readings/
[78] MIT OCW. (2010). *Introduction to Communication, Control, and Signal Processing*. MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu/courses/6-011-introduction-to-communication-control-and-signal-processing-spring-2010/pages/readings/
[79] MIT OCW. (2011). *Digital signal processing*. MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu/courses/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011/pages/study-materials/
[80] MIT NRR. (n.d.). *Matched filter*. MIT NRR. https://nrr.mit.edu/sites/default/files/documents/Matched_Filter.pdf
[81] NYU EEWeb. (n.d.). *Teaching materials for signal processing*. New York University. https://eeweb.engineering.nyu.edu/iselesni/teaching/index.html
[82] NYU EEWeb. (n.d.). *Lecture notes on least squares*. New York University. https://eeweb.engineering.nyu.edu/iselesni/lecture_notes/least_squares/least_squares_SP.pdf
[83] Oppenheim, A. V. (n.d.). *Digital filter design overview*. CCRMA, Stanford University. https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/Digital_Filter_Design_Overview.html
[84] Oppenheim, A. V. (n.d.). *Signals and Systems: Theory and Applications*. CCRMA, Stanford University. https://ccrma.stanford.edu/~jos/sasp/sasp.html
[85] Porat, B., & Friedlander, B. (1984). *The modified Yule-Walker method of ARMA spectral estimation*. IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems. https://sepwww.stanford.edu/sep/prof/pvi/rand/paper_html/
[86] Signal Processing Course, Uppsala University. (n.d.). *Lecture 4: Signal processing*. Uppsala University. http://www.signal.uu.se/Courses/CourseDirs/SignalbehandlingIT/forelas04.pdf
[87] Signal Processing Course, Uppsala University. (n.d.). *Lecture 5: Signal processing*. Uppsala University. http://www.signal.uu.se/Courses/CourseDirs/SignalbehandlingIT/forelas05.pdf
[88] Stanford University. (n.d.). *EE264: Digital Signal Processing*. Stanford University. https://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee264/ee264.1072/
[89] Stanford University. (n.d.). *Lecture 12: Digital signal processing*. Stanford University.
[90] Wireless PI. (n.d.). *Design of a discrete-time differentiator*. Wireless PI. https://wirelesspi.com/design-of-a-discrete-time-differentiator/
[91] ZESOI. (n.d.). *Predavanja PDF*. ZESOI. http://dos.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/